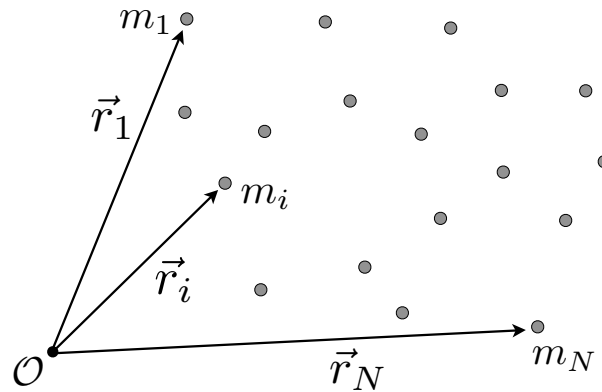


7 Sistema con muchas partículas

Hasta el momento, hemos limitado nuestro estudio a sistemas con una o dos masas puntuales. Llegó la hora de extender nuestro estudio a sistemas con un número arbitrario de partículas.

7.1 Sistemas con muchas partículas

Las definiciones de momento angular y torque son particularmente útiles cuando lidiamos con sistemas de involucrando muchas partículas. Consideremos un sistema compuesto por N partículas. Denotaremos la posición de cada partícula como \vec{r}_i , con $i = 1, \dots, N$. La siguiente figura muestra la situación a la cual estamos enfrentados:



En esta situación debemos administrar N ecuaciones de movimiento debido a la segunda ley de Newton:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.1)$$

donde $\vec{a}_i = d^2 \vec{r}_i / dt^2$. La fuerza \vec{F}_i corresponde a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i . Esta fuerza puede ser \vec{F}_i separada en dos grupos: fuerzas internas y fuerzas externas:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (7.2)$$

Las fuerzas internas son aquellas debido a la influencia de otras partículas constituyentes. Por ejemplo, sobre la partícula i influyen la partícula 1 ejerciendo una

fuerza F_{1i} , la partícula 2 con una fuerza F_{2i} , etc. Es decir, podemos escribir:

$$\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}, \quad (7.3)$$

donde \vec{F}_{ji} es la fuerza que la partícula j ejerce sobre i . Notemos que esta suma también incluye la i -ésima partícula. Vamos a postular que la fuerza interna que la i -ésima partícula ejerce sobre sí misma es $\vec{F}_{ii} = 0$. Notemos que esto es consistente con la tercera ley de Newton, que asevera que $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (pero cuidado, la tercera ley de Newton se aplica a agentes distintos, y no es necesariamente válida para establecer como un agente reacciona a su propia influencia). Por su parte, \vec{F}_i^{ext} contiene todas las fuerzas ejercidas por agentes externos, para los cuales las partículas $i = 1, \dots, N$ no forma parte de sus constituyentes. Ahora, si sumamos todas las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$\sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \sum_{ij} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (7.4)$$

Para simplificar esta expresión, conviene introducir el concepto de centro de masas. Definiremos la posición del centro de masas \vec{r}_{CM} como:

$$\vec{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (7.5)$$

donde $M_{\text{tot}} \equiv \sum_i m_i$ es la masa total del sistema de muchas partículas. Entonces, la velocidad y aceleración del centro de masas son:

$$\vec{v}_{\text{CM}} \equiv \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i, \quad \vec{a}_{\text{CM}} \equiv \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i. \quad (7.6)$$

Luego, podemos re-escribir (7.4) de la siguiente manera

$$M_{\text{tot}} \vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}, \quad (7.7)$$

donde $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$ y $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = \sum_{ij} \vec{F}_{ji}$. Podemos simplificar esta ecuación un poco más al notar que la suma $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = \sum_{ij} \vec{F}_{ji}$ debe anularse. En efecto, notemos que, gracias a la tercera ley de Newton, tenemos

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = - \sum_{ij} \vec{F}_{ij}. \quad (7.8)$$

Luego, intercambiando i por j , en el lado derecho de esta expresión, el resultado no puede cambiar (pues solo estamos cambiando las etiquetas de las cantidades sumadas sin cambiar el resultado) obtenemos $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = -\sum_{ji} \vec{F}_{ij}$. Sin embargo, dado que el orden de las sumas no puede alterar el resultado ($\sum_{ji} = \sum_{ij}$), finalmente obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = -\sum_{ij} \vec{F}_{ji}, \quad (7.9)$$

lo cual necesariamente implica $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = -\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}}$, o simplemente $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = 0$. Por cierto, esto es consistente con nuestro postulado inicial de que $\vec{F}_{ii} = 0$. En efecto, notemos que $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}}$ es la fuerza interna del sistema completo, compuesto por N partículas, pensada como una sola partícula y, por lo tanto, esta cantidad debiera ser nula. Para continuar, gracias a $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{int}} = 0$ la ecuación (7.7) adquiere la forma

$$M_{\text{tot}} \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (7.10)$$

Este es un resultado notable. Nos dice que, si omitimos la estructura interna del sistema de N -partículas, éste puede ser pensado como una sola partícula de masa M_{tot} con posición \vec{r}_{CM} . La ecuación de movimiento dictando el movimiento de dicha partícula tiene la forma de la segunda ley de Newton, donde la fuerza total corresponde a la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre cada partícula. Por ejemplo, la Tierra es un conjunto de muchas partículas, las cuales incluyen nuestras propias células y, al mismo tiempo, los átomos que las conforman. Aún así, para comprender el movimiento de la Tierra en el espacio (sin atender qué le ocurre a sus constituyentes) basta preocuparse del centro de masas, y la fuerza externa que actúa sobre cada pedazo de la tierra (por ejemplo, la fuerza de gravedad que el Sol ejerce sobre cada uno de nosotros al igual que cada otro trozo que forma parte de la Tierra).

7.2 Momento angular y torque de un sistema de partículas

Extendamos ahora la definición de momento angular o torque para sistemas con varias partículas. El momento angular y el torque para un sistema de N -partículas con respecto a un punto fijo P vienen definidos como:

$$\vec{L}_P \equiv \sum_i \vec{L}_P^i, \quad \vec{\tau}_P \equiv \sum_i \vec{\tau}_P^i, \quad (7.11)$$

donde \vec{L}_P^i y $\vec{\tau}_P^i$ son el momento angular y torque debido a la i -ésima partícula (con respecto al punto fijo P):

$$\vec{L}_P^i = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{v}_i, \quad (7.12)$$

$$\vec{\tau}_P^i = (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i. \quad (7.13)$$

Recordemos que la ecuación (2.165) es válida para cada partícula individual. Es decir, se debe satisfacer

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_P^i = \vec{\tau}_P^i. \quad (7.14)$$

Luego, sigue que el momento angular y el torque del sistema completo también deben satisfacer

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_P = \vec{\tau}_P. \quad (7.15)$$

Al igual que en la discusión de la sección anterior, separemos la fuerza que aparece en (7.13) en una fuerza debido a agentes internos y otra debido a agentes externos. Esta separación nos permite escribir

$$\vec{\tau}_P = \vec{\tau}_P^{\text{int}} + \vec{\tau}_P^{\text{ext}}. \quad (7.16)$$

donde $\vec{\tau}_P^{\text{int}} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i^{\text{int}}$ y $\vec{\tau}_P^{\text{ext}} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$. Recordemos que $\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_j \vec{F}_{ji}$. Luego, vemos que

$$\vec{\tau}_P^{\text{int}} = \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{ji}. \quad (7.17)$$

Notemos que \vec{r}_P no se ve afectado por las sumas, por lo que $\sum_{ij} \vec{r}_P \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_P \times \sum_{ij} \vec{F}_{ji} = 0$. Luego, la expresión anterior se simplifica un poco

$$\vec{\tau}_P^{\text{int}} = \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}. \quad (7.18)$$

Re-escribamos esta expresión separándola en dos términos idénticos

$$\vec{\tau}_P^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}. \quad (7.19)$$

Ahora podemos intercambiar i por j en el segundo término, sin alterar el resultado. Esto nos da

$$\vec{\tau}_P^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{ji} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}. \quad (7.20)$$

Luego, usando $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ y $\sum_{ji} = \sum_{ij}$, obtenemos

$$\vec{\tau}_P^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}. \quad (7.21)$$

Para poder avanzar, debemos introducir un nuevo elemento a la discusión. Asumiremos que el sistema está constituido de elementos que interactúan de manera fundamental. Esto quiere decir que los pares de partículas solo pueden interactuar atrayéndose o repeliéndose a lo largo de la línea que las une. En otras palabras asumiremos que:

$$\vec{F}_{ij} \propto (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (7.22)$$

Recordemos que este corresponde al resultado (3.156) de nuestra discusión acerca de interacción entre pares de partículas, cubierta en la sección 3.15. Utilizando este resultado de regreso en (7.21), finalmente obtenemos:

$$\vec{\tau}_P^{\text{int}} = 0. \quad (7.23)$$

Es decir, el torque de un sistema de muchas partículas solo incluye contribuciones debido a fuerzas externas ($\vec{\tau}_P = \vec{\tau}_P^{\text{ext}}$). Este es un resultado muy importante y poderoso, que nos permitirá lidiar con sistemas tales como sólidos rígidos, los cuales estudiaremos dentro de un momento.

7.3 Reglas de suma

Si comparamos el momento angular con respecto a dos puntos fijos P y P' distintos, usando (7.12), es directo comprobar que

$$\vec{L}_{P'} - \vec{L}_P = \sum_i m_i (\vec{r}_P - \vec{r}_{P'}) \times \vec{v}_i. \quad (7.24)$$

Notemos que la diferencia $\vec{r}_{P'} - \vec{r}_P$ no depende de la etiqueta i con la cual se suma, por lo que podemos re-escribir este resultado como:

$$\vec{L}_{P'} = \vec{L}_{P'}^P + \vec{L}_P, \quad \vec{L}_{P'}^P \equiv M_{\text{tot}} (\vec{r}_P - \vec{r}_{P'}) \times \vec{v}_{\text{CM}} \quad (7.25)$$

A esta relación se le llama una regla de suma. Nos permite calcular el momento angular con respecto a un punto fijo P' directamente a partir de el momento angular \vec{L}_P . Notemos que $\vec{L}_{P'}^P$ puede ser pensado como el momento angular del sistema con

respecto al punto P' , como si éste estuviese localizado en la posición \vec{r}_P . Es directo comprobar que una relación similar se cumple para el torque:

$$\vec{\tau}_{P'} = \vec{\tau}_{P'}^P + \vec{\tau}_P, \quad \vec{\tau}_{P'}^P \equiv (\vec{r}_P - \vec{r}_{P'}) \times \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}. \quad (7.26)$$

A partir de (7.15), es directo comprobar que

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{P'}^P = \vec{\tau}_{P'}^P. \quad (7.27)$$

Estos resultados nos permiten quitar nuestra preocupación sobre un punto fijo P en particular. A partir de ahora, podemos calcular el momento angular y torque con respecto al origen \mathcal{O} . Luego, si fuera necesario conocer estas cantidades a partir de otros puntos, simplemente utilizamos las reglas de suma.

7.4 Torque debido a la fuerza de gravedad

Notemos que el torque total $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ (con respecto al origen) debido a la fuerza de gravedad $F_i^g = gm_i \hat{g}$ (donde \hat{g} es un vector unitario que apunta hacia abajo) viene dado por

$$\vec{\tau} = gm_i \sum_i \vec{r}_i \times \hat{g}. \quad (7.28)$$

Sin embargo, notemos que $m_i \sum_i \vec{r}_i = M_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}}$. Luego, obtenemos la expresión general

$$\vec{\tau} = gM_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}} \times \hat{g}. \quad (7.29)$$

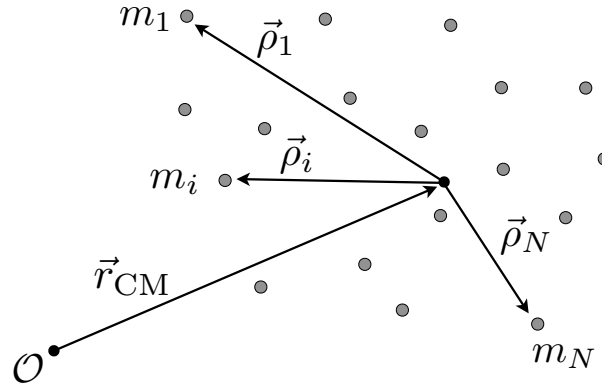
Es decir, para conocer el torque debido a la fuerza de gravedad sobre un sistema de varias partículas, sólo necesitamos conocer la posición del centro de masas y la masa total del sistema.

7.5 Posiciones relativas al centro de masas

Muchas veces es conveniente trabajar con la posición $\vec{\rho}_i$ de una partícula i relativa al centro de masas. La posición $\vec{\rho}_i$ viene dada por

$$\vec{\rho}_i \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_{\text{CM}}. \quad (7.30)$$

La siguiente figura muestra como visualizar $\vec{\rho}_i$:



Si multiplicamos esta relación por m_i y sumamos, obtenemos $\sum_i m_i \vec{r}_i = M_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}} + \sum_i m_i \vec{\rho}_i$. Notemos que el lado izquierdo coincide con $M_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}}$, por lo que obtenemos el resultado:

$$\sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0. \quad (7.31)$$

Esto simplemente nos dice que la posición del centro de masas con respecto al centro de masas es $\vec{r}_{\text{CM}} - \vec{r}_{\text{CM}} = 0$. Notemos que este resultado es completamente general, y es incluso válido cuando el centro de masas está en movimiento. De hecho, tomando derivadas con respecto al tiempo, también obtenemos:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0. \quad (7.32)$$

Dado que $\dot{\vec{\rho}}_i$ es la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masas, podemos leer al resultado (7.32) como la afirmación de que la velocidad del centro de masas con respecto al centro de masas es $\vec{v}_{\text{CM}} - \vec{v}_{\text{CM}} = 0$.

7.6 Momento angular, torque y centro de masas

Utilicemos la definición (7.30) en las definiciones para momento angular y torque. Para el caso del momento angular, insertando (7.30) en (7.12) y sumando, vemos que el momento angular de un sistema con respecto al origen es:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \sum_i m_i (\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{\rho}_i) \times (\vec{v}_{\text{CM}} + \dot{\vec{\rho}}_i). \quad (7.33)$$

Expandiendo este resultado, y ordenando las sumas, obtenemos:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = M_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_{\text{CM}} + \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i. \quad (7.34)$$

Gracias a (7.31) y (7.32) vemos que el segundo y tercer término se anulan, con lo cual, finalmente obtenemos:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{CM}}. \quad (7.35)$$

donde $\vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}}$ es el momento angular del sistema completo, como si este estuviese localizado en la posición \vec{r}_{CM}

$$\vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} \equiv M_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}}, \quad (7.36)$$

y \vec{L}_{CM} es el momento angular del sistema con respecto al centro de masas:

$$\vec{L}_{\text{CM}} \equiv \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i. \quad (7.37)$$

Estos pasos los podemos repetir para el torque, a partir de los cuales obtenemos:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} + \vec{\tau}_{\text{CM}}, \quad (7.38)$$

donde $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}}$ es el torque del sistema completo, como si este estuviese localizado en la posición \vec{r}_{CM}

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} \equiv \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}, \quad (7.39)$$

y $\vec{\tau}_{\text{CM}}$ es el torque con respecto a la posición de centro de masas:

$$\vec{\tau}_{\text{CM}} \equiv \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (7.40)$$

No es difícil verificar que

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}}, \quad (7.41)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{CM}} = \vec{\tau}_{\text{CM}}. \quad (7.42)$$

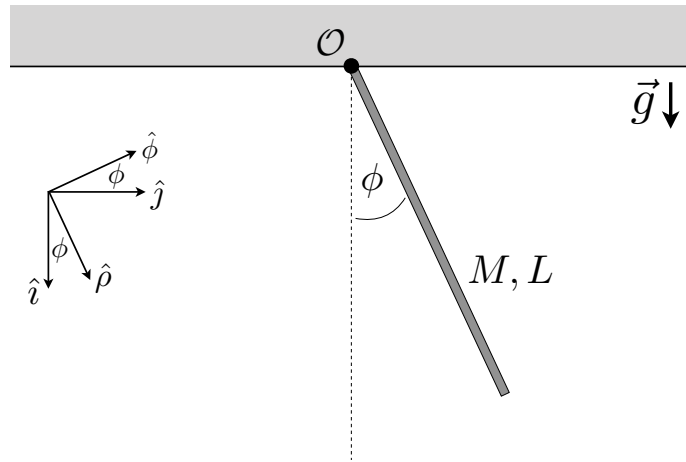
Notemos que para el caso particular en que \vec{F}_i^{ext} corresponde a la fuerza gravitacional $\vec{F}_{gi} = m_i g \hat{g}$, vemos que $\vec{\tau}_{\text{CM}}$ se anula:

$$\vec{\tau}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_{gi} = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i g \hat{g} = g \left(\sum_i m_i \vec{\rho}_i \right) \times \hat{g} = 0. \quad (7.43)$$

Este resultado es particularmente útil para comprender el movimiento de objetos constituido por muchas partículas sobre la superficie de la Tierra.

7.6.1 Ejemplo

Consideremos como siguiente ejemplo un péndulo consistente en una varilla rígida de largo L y masa M , con uno de sus extremos colgando desde el origen \mathcal{O} (ver figura). Asumamos que la masa está distribuida homogéneamente a lo largo de toda la varilla.



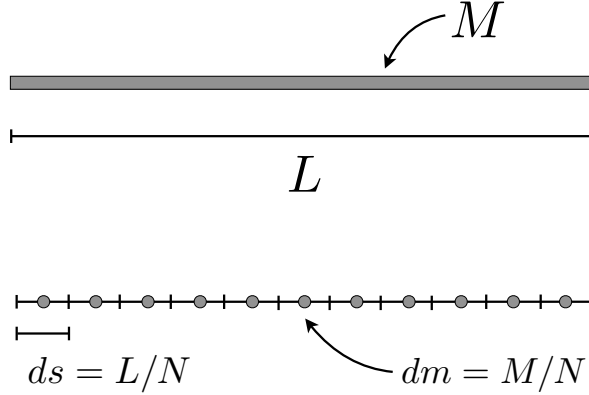
Podemos pensar en esta varilla como una colección de N masas $dm = M/N$ dispuestas de manera equidistante, separadas por una distancia $ds \equiv L/N$, como lo muestra la siguiente figura:

Luego, la posición de la i -ésima masa viene dada por

$$\vec{r}_i = s_i \hat{\rho}, \quad (7.44)$$

donde s_i es la distancia de la i -ésima masa del origen, la que permanece constante. En consecuencia, la velocidad de cada masa es

$$\vec{v}_i = s_i \dot{\phi} \hat{\phi}, \quad (7.45)$$



y por lo tanto, el momento angular total del sistema con respecto al origen, viene dado por:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^N dm \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N dm (s_i \hat{\rho}) \times (s_i \dot{\phi} \hat{\phi}) = \hat{k} \dot{\phi} \sum_{i=1}^N s_i^2 dm. \quad (7.46)$$

Notemos que, dado que $dm = M/N$ y $ds \equiv L/N$, podemos escribir

$$dm = \frac{M}{L} ds. \quad (7.47)$$

La cantidad M/L es la densidad lineal de masa uniforme de la varilla. Luego, el momento angular puede ser expresado como

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \hat{k} \dot{\phi} \frac{M}{L} \sum_{i=1}^N s_i^2 ds. \quad (7.48)$$

La suma $\sum_{i=1}^N r_i^2 ds$ no es más que una suma de Riemann y, por lo tanto, en el límite $N \rightarrow \infty$ corresponde la siguiente integral:

$$\sum_{i=1}^N s_i^2 ds = \int_0^L s^2 ds = \frac{1}{3} L^3. \quad (7.49)$$

Así, finalmente vemos que el momento angular adquiere la forma:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \frac{1}{3} ML^2 \dot{\phi} \hat{k}. \quad (7.50)$$

El torque $\vec{\tau}_O$ del sistema puede ser calculado siguiendo pasos similares:

$$\vec{\tau}_O = \sum_i s_i \hat{\rho} \times dm g (\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}) = -\hat{k} g \frac{M}{L} \sin \phi \sum_i s_i ds, \quad (7.51)$$

donde nuevamente usamos $dm = (M/L)ds$. Notemos que el torque debido a la fuerza que ejerce el techo sobre la varilla es nulo debido a que esta fuerza se ejerce sobre una partícula perteneciente a la varilla que coincide con el origen. Expresando la suma de Riemann como una integral $\sum_i s_i ds = \int_0^L s ds = L^2/2$, vemos que

$$\vec{\tau}_O = -\frac{1}{2} \hat{k} g M L \sin \phi. \quad (7.52)$$

Luego, usando $d\vec{L}_O/dt = \vec{\tau}_O$, finalmente vemos que la ecuación de movimiento de la varilla es

$$\ddot{\phi} + \frac{3g}{2L} \sin \phi = 0. \quad (7.53)$$

¿Cuál es la fuerza \vec{F}_{techo} que ejerce el techo sobre el extremo superior de la varilla? Al igual que con el ejemplo anterior, una forma de determinar esto es mediante la ecuación $M\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$. La posición del centro de masas es $\vec{r}_{\text{CM}} = (L/2)\hat{\rho}$, y por lo tanto la aceleración del centro de masas es $\vec{a}_{\text{CM}} = (L/2)(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho})$, luego podemos escribir

$$\frac{1}{2} M L (\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = \vec{F}_{\text{techo}} + \sum_i dm g (\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}). \quad (7.54)$$

Notemos que $\sum_i dm = M$, y por lo tanto, usando (7.53) obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{techo}} = \frac{1}{4} M g \sin \phi \hat{\phi} - \frac{1}{2} M g \left(\frac{L}{g} \dot{\phi}^2 + 2 \cos \phi \right) \hat{\rho}. \quad (7.55)$$

Por supuesto, integrando una vez (7.53) es posible encontrar $\dot{\phi}^2$ en función de ϕ , entregándonos una expresión para \vec{F}_{techo} en función de ϕ .

7.7 Energías para sistemas con varias partículas

Recordemos nuestra discusión de la Sección 3.16, donde determinamos la energía de un sistema compuesto por dos partículas. No es difícil extender esta discusión al caso de varias partículas, para definir la energía mecánica E del sistema como:

$$E = K + U, \quad (7.56)$$

donde K es la suma de todas las energías cinéticas individuales debido a cada partícula $K_i = m_i \vec{v}_i^2 / 2$

$$K = \sum_i K_i, \quad (7.57)$$

y U es la energía potencial total, definida como la suma

$$U = U_1^{\text{ext}} + U_2^{\text{ext}} + \dots + U_M^{\text{ext}} \\ + U_{12} + U_{13} + U_{23} + U_{24} + \dots + U_{N-1,N}. \quad (7.58)$$

En esta suma, los sub-potenciales $U_i^{\text{ext}} = U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i)$ son los potenciales a partir de los cuales es posible derivar las fuerzas externas conservativas $\vec{F}_i^{\text{ext}} = -\nabla_i U_i^{\text{ext}}$. Por otro lado, los sub-potenciales U_{ij} (con la notación convencional $i < j$) son los potenciales describiendo la interacción del par de partículas i - j . Estos deben depender de la distancia separando al par

$$U_{ij} = U_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|). \quad (7.59)$$

Recordemos que la fuerza \vec{F}_{ji} que la partícula j ejerce sobre i viene dada por

$$\vec{F}_{ji} = -\nabla_i U_{ij}, \quad (7.60)$$

mientras que la fuerza \vec{F}_{ij} que la partícula i ejerce sobre j viene dada por

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_j U_{ij}. \quad (7.61)$$

De estos resultados es posible verificar $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. De esta manera, la fuerza conservativa \vec{F}_i^C total que actúa sobre una partícula i dada, puede ser calculada como

$$\vec{F}_i^C = -\nabla_i U, \quad (7.62)$$

$$= -\nabla_i U_i^{\text{ext}} - \sum_j \nabla_i U_{ij}, \quad (7.63)$$

$$= \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ji}. \quad (7.64)$$

Podemos simplificar la expresión general para U al convenir que $U_{ii} = 0$ (lo que es consistente con el hecho de que $\vec{F}_{ii} = 0$) y definiendo U_{ij} para $i > j$ de la siguiente manera: $U_{ij} = U_{ji}$. De esta manera, $U_{ij} = (U_{ij} + U_{ji})/2$, lo que nos permite escribir U como

$$U = \sum_i U_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij}. \quad (7.65)$$

En definitiva, la energía mecánica total del sistema consiste en:

$$E = \sum_i K_i + \sum_i U_i^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij}. \quad (7.66)$$

Ahora, si derivamos esta expresión con respecto al tiempo, vemos que (usando la regla de la cadena)

$$\frac{d}{dt}E = \sum_i \vec{v}_i \cdot \left[m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i^{\text{ext}} - \sum_j \vec{F}_{ji} \right]. \quad (7.67)$$

Luego, si en el sistema estudiado solo actúan fuerzas conservativas, entonces $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ji}$ y la energía se conserva $\dot{E} = 0$. Por otro lado, si existen fuerzas no conservativas entonces $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{\text{NC}}$, de donde vemos que

$$\frac{d}{dt}E = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{NC}}. \quad (7.68)$$

Desde luego, esto significa que la energía total no se conserva en general, y la diferencia de energía entre un punto inicial A y un punto final B puede ser expresada como $E_B - E_A = W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C})$, con $W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}) = \sum_i W_{i,\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}_i)$, donde $W_{i,\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}_i)$ es el trabajo debido a las fuerzas no-conservativas calculadas para cada partícula i a lo largo de sus caminos \mathcal{C}_i .

7.7.1 Potencial gravitacional para un sistema con varias partículas

De acuerdo a la discusión anterior, el potencial debido a la fuerza de gravedad $F_i^g = -gm_i \hat{k}$ (donde \hat{k} apunta hacia arriba) debe tener la forma:

$$U_g = \sum_i gm_i h_i, \quad (7.69)$$

donde h_i es la altura de cada partícula con respecto a alguna altura de referencia común. Notemos que $h_i = \hat{k} \cdot \vec{r}_i$, por lo que U_g puede ser re-escrito como

$$U_g = g \hat{k} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right). \quad (7.70)$$

La cantidad en paréntesis es ni más ni menos que $M_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}}$, por lo que, salvo una constante, finalmente obtenemos el resultado general:

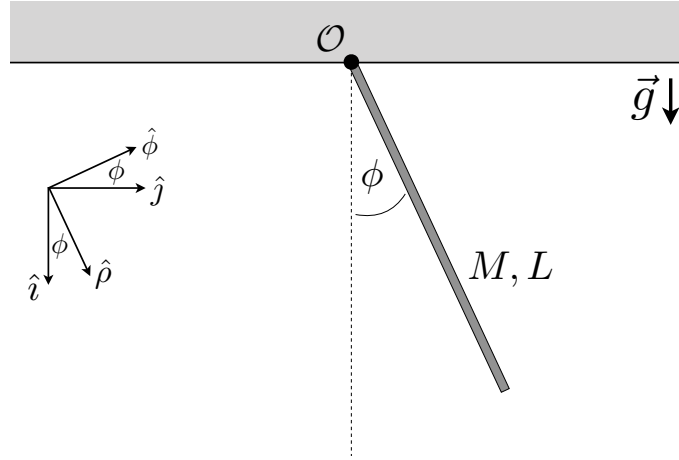
$$U_g = M_{\text{tot}} g \hat{k} \cdot \vec{r}_{\text{CM}} \quad (7.71)$$

$$= M_{\text{tot}} g h_{\text{CM}}, \quad (7.72)$$

donde h_{CM} es la altura del centro de masa con respecto a alguna altura de referencia.

7.7.2 Ejemplo

Como aplicación de estos resultados, consideremos nuevamente el péndulo construido a partir de una varilla rígida de largo L y masa M colgando desde uno de sus extremos:



Recordemos que podemos pensar en la varilla como una colección de N masas $dm = (M/L)dr$, donde $ds = L/N$ es la distancia que separa a cada masa. La velocidad de cada masa viene dada por $\vec{v}_i = s_i \dot{\phi} \hat{\phi}$. Luego, la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i dm s_i^2 \dot{\phi}^2 = \frac{\dot{\phi}^2 M}{2L} \sum_i s_i^2 ds. \quad (7.73)$$

Al igual que antes, podemos escribir esta suma en términos de la integral $\sum_i s_i^2 dr = \int_0^L s^2 ds = L^3/3$. Entonces, la energía cinética de la varilla puede ser escrita como

$$K = \frac{1}{6} \dot{\phi}^2 M L^2. \quad (7.74)$$

Veamos ahora la energía potencial. En primer lugar, notemos que no necesitamos preocuparnos por la contribución a U debido a las interacciones internas de las partículas que constituyen la varilla: Esto se debe a que la distancia $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ que separa a cada par de partículas de la varilla permanece constante. En efecto, gracias a (7.59), vemos que si $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ es constante, y por lo tanto la contribución a U debido a las interacciones internas corresponde a una constante. Luego, la energía potencial del

sistema se debe a la fuerza de gravedad, por lo que tenemos

$$U = \sum_i dm g r_i (1 - \cos \phi), \quad (7.75)$$

$$= g \frac{M}{L} (1 - \cos \phi) \sum_i r_i dr, \quad (7.76)$$

$$= g \frac{M}{L} (1 - \cos \phi) \int_0^L r dr, \quad (7.77)$$

$$= \frac{1}{2} MgL (1 - \cos \phi). \quad (7.78)$$

Notemos que este resultado es consistente con (7.72). Así, vemos que el Lagrangiano del sistema puede ser escrito como:

$$L = \frac{1}{6} \dot{\phi}^2 ML^2 - \frac{1}{2} MgL (1 - \cos \phi). \quad (7.79)$$

Es directo ver que la ecuación de Euler-Lagrange del sistema es

$$\ddot{\phi} + \frac{3g}{2L} \sin \phi = 0, \quad (7.80)$$

lo que coincide con la ecuación de movimiento derivada en la sección 7.6.1.

7.8 Sistemas con distribuciones de masa continuas

La varilla de largo L y masa total M , visto en el ejemplo de la sección 7.7.2, es un caso particular de un sistema con distribución de masa continua. Para analizar la varilla, la visualizamos como una colección de pequeñas masas $dm = M/N$ ordenadas de manera equidistante a distancias $ds = L/N$. El paso más importante de nuestro análisis consistió en la determinación de la relación:

$$dm = \frac{M}{L} ds. \quad (7.81)$$

Esta relación nos informa que cada segmento ds de la varilla tiene una masa dm . Al coeficiente M/L se le llama densidad lineal de masa, y se le designa el símbolo λ . Es decir, podemos escribir:

$$dm = \lambda ds. \quad (7.82)$$

Cuando lidiamos con distribuciones continuas de masas, siempre será necesario contar con una relación que nos indique cuánta masa contiene un segmento o pedazo de la

distribución. Por ejemplo, si contamos con una masa distribuida a lo largo y ancho de una superficie, entonces podemos segmentar la superficie en pequeños trocitos con áreas dA . Luego, deberíamos ser capaces de establecer una relación que nos informa cuánta masa dm contiene el trozo de área dA . Esta relación tendrá la forma:

$$dm = \sigma dA, \quad (7.83)$$

donde σ es la densidad de masa superficial. Por otro lado, si contamos con una masa distribuida en un volumen dado, entonces podemos segmentar el volumen en pequeños trocitos de volumen dV , y tendremos que ser capaces de establecer una relación de la forma:

$$dm = \rho dV, \quad (7.84)$$

donde ρ es la densidad de masa volumétrica. Si las densidades λ , σ o ρ son constantes, entonces la masa se distribuye uniformemente a lo largo del medio continuo.

Las relaciones anteriores nos permiten calcular cantidades interesantes como el centro de masas. Recordemos que para un sistema de varias partículas el centro de masas viene dado por:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \vec{r}_i. \quad (7.85)$$

Si consideramos ahora una distribución continua, podemos escribir la relación anterior como la siguiente suma de Riemann:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i dm_i \vec{r}_i. \quad (7.86)$$

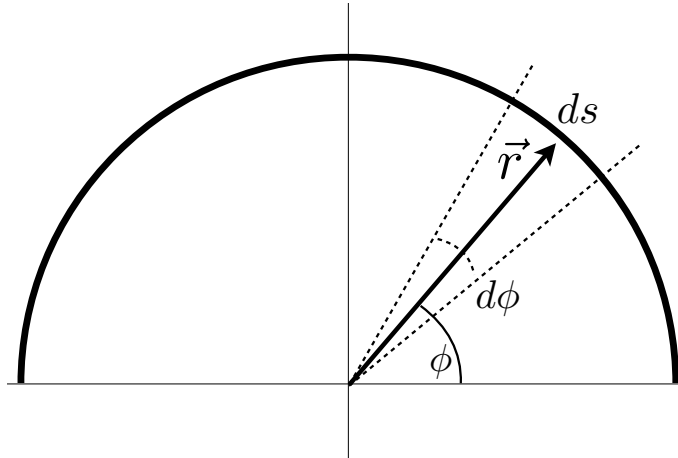
Es decir, podemos escribir el centro de masas como una integral:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int \vec{r} dm. \quad (7.87)$$

En esta integral, el vector va recorriendo la posición de cada trocito de masa dm . Ahora sólo debemos determinar si la integral (es decir la suma) se realiza a lo largo de una curva lineal, de una superficie, o de un volumen. Si la distribución es lineal, entonces debemos usar $dm = \lambda ds$, si es superficial, entonces debemos usar $dm = \sigma dA$ y si es volumétrica, entonces debemos usar $dm = \rho dV$. Veamos a continuación algunos ejemplos.

7.8.1 Ejemplo 1

Busquemos el centro de masas de un alambre de masa M distribuida uniformemente, curvado con forma de arco de radio R (ver figura).



Antes de proceder, debiéramos ejercitar nuestra intuición. La configuración tiene una simetría obvia, en torno al eje vertical. Esto nos debiera dar paso a anticipar que el centro de masas debiera estar en algún lugar a lo largo de dicho eje.

Comencemos determinando la densidad lineal de masa λ del alambre. Para ello, dividamos el alambre en segmentos infinitesimales ds , cada uno de éstos con una masa $dm = \lambda ds$. Dado que la masa está distribuida uniformemente, λ es una constante. Luego, vemos que

$$M = \int dm = \lambda \int ds. \quad (7.88)$$

Pero $\int ds = \pi R$ es el largo del alambre, y por lo tanto encontramos $\lambda = M/\pi R$. Por otro lado, de acuerdo a la figura, podemos expresar ds en términos de infinitésimos de ángulo $d\phi$ de la forma $ds = R d\theta$, lo que nos permite escribir dm como

$$dm = \frac{M}{\pi} d\phi. \quad (7.89)$$

Ahora podemos calcular el centro de masas $\vec{r}_{\text{CM}} = M^{-1} \int \vec{r} dm$ a partir del centro de la circunferencia. Usando (7.89), vemos que:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \vec{r} d\phi. \quad (7.90)$$

Ahora, si escribimos $\vec{r} = R(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j})$, obtenemos:

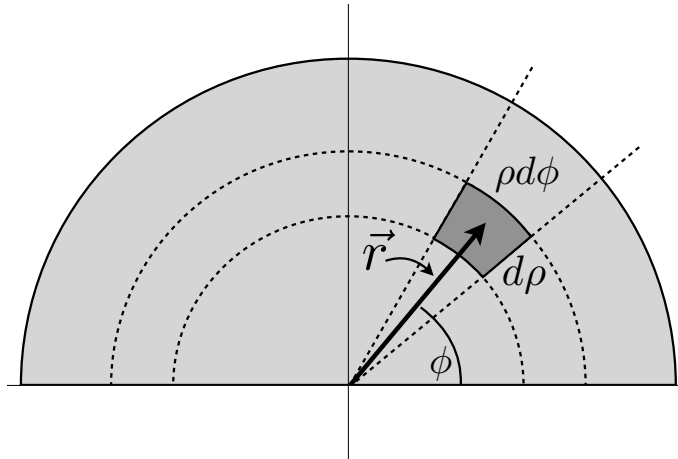
$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) d\phi. \quad (7.91)$$

Notemos que el término proporcional a \hat{i} necesariamente se anulará, debido a que la función $\cos \phi$ está siendo integrada entre 0 y π , lo que da un área bajo la curva nula. Luego, solo debemos concentrarnos en el término proporcional a \hat{j} . La integral del $\sin \phi$ entre 0 y π es 2, por lo que finalmente obtenemos

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{2}{\pi} R \hat{j}. \quad (7.92)$$

7.8.2 Ejemplo 2

Veamos ahora el caso de un medio disco de radio R y masa M uniformemente distribuida (ver figura).



Al igual que con el ejemplo previo, la masa está distribuida de manera uniforme, por lo que la densidad de masa superficial σ debe ser constante. Esto implica (a partir de $dm = \sigma dA$) que $\sigma = M/A$, donde $A = \pi R^2/2$ es el área del medio disco. Para dividir el disco en trocitos, conviene considerar el corte de la figura, donde se muestra un trocito infinitesimal cuadrado. A primera vista, pareciera que el trocito no es cuadrado, pero esto es un efecto visual. Recordemos que estamos hablando de tamaños infinitesimales, y cualquier desviación de este trocito de un cuadrado perfecto es de orden superior, y por lo tanto podemos despreciar dichas diferencias. Los lados del cuadrado están dados por $\rho d\phi$ y $d\rho$. Luego, el área del trocito es $dA = \rho d\phi d\rho$.

Por cierto, notemos que el área total del medio disco es la suma del área de cada trocito, por lo tanto $A = \int dA$. Entonces, si usamos $dA = \rho d\phi d\rho$, vemos que

$$A = \int dA \quad (7.93)$$

$$= \int \rho d\phi d\rho. \quad (7.94)$$

Ahora debemos ser más precisos, y especificar mejor en qué consiste la suma \int . Observemos que tenemos dos infinitésimos en la integral, lo que quiere decir que estamos sumando en dos direcciones ϕ y ρ . Luego, debemos escribir la integral \int como una integral doble con los respectivos límites de integración:

$$A = \int_0^R \int_0^\pi \rho d\phi d\rho = \pi R^2/2, \quad (7.95)$$

cuyo resultado ya conocíamos.

Ya estamos en condiciones de calcular el centro de masas. Este viene dado por la expresión $\vec{r}_{\text{CM}} = M^{-1} \int \vec{r} dm$ la que, junto con $dm = \sigma dA$, adquiere la forma

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{2}{\pi R^2} \int \vec{r} dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi \vec{r} \rho d\phi d\rho. \quad (7.96)$$

Para completar este resultado utilicemos $\vec{r} = \rho(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j})$:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \rho^2 d\phi d\rho. \quad (7.97)$$

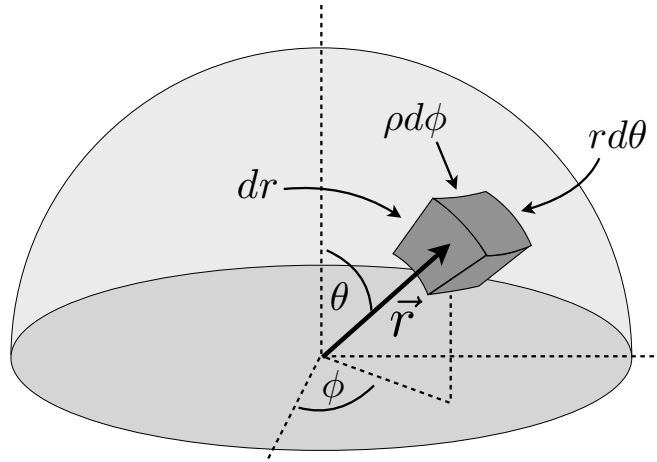
Al igual que en el ejemplo anterior, es inmediato ver que el término proporcional a \hat{i} se anula debido a que el área bajo la curva de $\cos \phi$ entre 0 y π es cero. La integral doble para el término proporcional a \hat{j} es fácil de calcular, y finalmente obtenemos:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{4}{3\pi} R \hat{j}. \quad (7.98)$$

Este resultado concuerda con nuestra expectativa de que el centro de masa debiera estar a lo largo del eje de simetría del disco.

7.8.3 Ejemplo 3

Decidir cómo dividir una figura sólida constituida por una distribución continua de masas es un arte. Veamos ahora el caso de una media esfera de masa total M y radio R , tal como aparece en la siguiente figura:



El volumen de la media esfera es $V = 2\pi R^3/3$, por lo que la densidad de masa de este sólido es $\rho = 3M/2\pi R^3$. Como vemos en la figura, estamos dividiendo la media esfera en trocitos cúbicos cuyas caras mantienen una de las coordenadas esféricas constante. Al igual que en el ejemplo anterior, estos cubos parecen deformados, pero en realidad son cubos infinitesimales perfectos. Los lados de estos cubos son $rd\theta$, $\rho d\phi$ y dr , por lo que el volumen de cada uno de estos cubos es $dV = r\rho drd\theta d\phi$. Sin embargo, no olvidemos que $\rho = r \sin \theta$, por lo que finalmente tenemos

$$dV = r^2 \sin \theta drd\theta d\phi. \quad (7.99)$$

Es directo comprobar que el volumen completo de la media esfera efectivamente corresponde a la suma de cada uno de estos cubitos:

$$V = \int dV \quad (7.100)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin \theta drd\theta d\phi \quad (7.101)$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^4. \quad (7.102)$$

Ahora podemos calcular el centro de masas $\vec{r}_{\text{CM}} = M^{-1} \int \vec{r} dm$. Usando $dm = \rho dV$, y reemplazando adecuadamente ρ y dV , obtenemos:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \vec{r} r^2 \sin \theta drd\theta d\phi. \quad (7.103)$$

Recordemos que en coordenadas esféricas la posición de cada cubito puede ser escrita como

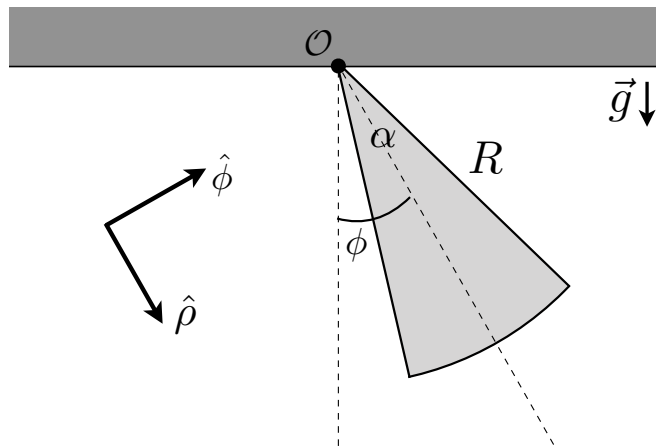
$$\vec{r} = r\hat{r} = r(\cos\theta\hat{k} + \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j}). \quad (7.104)$$

Antes de reemplazar esta forma de \vec{r} en (7.103) notemos que, debido a la simetría de la media esfera en torno al eje vertical, las integrales afectando los términos proporcionales a \hat{i} y \hat{j} necesariamente deben ser nulas. Esto puede ser comprobado directamente resolviendo las integrales. De esta forma, obtenemos:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{3\hat{k}}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr d\theta d\phi = \frac{3R}{8}\hat{k}. \quad (7.105)$$

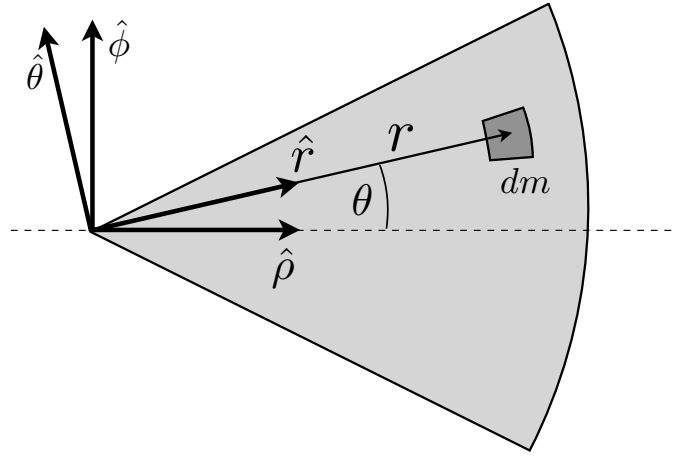
7.8.4 Ejemplo 4: Péndulo con forma de pizza

Veamos ahora un ejemplo consistente en un péndulo con una distribución de masa continua. Consideremos un corte de pizza (de radio original R) de masa total M distribuida homogéneamente, colgando desde el techo (ver figura). El ángulo del corte del pedazo de pizza es α . La pizza solo puede girar en torno a un eje perpendicular al plano la figura.



Propongámonos encontrar las ecuaciones de movimiento utilizando momento angular y torque. Los vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ son tal que $\hat{\rho}$ siempre apunta a lo largo del eje de simetría, y el vector $\hat{\phi}$ siempre apunta en la dirección en la cual crece el ángulo ϕ . Ahora miremos el pedazo de pizza en relación a dicha base:

La ubicación de cada trocito de masa dm puede ser distinguido mediante un vector



posición $\vec{r} = r\hat{r}$, donde:

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{\rho} + \sin\theta\hat{\phi}. \quad (7.106)$$

El ángulo θ es el ángulo entre \hat{r} y $\hat{\rho}$ (que distingue al eje de simetría). Ahora que ya tenemos las coordenadas bien definidas, podemos comenzar a hacer cálculos. Por ejemplo, la relación entre infinitésimos de masa dm y área dA es $dm = \sigma dA$. Dado que la masa está distribuida de manera homogénea, σ es constante. Luego, los trocitos que forman la pizza tiene área $dA = r dr d\theta$. De esta manera:

$$dm = \sigma r dr d\theta. \quad (7.107)$$

Sumando, tenemos que la masa total es la suma de todos los pedacitos de masa $M = \int dm$. Luego:

$$M = \sigma \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R r dr d\theta \quad (7.108)$$

$$= \sigma \frac{1}{2} \alpha R^2. \quad (7.109)$$

A partir de este resultado, podemos concluir que $\sigma = 2M/\alpha R^2$. Para continuar, notemos que cada trocito de masa dm tiene un momento angular $d\vec{L}$ (con respecto a \mathcal{O}) dado por:

$$d\vec{L} = dm \vec{r} \times \vec{v}, \quad (7.110)$$

donde \vec{r} y \vec{v} son la posición y velocidad del trocito de masa dm . Ya sabemos que la posición es

$$\vec{r} = r(\cos\theta\hat{\rho} + \sin\theta\hat{\phi}), \quad (7.111)$$

donde r y θ son constantes (pues denotan la posición del trocito con respecto a $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$). Luego, usando que $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$, la velocidad resulta ser

$$\vec{v} = r\dot{\phi}(\cos\theta\hat{\phi} - \sin\theta\hat{\rho}). \quad (7.112)$$

A partir de este resultado, vemos que $\vec{r} \times \vec{v} = \dot{\phi}r^2\hat{k}$, donde \hat{k} es un vector que apunta hacia fuera del plano. En definitiva, cada trocito tiene un momento angular $d\vec{L} = dm\dot{\phi}r^2\hat{k}$. Entonces, el momento angular del pedazo de pizza es la suma del momento angular de cada trocito:

$$\vec{L} = \int d\vec{L} \quad (7.113)$$

$$= \int dm\dot{\phi}r^2\hat{k}. \quad (7.114)$$

Usando $dm = \sigma r dr d\theta$ con $\sigma = 2M/\alpha R^2$, la expresión anterior adquiere la forma:

$$\vec{L} = \dot{\phi} \frac{2M}{\alpha R^2} \hat{k} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R r^3 dr d\theta \quad (7.115)$$

$$= \dot{\phi} \frac{1}{2} MR^2 \hat{k}. \quad (7.116)$$

Por su parte, el torque sobre la pizza es:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (7.117)$$

Recordemos que en esta expresión la suma es sobre todas las partículas que conforman el corte de pizza, y debe ser reemplazada por una integral si el sistema es continuo. Las fuerzas externas son la fuerza que ejerce el techo \vec{F}_{techo} sobre la punta de la pizza y la fuerza de gravedad $d\vec{F}_g = g dm (\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi})$ sobre cada trocito de masa dm . Dado que la punta está en el origen, \vec{F}_{techo} no participa del cálculo. Luego:

$$\vec{\tau} = g \int dm \vec{r} \times (\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}). \quad (7.118)$$

Notemos que, por definición, $\int dm \vec{r} = M\vec{r}_{\text{CM}}$. Luego, usando $dm = \sigma r dr d\theta$ con $\sigma = 2M/\alpha R^2$, vemos que la integral $\int dm \vec{r}$ adquiere la forma

$$\int dm \vec{r} = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R \frac{2M}{\alpha R^2} r (\cos\theta\hat{\rho} + \sin\theta\hat{\phi}) r dr d\theta. \quad (7.119)$$

Por simetría, vemos que el segundo término debe anularse (de modo que el centro de masas esté a lo largo de $\hat{\rho}$). Resolviendo:

$$\int dm\vec{r} = \frac{2M}{\alpha R^2} \hat{\rho} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (7.120)$$

$$= \frac{4MR}{3\alpha} \hat{\rho} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (7.121)$$

de donde sigue que

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{4R}{3\alpha} \hat{\rho} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (7.122)$$

En consecuencia, el torque finalmente resulta ser:

$$\vec{\tau} = \frac{4MgR}{3\alpha} \hat{\rho} \sin \frac{\alpha}{2} \times (\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}) \quad (7.123)$$

$$= -\frac{4MgR}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \phi \hat{k}. \quad (7.124)$$

Finalmente, usando $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{8g}{3\alpha R} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \phi = 0, \quad (7.125)$$

que es el resultado buscado.

Notemos que también podemos llegar a este resultado usando mecánica Lagrangiana. A partir de (7.112) vemos que la energía cinética dK de cada trocito de masa dm es $dK = \frac{dm}{2} r^2 \dot{\phi}^2$. Luego, la energía cinética total del corte de pizza es la suma debido a cada trocito $K = \int dK$, lo que da:

$$K = \frac{M}{\alpha R^2} \dot{\phi}^2 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R r^3 dr d\theta \quad (7.126)$$

$$= \frac{MR^2}{4} \dot{\phi}^2 \quad (7.127)$$

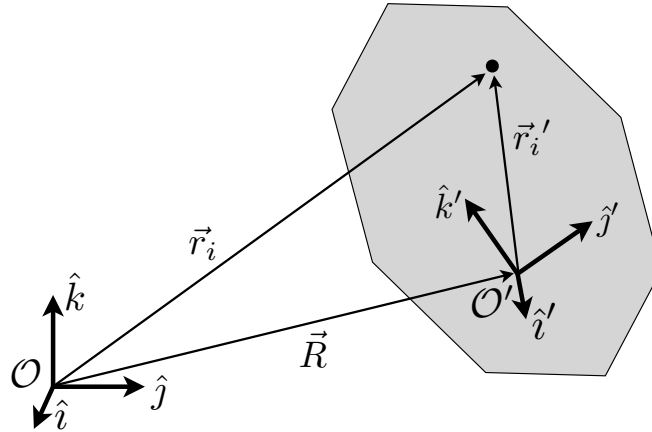
donde, una vez más, usamos $dm = \sigma r dr d\theta$ con $\sigma = 2M/\alpha R^2$. Por otro lado, usando (7.122) junto a (7.72), vemos que el potencial gravitacional debido a la pizza adquiere la forma $U_g = -Mg \frac{4R}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \phi$. Luego, el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{MR^2}{4} \dot{\phi}^2 + Mg \frac{4R}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \phi. \quad (7.128)$$

A partir de este resultado, es directo comprobar que la ecuación de Euler-Lagrange corresponde a (7.125).

7.9 Sólidos rígidos

Tanto la varilla del ejemplo 7.7.2 como el corte de pizza 7.8.4 corresponden a sólidos rígidos. Un sólido rígido es un conjunto de partículas cuyas posiciones relativas no cambia en el tiempo. Para describir un sólido rígido consideremos la situación general ilustrada en la siguiente figura:



En la figura, hay un sólido de masa total M con forma arbitraria, constituido por partículas de masas m_i (o dm en el caso continuo). Este sólido puede trasladarse y girar. Denotaremos como $\vec{\Omega}$ la velocidad angular con la cual el sólido gira, la que puede depender del tiempo. Para describir la posición de cada partícula, contamos con un origen \mathcal{O} y una base de vectores unitarios $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. De esta manera, las posición de la i -ésima partícula con respecto al origen fijo \mathcal{O} , viene determinada por el vector $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$. Diremos que el origen \mathcal{O} junto con la base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ forman un sistema de referencia \mathcal{S} .

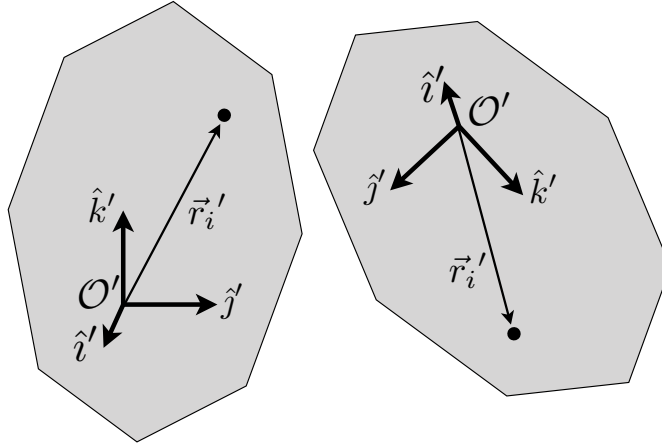
Alternativamente, podemos describir las posiciones de las partículas que forman el sólido con la ayuda de un segundo origen \mathcal{O}' , y una base de vectores unitarios $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$. El origen \mathcal{O}' denota a una partícula del sólido de nuestra elección (en realidad no es necesario que \mathcal{O}' corresponda a una partícula del sólido, pero por ahora esto no será importante). Por su parte, la base de vectores unitarios $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ es solidaria al sólido. Esto quiere decir, que si el sólido gira, la base girará junto con el sólido, con cada vector unitario apuntando en la misma dirección relativa al sólido. Aquí el origen \mathcal{O}' junto con la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ forman un sistema de referencia \mathcal{S}' . De acuerdo a lo dicho, el sólido tiene movimiento en el sistema de referencia \mathcal{S} , pero está

en reposo con respecto al sistema de referencia \mathcal{S}' .

Para proseguir, definamos \vec{r}_i' como la posición de la i -ésima partícula del sólido con respecto a \mathcal{O}' . Luego, si \vec{R} corresponde a la posición de \mathcal{O}' con respecto a \mathcal{O} , vemos que se debe cumplir:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'. \quad (7.129)$$

Notemos que la posición \vec{r}_i' de una partícula perteneciente al sólido puede ser escrita con la ayuda de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ de la siguiente manera $\vec{r}_i' = x_i' \hat{i}' + y_i' \hat{j}' + z_i' \hat{k}'$. Ahora viene una afirmación importante: Las coordenadas x_i' , y_i' y z_i' denotando la posición de la i -ésima partícula del sólido son constantes. Esto es porque, sin importar la manera en que el sólido esté orientado, el origen \mathcal{O}' es parte del sólido, y los vectores de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ siempre apuntan en las mismas direcciones relativas al sólido, tal como lo ilustra la siguiente figura:



Cuidado, la afirmación anterior no quiere decir que el vector \vec{r}_i' sea constante. Si el sólido gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$, los vectores $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ también girarán con la misma velocidad angular $\vec{\Omega}$, cambiando sus direcciones en el tiempo. Luego, en general, tendremos:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_i' = x_i' \frac{d}{dt} \hat{i}' + y_i' \frac{d}{dt} \hat{j}' + z_i' \frac{d}{dt} \hat{k}'. \quad (7.130)$$

Recordemos que la derivada temporal de un vector \vec{A} caracterizado por tener un módulo constante, debe respetar la relación (1.150) derivada en la sección 1.20:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{A} \quad (7.131)$$

donde $\vec{\omega}_A$ es la velocidad angular con la cual el vector \vec{A} gira. Esta relación debe ser válida para los vectores $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ con $\vec{\omega}_A = \vec{\Omega}$, que es la velocidad angular del sólido. Usando dicha relación en (7.130), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}'_i = \vec{\Omega} \times \vec{r}'_i. \quad (7.132)$$

Luego, a partir de (7.129), vemos que la velocidad \vec{v}_i de la i -ésima partícula del sólido, con respecto a \mathcal{O} , viene dada por

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_i. \quad (7.133)$$

Este resultado, junto con (7.129), nos permitirá derivar relaciones muy útiles para estudiar la dinámica de un sólido rígido.

7.9.1 Momento angular para un sólido rígido

Recordemos que el momento angular para un sistema de muchas partículas, con respecto al origen \mathcal{O} , viene dado por:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (7.134)$$

Usando las relaciones (7.129) y (7.133) obtenemos una expresión para el momento angular válida para un sólido rígido:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_i). \quad (7.135)$$

Expandiendo esta relación, es posible derivar:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\text{CM}}) + M \vec{r}'_{\text{CM}} \times \dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_i), \quad (7.136)$$

donde hicimos uso de las relaciones $M = \sum_i m_i$ y $\vec{r}'_{\text{CM}} = M^{-1} \sum_i m_i \vec{r}'_i$. Notemos que \vec{r}'_{CM} es la posición del centro de masas con respecto a \mathcal{O}' . El cuarto término de la relación (7.136) puede ser simplificado. Para lograrlo, hagamos uso de la relación vectorial $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$. Obtenemos:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_i) = \sum_i m_i \|\vec{r}'_i\|^2 \vec{\Omega} - \sum_i m_i \vec{r}'_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{\Omega}). \quad (7.137)$$

Para simplificar esta relación aun más, escribamos $\vec{r}_i' \cdot \vec{\Omega} = \vec{r}_i'^t \vec{\Omega}$, donde $\vec{r}_i'^t$ denota el vector transpuesto de \vec{r}_i' . Este detalle nos permite re-escribir la relación anterior como:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i') = \left[\sum_i m_i (|\vec{r}_i'|^2 \mathbb{I} - \vec{r}_i' \vec{r}_i'^t) \right] \vec{\Omega}, \quad (7.138)$$

donde \mathbb{I} denota la matriz unidad:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.139)$$

Notemos que el paréntesis cuadrado en (7.138) es una matriz de 3×3 actuando sobre el vector $\vec{\Omega}$. Debido a esto, definimos la llamada matriz de inercia (o tensor de inercia) con respecto al origen \mathcal{O}' :

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \sum_i m_i (|\vec{r}_i'|^2 \mathbb{I} - \vec{r}_i' \vec{r}_i'^t). \quad (7.140)$$

De esta manera, finalmente obtenemos

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i') = I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega}, \quad (7.141)$$

y el momento angular $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ para un sólido rígido con respecto al origen \mathcal{O} adquiere la forma

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\text{CM}}) + M \vec{r}'_{\text{CM}} \times \dot{\vec{R}} + I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega}. \quad (7.142)$$

Notemos que este resultado nos entrega el momento angular como función de la posición \vec{R} del origen \mathcal{O}' y la velocidad angular $\vec{\Omega}$. Las cantidades \vec{r}'_{CM} y $I_{\mathcal{O}'}$ describen propiedades del sólido que dependen de cómo están distribuidas las masas que lo conforman.

Recordemos que la posición del origen \mathcal{O}' depende de una elección arbitraria. Si elegimos que \mathcal{O}' coincida con el centro de masas ($\mathcal{O}' = \text{CM}$), entonces $\vec{r}'_{\text{CM}} = 0$, $\vec{R} = \vec{r}_{\text{CM}}$, y $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_{\text{CM}}$, con lo cual (7.142) se reduce a

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = M \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + I_{\text{CM}} \vec{\Omega}. \quad (7.143)$$

Por otro lado, si uno de los puntos del sólido siempre está fijo, entonces podemos hacer coincidir dicho punto con \mathcal{O} y \mathcal{O}' , entonces $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = 0$, y obtenemos

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}. \quad (7.144)$$

Esta expresión es particularmente útil para estudiar péndulos con soportes en \mathcal{O} (ver sección 7.15).

7.10 Matriz de inercia

Dediquemos un momento a la matriz de inercia definida en (7.140). Si escribimos el vector posición para la i -ésima partícula de la forma $\vec{r}_i' = x_i'\hat{i}' + y_i'\hat{j}' + z_i'\hat{k}'$, entonces, vemos que $\|\vec{r}_i'\|^2 = (x_i')^2 + (y_i')^2 + (z_i')^2$. Por otro lado $\vec{r}_i'\vec{r}_i'^t$ corresponde a la matriz:

$$\vec{r}_i'\vec{r}_i'^t = \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' & y_i' & z_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_i')^2 & x_i'y_i' & x_i'z_i' \\ y_i'x_i' & (y_i')^2 & y_i'z_i' \\ z_i'x_i' & z_i'y_i' & (z_i')^2 \end{pmatrix}. \quad (7.145)$$

Luego, vemos que la matriz de inercia tiene la forma

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \sum_i m_i \begin{pmatrix} (y_i')^2 + (z_i')^2 & -x_i'y_i' & -x_i'z_i' \\ -y_i'x_i' & (x_i')^2 + (z_i')^2 & -y_i'z_i' \\ -z_i'x_i' & -z_i'y_i' & (x_i')^2 + (y_i')^2 \end{pmatrix}. \quad (7.146)$$

Esta es una matriz simétrica. En el caso en que estemos lidiando con un sólido rígido continuo, podemos hacer los reemplazos $\sum_i \rightarrow \int$, $m_i \rightarrow dm$ y $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$. En tal caso, obtenemos

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} dm. \quad (7.147)$$

Por supuesto, debemos recordar usar $dm = \lambda ds'$ en el caso en que estemos lidiando con un sólido lineal (por ejemplo, un alambre), $dm = \sigma dA'$ en el caso en que estemos lidiando con una superficie sólida, y $dm = \rho dV'$ si estamos lidiando con un sólido con volumen.

Si quisiéramos, podríamos diagonalizar $I_{\mathcal{O}'}$. Esto quiere decir que existe una base de vectores $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ para la cual $I_{\mathcal{O}'}$ es diagonal. Supongamos que comenzamos con una base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ para la cual $I_{\mathcal{O}'}$ no es diagonal (pues no siempre es fácil anticipar cual es la mejor base para describir un sólido rígido), y nos proponemos buscar una nueva base $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ para la cual $I_{\mathcal{O}'}$ resulta ser diagonal. Entonces, para buscar dicha base debemos resolver el problema de valores propios

$$I_{\mathcal{O}'}\vec{e}_a = I_a\vec{e}_a. \quad (7.148)$$

Los vectores propios \vec{e}_a normalizados serán ni más ni menos los elementos de la base $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ que buscamos. Por otro lado, los valores propios I_a serán los elementos diagonales de $I_{\mathcal{O}'}$. A dichos elementos se le denomina momentos de inercia.

Debido a que estudiaremos sólidos rígidos sencillos, para los cuales es fácil anticipar la base de vectores unitarios adecuados para describirlos, no nos dedicaremos a diagonalizar matrices de inercia en estos apuntes. Sin embargo, es posible anticipar de manera general que los momentos de inercia son siempre positivos. Recordemos que una matriz A es definida positiva (sus valores propios son positivos) si y solo si $\vec{V}^t A \vec{V} > 0$ para todo vector \vec{V} no nulo. Luego, para mostrar que $I_{\mathcal{O}'}$ tiene momentos de inercia positivos, consideremos la combinación $\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega}$ y mostremos que es siempre positiva. En primer lugar, gracias a (7.141), podemos escribir:

$$\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega} = \sum_i m_i \vec{\Omega} \cdot \left[\vec{r}_i' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i') \right]. \quad (7.149)$$

Ahora, si consideramos la identidad vectorial $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ con $\vec{A} = \vec{\Omega}$, $\vec{B} = \vec{r}_i'$ y $\vec{C} = (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i')$, vemos que

$$\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega} = \sum_i m_i (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i') \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i') \quad (7.150)$$

$$= \sum_i m_i \|\vec{\Omega} \times \vec{r}_i'\|^2 > 0. \quad (7.151)$$

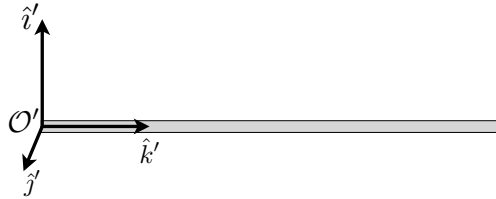
Dado que esta relación es válida para cualquier velocidad angular $\vec{\Omega}$, vemos que efectivamente es siempre positivo $\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega}$, lo que demuestra que los momentos de inercia son todos positivos.

7.11 Ejemplos de matrices de inercia

Veamos ahora algunos ejemplos sencillos de sólidos rígidos para los cuales las matrices de inercia son sencillas de calcular.

7.11.1 Varilla homogénea (con respecto a un extremo)

Comencemos calculando el tensor de inercia de una varilla homogénea de largo L y masa M , con respecto a su extremo. Utilicemos la base de vectores unitarios orientados tal como lo muestra la siguiente figura:



La densidad de masa lineal es simplemente $\lambda = M/L$. Notemos que las partículas que forman la varilla están todas extendidas a lo largo del eje z' y, por lo tanto todas tienen en común $x' = y' = 0$. Luego, usando usando $dm = \lambda dz'$, donde z' es la coordenada a lo largo de la dirección \hat{k} , vemos que la expresión (7.147) adquiere la forma:

$$I_{O'} = \frac{M}{L} \int_0^L \begin{pmatrix} (z')^2 & 0 & 0 \\ 0 & (z')^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dz'. \quad (7.152)$$

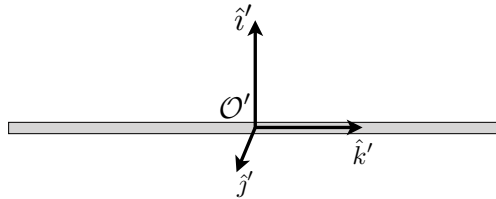
Integrando cada elemento de la matriz distinta de 0 vemos que:

$$I_{O'} = \frac{ML^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.153)$$

El resultado es diagonal, por lo que vemos que los 3 momentos de inercia son $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{3}ML^2$ y $I_{zz} = 0$.

7.11.2 Varilla homogénea (con respecto a su centro de masas)

Calculemos ahora la matriz de inercia con respecto a su centro de masas, con los vectores base orientados como lo muestra la figura:



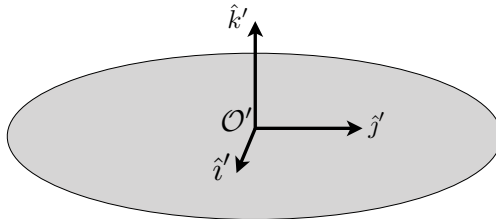
En este caso lo único que cambia con respecto al ejemplo anterior son los límites de integración. En esta ocasión obtenemos:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \begin{pmatrix} (z')^2 & 0 & 0 \\ 0 & (z')^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dz' = \frac{1}{12} ML^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.154)$$

Es decir, los 3 momentos de inercia son $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} ML^2$ y $I_{zz} = 0$.

7.11.3 Disco (con respecto a su centro de masas)

Consideremos ahora un disco homogéneo de radio R y masa M con vectores bases orientados de la siguiente forma:



En este caso todas las partículas que forman parte del disco comparten la posición $z' = 0$. Luego, de acuerdo a (7.147), la matriz de inercia debe tener la forma:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{\pi R^2} \int \begin{pmatrix} (y')^2 & -x'y' & 0 \\ -y'x' & (x')^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} dA', \quad (7.155)$$

donde usamos $dm = \sigma dA$ con $\sigma = M/\pi R^2$. Para recorrer el disco a través de la integración, utilicemos coordenadas cilíndricas $x' = \rho' \cos \phi'$, e $y' = \rho' \sin \phi'$. En dicho caso, el elemento de área dA' se escribe como $dA' = \rho' d\rho' d\phi'$.

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \begin{pmatrix} (\rho')^2 \sin^2 \phi' & -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & 0 \\ -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & (\rho')^2 \cos^2 \phi' & 0 \\ 0 & 0 & (\rho')^2 \end{pmatrix} \rho' d\rho' d\phi'. \quad (7.156)$$

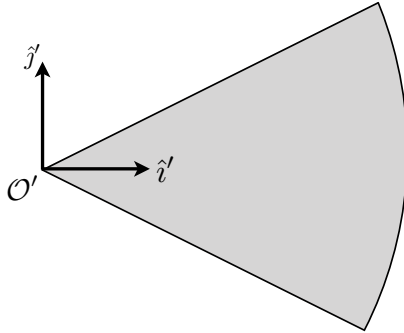
Integrando esta expresión, finalmente obtenemos

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{4} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7.157)$$

Es decir, los 3 momentos de inercia son $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2$ y $I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2$.

7.11.4 Corte de pizza (con respecto a la punta)

Dado que ya tenemos cierta experiencia con pizzas, calculemos el tensor de inercia de el siguiente corte de pizza con vectores bases orientados de la siguiente forma:



En este caso podemos usar la expresión (7.156) cambiando los límites de integración:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{\pi R^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R \begin{pmatrix} (\rho')^2 \sin^2 \phi' & -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & 0 \\ -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & (\rho')^2 \cos^2 \phi' & 0 \\ 0 & 0 & (\rho')^2 \end{pmatrix} \rho' d\rho' d\phi'. \quad (7.158)$$

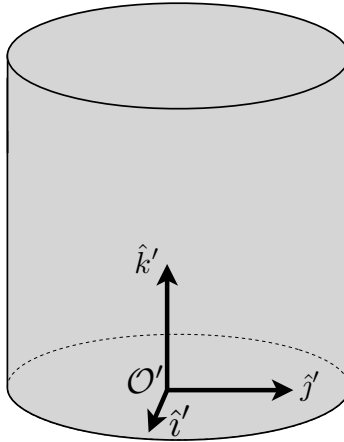
Integrando esta expresión, obtenemos

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{4\pi} R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha - \sin \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha + \sin \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (7.159)$$

En definitiva, los 3 momentos de inercia son $I_{xx} = \frac{1}{8\pi} MR^2(\alpha - \sin \alpha)$, $I_{yy} = \frac{1}{8\pi} MR^2(\alpha + \sin \alpha)$ y $I_{zz} = \frac{1}{4\pi} MR^2\alpha$. Podemos ver que cuando $\alpha = 2\pi$ re-obtenemos el resultado del disco analizado en el ejemplo anterior.

7.11.5 Cilindro (con respecto a su base)

Consideremos ahora un cilindro de radio R y altura L . Ubiquemos el origen en su base inferior, y orientemos los vectores base tal como lo muestra la siguiente figura:



Usando $dm = \rho dV$ con $\rho = M/L\pi R^2$, y $dV = \rho' d\rho' d\phi' dz'$, e integrando con coordenadas cilíndricas, $x' = \rho' \cos \phi'$, $y' = \rho' \sin \phi'$ y z' , la expresión (7.155) adquiere la

forma:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{L\pi R^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \begin{pmatrix} (\rho')^2 \sin^2 \phi' + (z')^2 & -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & -z' \rho' \cos \phi' \\ -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & (\rho')^2 \cos^2 \phi' + (z')^2 & -z' \rho' \sin \phi' \\ -z' \rho' \cos \phi' & -z' \rho' \sin \phi' & (\rho')^2 \end{pmatrix} \rho' d\rho' d\phi' dz'. \quad (7.160)$$

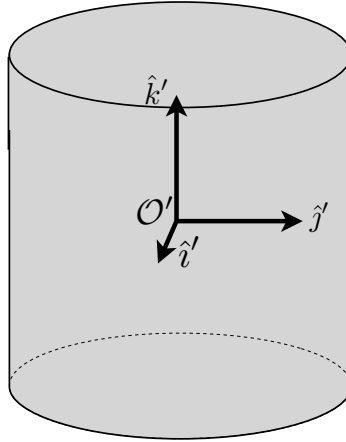
Integrando, finalmente obtenemos

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}, \quad (7.161)$$

y por lo tanto, los momentos de inercia son $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}M(3R^2 + 4L^2)$ y $I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2$. Notemos que en el límite $R \rightarrow 0$, re-obtenemos el tensor de inercia de una varilla con respecto a su extremo. Por otro lado, en el límite $L \rightarrow 0$ re-obtenemos el tensor de inercia de un disco a partir de su centro de masas.

7.11.6 Cilindro (con respecto a su centro de masas)

Consideremos ahora el caso de un cilindro homogéneo con el origen ubicado en su centro de masas:



Este caso es idéntico al caso anterior, excepto por los límites de integración:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{L\pi R^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \begin{pmatrix} (\rho')^2 \sin^2 \phi' + (z')^2 & -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & -z' \rho' \cos \phi' \\ -(\rho')^2 \cos \phi' \sin \phi' & (\rho')^2 \cos^2 \phi' + (z')^2 & -z' \rho' \sin \phi' \\ -z' \rho' \cos \phi' & -z' \rho' \sin \phi' & (\rho')^2 \end{pmatrix} \rho' d\rho' d\phi' dz'. \quad (7.162)$$

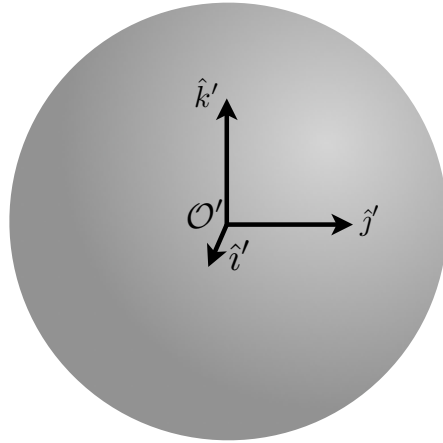
Luego, al integrar, obtenemos

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}, \quad (7.163)$$

de donde vemos que los momentos de inercia son $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}M(3R^2 + 4L^2)$ y $I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2$. Notemos que al tomar el límite $R \rightarrow 0$, obtenemos el tensor de inercia de una varilla con respecto a su centro de masas.

7.11.7 Esfera (con respecto a su centro de masas)

Por último, consideremos una esfera homogénea de radio R y masa M , con el origen ubicado en su centro de masas:



En este caso conviene usar coordenadas esféricas $x' = r' \sin \theta' \cos \phi'$, $y' = r' \sin \theta' \sin \phi'$ y $z' = r' \cos \theta'$. Usando $dm = \rho dV'$ con $\rho = 3M/4\pi R^3$ y $dV' = (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$ en la ecuación (7.147), obtenemos:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \Theta (r')^4 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi', \quad (7.164)$$

donde Θ corresponde a la siguiente matriz:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' + \cos^2 \theta' & -\sin^2 \theta' \cos \phi' \sin \phi' & -\sin \theta' \cos \theta \cos \phi' \\ -\sin^2 \theta' \cos \phi' \sin \phi' & \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' + \cos^2 \theta' & -\sin \theta' \cos \theta \sin \phi' \\ -\sin \theta' \cos \theta \cos \phi' & -\sin \theta' \cos \theta \sin \phi' & \sin^2 \theta' \end{pmatrix}. \quad (7.165)$$

Dada la simetría de la esfera, es fácil anticipar que todos los elementos serán nulos con excepción de los elementos de la diagonal. Adicionalmente, estos deben ser todos iguales. Luego, basta con realizar una sola integral (por ejemplo, aquella correspondiente al elemento I_{zz}), para obtener:

$$I_{\mathcal{O}'} = \frac{2}{5}MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.166)$$

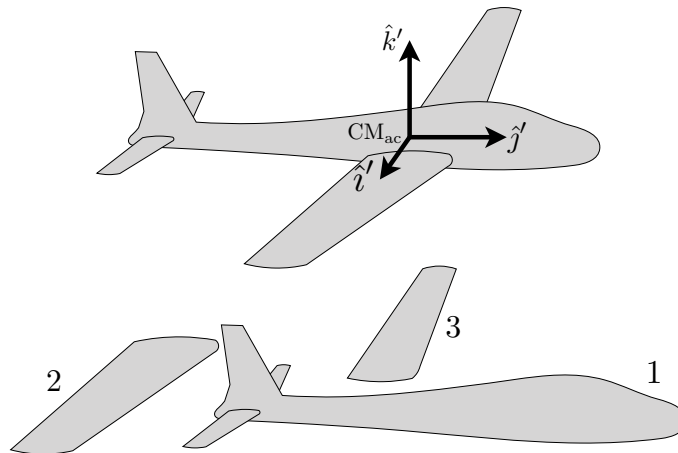
7.12 Suma de matrices de inercia

La definición de matriz de inercia (7.140) consiste en una suma. Esto quiere decir que podemos calcular la matriz de inercia de un sólido rígido compuesto a partir de las matrices de inercia de aquellos sólidos que lo componen. Es decir, si tenemos un sólido rígido dado A construido a partir de dos sólidos rígidos B y C , entonces

$$I_{\mathcal{O}'}^A = I_{\mathcal{O}'}^B + I_{\mathcal{O}'}^C. \quad (7.167)$$

Notemos que esta suma es válida sólo si cada matriz de inercia está calculada con respecto al mismo origen \mathcal{O}' .

Veamos un ejemplo. La siguiente figura muestra un avión ensamblado a partir de tres componentes: El cuerpo (sólido rígido 1), la ala derecha (sólido rígido 2) y la ala izquierda (sólido rígido 3).

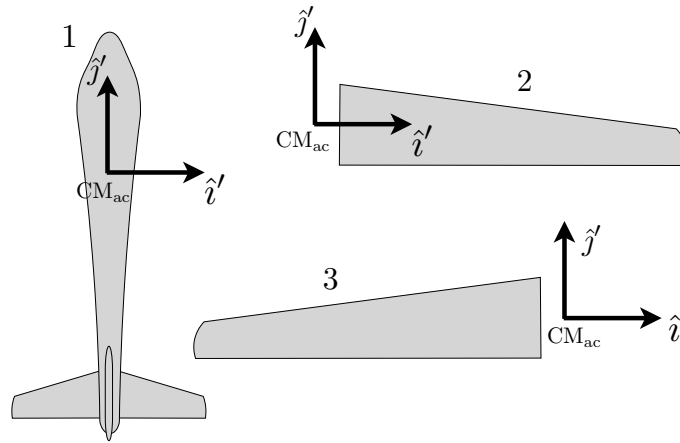


Entonces, la matriz de inercia del avión completo con respecto a cierto origen (digamos el centro de masas CM_{ac} del avión completo) puede ser escrita como la suma de las

matrices de inercia de las tres piezas que lo componen:

$$I_{\text{CM}_{\text{ac}}} = I_{\text{CM}_{\text{ac}}}^1 + I_{\text{CM}_{\text{ac}}}^2 + I_{\text{CM}_{\text{ac}}}^3. \quad (7.168)$$

Claramente, el punto CM_{ac} no es el centro de masas de las alas (tampoco es necesariamente el centro de masas del cuerpo). Aún así, para que la suma sea válida, debemos cerciorarnos de contar con la matriz de inercia de cada pieza calculada con respecto a CM_{ac} , que siempre está en la misma posición relativa a la pieza en cuestión, tal como lo muestra la siguiente figura:



7.13 Teorema de Steiner

Digamos que queremos construir el avión del ejemplo anterior a partir de las tres piezas, y deseamos conocer la matriz de inercia del avión completo. Sin embargo, los fabricantes de cada pieza no nos informan la matriz de inercia con respecto al centro de masas CM_{ac} del avión completo. En lugar de eso, nos entregan la matriz de inercia con respecto al centro de masas de cada pieza por separado. El teorema de Steiner resuelve este problema. Para derivar el teorema, comencemos por recordar la definición (7.140) de matriz de inercia:

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \sum_i m_i (|\vec{r}_i'|^2 \mathbb{I} - \vec{r}_i' \vec{r}_i'^t). \quad (7.169)$$

Ahora escribamos cada posición \vec{r}_i' en términos de la posición del centro de masas \vec{r}'_{CM} de la siguiente forma:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}'_{\text{CM}} + \vec{\rho}_i', \quad (7.170)$$

donde $\vec{\rho}_i'$ es la posición de la i -ésima partícula con respecto al centro de masas. Esta definición coincide con la definición de los vectores $\vec{\rho}_i$ hecha en la ecuación (7.30), por lo que, si lo deseáramos, podemos escribir $\vec{\rho}_i' = \vec{\rho}_i$. De paso, esto significa que $\sum_i m_i \vec{\rho}_i' = 0$. Reemplazando (7.170) en (7.169) obtenemos

$$I_{\mathcal{O}'} = \sum_i m_i [|\vec{r}'_{\text{CM}} + \vec{\rho}_i'|^2 \mathbb{I} - (\vec{r}'_{\text{CM}} + \vec{\rho}_i')(\vec{r}'_{\text{CM}} + \vec{\rho}_i')^t]. \quad (7.171)$$

Expandiendo este resultado, y haciendo uso de $\sum_i m_i \vec{\rho}_i' = 0$, finalmente obtenemos el teorema de Steiner

$$I_{\mathcal{O}'} = I_{\text{CM}} + M_{\text{tot}} \left[|\vec{r}'_{\text{CM}}|^2 \mathbb{I} - \vec{r}'_{\text{CM}} \vec{r}'_{\text{CM}}{}^t \right], \quad (7.172)$$

donde I_{CM} es la matriz de inercia calculada a partir del centro de masas del sólido rígido. Este resultado nos permite conocer la matriz de inercia $I_{\mathcal{O}'}$ de un sólido rígido con respecto a cualquier origen \mathcal{O}' a partir de la matriz de inercia I_{CM} con respecto de su centro de masas. Para ello, basta conocer la masa total del sólido, y la posición \vec{r}'_{CM} del centro de masas con respecto a \mathcal{O}' .

7.14 Energía cinética de un sólido rígido

Recordemos que la energía cinética para un sistema de varias partículas viene dada por:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2. \quad (7.173)$$

Podemos derivar una expresión más específica para sólidos rígidos usando la relación (7.133), que nos dice que $\vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i'$. Reemplazando esta forma para \vec{v}_i en (7.173), vemos que:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i' \right)^2. \quad (7.174)$$

Expandiendo esta expresión, obtenemos

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\text{CM}}) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i')^2. \quad (7.175)$$

El último término ya lo conocemos. Recordemos que en la ecuación (7.151) encontramos que $\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega} = \sum_i m_i (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i')^2$. Luego, la energía cinética para un sólido rígido viene dada por:

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\text{CM}}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'} \vec{\Omega}. \quad (7.176)$$

Notemos que en el caso particular en que \mathcal{O}' coincide con el centro de masas ($\mathcal{O}' = \text{CM}$), entonces $\vec{r}'_{\text{CM}} = 0$, $\vec{R} = \vec{r}_{\text{CM}}$, y $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_{\text{CM}}$, con lo cual la energía cinética adquiere la forma:

$$K = \frac{1}{2}M\vec{v}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\text{CM}} \vec{\Omega}. \quad (7.177)$$

Por otro lado, si uno de los puntos del sólido siempre está fijo, entonces podemos hacer coincidir dicho punto con \mathcal{O} y \mathcal{O}' , entonces $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = 0$, y obtenemos

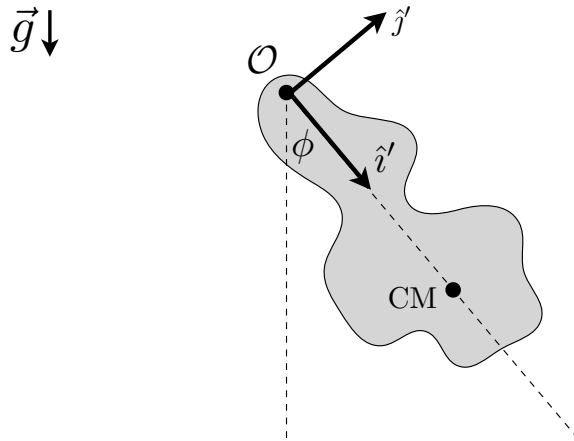
$$K = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}. \quad (7.178)$$

7.15 Sólidos rígidos pendulares

Un péndulo construido a partir de un sólido rígido plano puede ser estudiado fácilmente utilizando matrices de inercia. Comencemos por considerar el caso de un péndulo confinado a un plano.

7.15.1 Péndulos planos

En este caso, el eje de rotación del péndulo necesariamente pasará por un punto fijo del sólido. Tal como lo hemos señalado con anterioridad, en este caso conviene hacer coincidir los orígenes \mathcal{O} y \mathcal{O}' con dicho punto, tal como lo muestra la siguiente figura:



Para describir este péndulo, elijamos como coordenada ϕ al ángulo entre el eje vertical, el vector posición \vec{r}_{MC} del centro de masas, y denotemos la distancia desde el origen al centro de masas como L (es decir $\|\vec{r}_{\text{MC}}\| = L$). Además, elijamos convenientemente

a los elementos de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ fijos al sólido, como los de la figura (notemos que estos coinciden con la base cilíndrica habitual $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$). La velocidad angular del sólido puede ser escrita como

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{k} = \dot{\phi} \hat{k}'. \quad (7.179)$$

Para proceder, debemos contar con la matriz de inercia $I_{\mathcal{O}}$ del sólido rígido con respecto al punto fijo \mathcal{O} . Si en lugar de conocer $I_{\mathcal{O}}$, conociéramos I_{CM} , bastará aplicar el teorema de Steiner para obtener $I_{\mathcal{O}}$. En términos de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, la relación entre $I_{\mathcal{O}}$ y I_{CM} será:

$$I_{\mathcal{O}} = I_{\text{CM}} + M_{\text{tot}} L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.180)$$

Independiente de esto, notemos que, dado que el sólido es plano, todas las partículas del sólido tendrán en común una posición con $z'_i = 0$. Gracias a (7.146), esto quiere decir que $I_{\mathcal{O}}$ tendrá la forma

$$I_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (7.181)$$

Supongamos que conocemos $I_{\mathcal{O}}$ (o por lo menos conocemos I_{33}). Luego, a partir de (7.144) vemos que el momento angular será

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} I_{33} \end{pmatrix} = \dot{\phi} I_{33} \hat{k}'. \quad (7.182)$$

Por otro lado, gracias a la ecuación (7.29), el torque con respecto al origen, actuando sobre el sólido, es

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = -M_{\text{tot}} g L \sin \phi \hat{k}'. \quad (7.183)$$

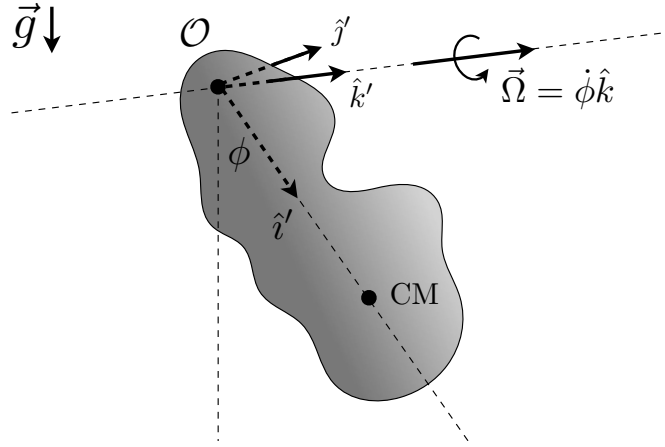
Luego, usando $d\vec{L}_{\mathcal{O}}/dt = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}$, finalmente obtenemos:

$$\ddot{\phi} + \frac{M_{\text{tot}} g L}{I_{33}} \sin \phi = 0. \quad (7.184)$$

Luego, la frecuencia para pequeñas oscilaciones es $\omega_0 = \sqrt{M_{\text{tot}} g L / I_{33}}$. Notemos que si el sólido consiste en una sola partícula de masa M , entonces necesariamente $I_{\text{CM}} = 0$. Luego (7.180) nos dice que $I_{33} = M L^2$, y por lo tanto $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, resultado que ya conocemos bien.

7.15.2 Péndulos con volumen

¿Qué pasa si un péndulo tiene volumen? En dichos casos, el eje de rotación atravesará el sólido, y por lo tanto éste contendrá múltiples puntos fijos (a lo largo del eje de rotación), tal como lo muestra la siguiente figura:



Al igual que en el caso de péndulos planos, hemos hecho coincidir los elementos de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ fija al sólido con los de la base cilíndrica $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$, de modo que el eje de rotación coincide con el vector unitario \hat{k}' . De este modo:

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{k}. \quad (7.185)$$

Para proceder, podemos elegir como origen \mathcal{O} a aquel punto fijo a partir del cual el vector describiendo la posición del centro de masas adquiere la forma $\vec{r}_{\text{CM}} = L \hat{i}'$ (podría ocurrir que \mathcal{O} quedara fuera del sólido, pero eso no tendría importancia). En esta ocasión, dado que el péndulo no es plano, la matriz de inercia tendrá la forma general:

$$I_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{12} & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (7.186)$$

Luego, a partir de (7.144) vemos que el momento angular será

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{12} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \dot{\phi} (I_{31} \hat{\rho} + I_{32} \hat{\phi} + I_{33} \hat{k}). \quad (7.187)$$

Otra distinción importante con respecto a los péndulos planos es que el torque que el eje ejerce sobre el sólido no será nulo. Esto se debe a que el eje intercepta al sólido en más de un punto, y por lo tanto siempre habrá una distancia entre estos puntos de contacto y el origen \mathcal{O} . Por otro lado, dado que la posición de cualquier punto del sólido interceptado por el eje es proporcional a \hat{k} , entonces el torque $\vec{\tau}_{\text{eje}}$ debido a las fuerzas que ejerce el eje sobre el sólido necesariamente será perpendicular a \hat{k} . Esto quiere decir que

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{eje}} = \tau_{\rho}^{\text{eje}} \hat{\rho} + \tau_{\phi}^{\text{eje}} \hat{\phi}. \quad (7.188)$$

De esta manera, el torque total sobre el sólido es:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = -M_{\text{tot}}gL \sin \phi \hat{k} + \tau_{\rho}^{\text{eje}} \hat{\rho} + \tau_{\phi}^{\text{eje}} \hat{\phi}. \quad (7.189)$$

En consecuencia, usando $d\vec{L}_{\mathcal{O}}/dt = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}$, finalmente obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\phi} (I_{31} \hat{\rho} + I_{32} \hat{\phi} + I_{33} \hat{k}) \right) = -M_{\text{tot}}gL \sin \phi \hat{k} + \tau_{\rho}^{\text{eje}} \hat{\rho} + \tau_{\phi}^{\text{eje}} \hat{\phi}. \quad (7.190)$$

Notemos que debemos derivar los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$. Esto nos da

$$\ddot{\phi} (I_{31} \hat{\rho} + I_{32} \hat{\phi} + I_{33} \hat{k}) + \dot{\phi}^2 (I_{31} \hat{\phi} - I_{32} \hat{\rho}) = -M_{\text{tot}}gL \sin \phi \hat{k} + \tau_{\rho}^{\text{eje}} \hat{\rho} + \tau_{\phi}^{\text{eje}} \hat{\phi}. \quad (7.191)$$

Luego, igualando las componentes correspondiente a cada elemento de la base, obtenemos las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$\tau_{\rho}^{\text{eje}} = \ddot{\phi} I_{31} - \dot{\phi}^2 I_{32}, \quad (7.192)$$

$$\tau_{\phi}^{\text{eje}} = \ddot{\phi} I_{32} + \dot{\phi}^2 I_{31}, \quad (7.193)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{M_{\text{tot}}gL}{I_{33}} \sin \phi = 0. \quad (7.194)$$

La tercera ecuación nos entrega la ecuación de movimiento del péndulo, que coincide con la ecuación de movimiento para péndulos planos derivada en la sección anterior. Por otro lado, las primeras dos ecuaciones nos entrega expresiones para las componentes del torque $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{eje}}$ que ejerce el eje sobre el péndulo. Por lo tanto, integrando las ecuaciones de movimiento, podemos deducir un expresión para $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{eje}}$ en función del ángulo ϕ . Es importante consignar que, dependiendo de la geometría del sólido rígido, un péndulo con volumen también puede ser tal que $I_{31} = I_{32} = 0$. En dicho caso, el eje no ejerce torque sobre el péndulo.

7.15.3 Lagrangiano para un péndulo

Consideremos ahora el desafío de obtener un lagrangiano para describir el movimiento de un sólido rígido pendular. Insertando (7.186) y (7.185) en la expresión (7.178), es directo constatar que la energía cinética viene dada por $I_{33}\dot{\phi}^2/2$. Luego, en conjunto con la energía potencial gravitacional de la expresión (7.72), válida para un sistema de muchas de partículas, vemos que el Lagrangiano de un péndulo constituido por un sólido rígido es

$$L = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\phi}^2 + M_{\text{tot}}gL \cos \phi. \quad (7.195)$$

Luego, usando la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos directamente:

$$\ddot{\phi} + \frac{M_{\text{tot}}gL}{I_{33}} \sin \phi = 0, \quad (7.196)$$

coincidiendo con las expresiones (7.184) y (7.194) previamente derivadas.

7.16 Suma de velocidades angulares

Para estudiar un sólido rígido en movimiento, a veces es conveniente introducir más de un sistema de referencia rotando. Supongamos que, aparte del sistema de referencia fijo \mathcal{S} y el sistema solidario al sólido \mathcal{S}' , contamos con un tercer sistema de referencia \mathcal{S}'' (constituido por el origen \mathcal{O}' y la base $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$). Notemos que este sistema de referencia comparte el origen \mathcal{O}' , pero las bases $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ no necesariamente están fijas con respecto al sólido. Digamos que la velocidad angular de \mathcal{S}' con respecto a \mathcal{S} es $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}}$, que la velocidad angular de \mathcal{S}'' con respecto a \mathcal{S} es $\vec{\Omega}''_{\mathcal{S}}$ y que la velocidad angular de \mathcal{S}' con respecto a \mathcal{S}'' es $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''}$. Esto quiere decir que la velocidad angular del sólido con respecto a \mathcal{S} es $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}}$, mientras que su velocidad angular con respecto a \mathcal{S}'' es $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''}$.

¿Cómo se relacionan las velocidades angulares $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}}$, $\vec{\Omega}''_{\mathcal{S}}$ y $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''}$. Para responder a esta pregunta, recordemos que los vectores unitarios de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ satisfacen

$$\frac{d}{dt}\hat{i}' = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}} \times \hat{i}', \quad \frac{d}{dt}\hat{j}' = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}} \times \hat{j}', \quad \frac{d}{dt}\hat{k}' = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}} \times \hat{k}'. \quad (7.197)$$

Igualmente, los elementos de la base $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ satisfacen:

$$\frac{d}{dt}\hat{i}'' = \vec{\Omega}''_{\mathcal{S}} \times \hat{i}'', \quad \frac{d}{dt}\hat{j}'' = \vec{\Omega}''_{\mathcal{S}} \times \hat{j}'', \quad \frac{d}{dt}\hat{k}'' = \vec{\Omega}''_{\mathcal{S}} \times \hat{k}''. \quad (7.198)$$

Por otro lado, siempre podemos expresar los elementos de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ en términos de la base $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$. Por ejemplo, podemos escribir \hat{i}' como:

$$\hat{i}' = \alpha \hat{i}'' + \beta \hat{j}'' + \gamma \hat{k}'' . \quad (7.199)$$

Dado que las bases $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ y $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ giran con velocidades angulares distintas, las cantidades α, β, γ dependen del tiempo. Luego, derivando con respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{d}{dt} \hat{i}' = \dot{\alpha} \hat{i}'' + \dot{\beta} \hat{j}'' + \dot{\gamma} \hat{k}'' + \vec{\Omega}''_S \times \hat{i}' . \quad (7.200)$$

Notemos que α, β, γ son las componentes \hat{i}' con respecto al sistema \mathcal{S}'' . Esto quiere decir que $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ son las derivadas temporales de las componentes de \hat{i}' con respecto al sistema \mathcal{S}'' . Es decir, podemos escribir

$$\dot{\alpha} \hat{i}'' + \dot{\beta} \hat{j}'' + \dot{\gamma} \hat{k}'' = \left(\frac{d}{dt} \hat{i}' \right)_{\mathcal{S}''} , \quad (7.201)$$

donde $\left(\frac{d}{dt} \hat{i}' \right)_{\mathcal{S}''}$ denota la derivada temporal de \hat{i}' con respecto a \mathcal{S}'' . Pero sabemos que el vector \hat{i}' gira con velocidad angular $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''}$. Esto quiere decir que

$$\left(\frac{d}{dt} \hat{i}' \right)_{\mathcal{S}''} = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''} \times \hat{i}' . \quad (7.202)$$

Usando este resultado de regreso en (7.200), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \hat{i}' = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''} \times \hat{i}' + \vec{\Omega}''_S \times \hat{i}' = \left(\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''} + \vec{\Omega}''_S \right) \times \hat{i}' . \quad (7.203)$$

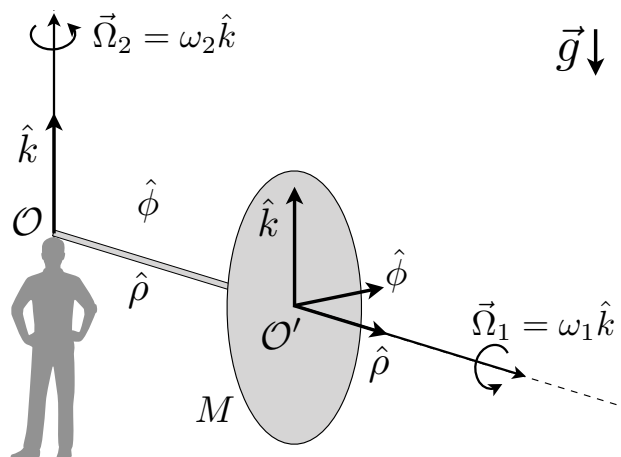
Por supuesto, los vectores unitarios \hat{j}' y \hat{k}' cumplen las mismas relaciones. Comparando este resultado con (7.197) finalmente obtenemos el resultado buscado:

$$\vec{\Omega}'_S = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}''} + \vec{\Omega}''_S . \quad (7.204)$$

Esta relación nos enseña cómo sumar velocidades angulares.

7.16.1 Ejemplo

Para apreciar la relevancia de la regla de suma de velocidades, consideremos el siguiente ejemplo: Un trompo consistente en un disco homogéneo de radio R y masa M adherido al extremo de una varilla de largo L y masa despreciable (ver figura). El extremo de la varilla descansa sobre un soporte en el origen \mathcal{O} (por ejemplo, la cabeza de un profesor, de preferencia calvo). Como veremos, es posible poner a girar el trompo de tal forma que la varilla siempre permanezca horizontal, aun con la presencia de la gravedad.



Tal como lo muestra la figura, alineemos la varilla (y por lo tanto el eje de simetría del trompo) con el vector unitario $\hat{\rho}$ de la base cilíndrica. El trompo gira en torno al eje $\hat{\rho}$ con velocidad angular $\vec{\Omega}_1 = \omega_1 \hat{\rho}$. Al mismo tiempo, anticipemos la posibilidad de que el eje $\hat{\rho}$ pueda girar en torno al eje \hat{k} con una velocidad angular $\vec{\Omega}_2 = \omega_2 \hat{k}$. A continuación mostraremos que hay valores de ω_1 y ω_2 constantes para los cuales la varilla permanece horizontal.

Como primer paso, debemos determinar la velocidad angular $\vec{\Omega}_{\text{disco}}$ del disco. Llamemos \mathcal{S} al sistema en reposo con origen \mathcal{O} , \mathcal{S}' al sistema solidario al disco con su origen \mathcal{O}' coincidiendo con el centro del disco, y \mathcal{S}'' al sistema constituido por el origen \mathcal{O}' y la base cilíndrica $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$. Luego, la velocidad angular $\vec{\Omega}_{\text{disco}}$ buscada corresponde a la velocidad angular $\vec{\Omega}'_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S}' con respecto al sistema fijo \mathcal{S} . Es decir

$$\vec{\Omega}_{\text{disco}} = \vec{\Omega}'_{\mathcal{S}}. \quad (7.205)$$

Por otro lado, sabemos que el disco gira en torno al eje $\hat{\rho}$ con velocidad angular

$\vec{\Omega}_1 = \omega_1 \hat{\rho}$. Esto quiere decir que:

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}'_{S''}. \quad (7.206)$$

Al mismo tiempo, el vector unitario $\hat{\rho}$ gira en torno a \hat{k} con velocidad angular $\vec{\Omega}_2 = \omega_2 \hat{k}$. Esto quiere decir que:

$$\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}''_S. \quad (7.207)$$

En definitiva, a partir de la ecuación (7.204), vemos que la velocidad angular del disco corresponde a la suma:

$$\vec{\Omega}_{\text{disco}} = \omega_1 \hat{\rho} + \omega_2 \hat{k}. \quad (7.208)$$

Con este resultado, calculemos el momento angular del disco con respecto a \mathcal{O} . El centro de masas del disco coincide con el origen \mathcal{O}' . Por lo que podemos usar la ecuación (7.143):

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = M \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + I_{\text{CM}} \vec{\Omega}_{\text{disco}}. \quad (7.209)$$

La posición del centro de masas es $\vec{r}_{\text{CM}} = L \hat{\rho}$, y por lo tanto la velocidad es $\vec{v}_{\text{CM}} = L \omega_2 \hat{\phi}$. Para escribir la matriz de inercia I_{CM} del disco con respecto al centro de masas, notemos que, aún cuando el disco gira con respecto a \mathcal{S}'' , siempre se ve igual. Esto quiere decir que el cálculo de la matriz de inercia con respecto al sistema \mathcal{S}' es idéntico al cálculo de la matriz de inercia con respecto a \mathcal{S}'' . Luego, dado que la velocidad angular está expresada con respecto a los vectores unitarios de la base cilíndrica, conviene expresar la matriz de inercia con respecto a \mathcal{S}'' :

$$I_{\text{CM}} = \frac{M}{4} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7.210)$$

De aquí se deduce

$$I_{\text{CM}} \vec{\Omega} = \frac{M}{4} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \frac{M}{4} R^2 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 2\omega_2 \end{pmatrix} = \frac{M}{4} R^2 (\omega_1 \hat{\rho} + 2\omega_2 \hat{k}). \quad (7.211)$$

Juntando todo, finalmente obtenemos:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \frac{M}{4} R^2 \omega_1 \hat{\rho} + \frac{M}{2} (R^2 \omega_2 + 2L^2 \omega_2) \hat{k}. \quad (7.212)$$

El torque con respecto al disco sobre el origen se debe a la fuerza de gravedad, y de acuerdo a (7.29) tenemos:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = -gML \hat{\rho} \times \hat{k} = gML \hat{\phi}. \quad (7.213)$$

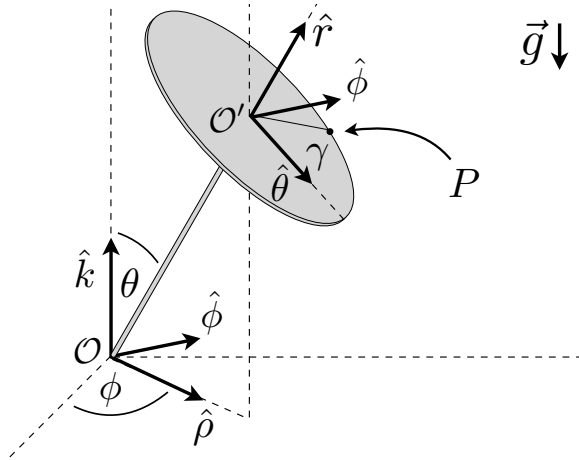
Luego, usando $d\vec{L}_O/dt = \vec{\tau}_O$, obtenemos:

$$\frac{M}{4}R^2\omega_1\omega_2\hat{\phi} = gML\hat{\phi}. \quad (7.214)$$

De este modo, vemos que para lograr que la varilla permanezca horizontal, es necesario que las velocidades angulares satisfagan $\omega_1\omega_2 = 4gL/R^2$.

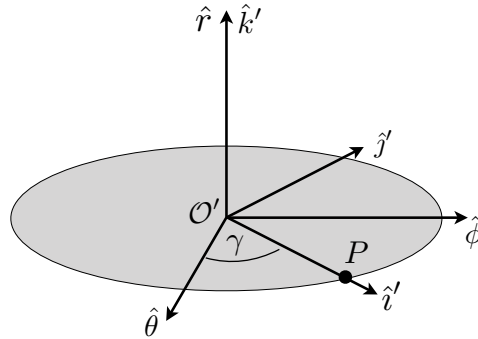
7.17 Trompos

En el ejemplo recién visto, analizamos un tipo particular de movimiento posible para un trompo. En esta sección examinaremos el trompo de manera más general. Consideraremos un trompo como el del Ejemplo 7.16.1: Un disco homogéneo de radio R y masa M , adherido al extremo de una varilla de largo L y masa despreciable. Asumiremos que el extremo opuesto de la varilla puede girar libremente en contacto con un punto fijo sobre el suelo. El primer desafío es elegir las coordenadas para describir la configuración en la cual se encuentra el trompo. Elijamos como origen \mathcal{O} el punto de contacto entre el suelo y el trompo, y usemos coordenadas esféricas para describir la posición de la varilla, tal como lo muestra la siguiente figura:



Hemos hecho coincidir al origen \mathcal{O}' , solidario al sólido, con el centro de masas del trompo. Para hacer seguimiento de la rotación del trompo en torno a su propio eje de simetría, consideremos un punto P arbitrario en el borde del trompo (este punto podría estar marcado con un color distinto al de cualquier otro punto del disco). Con esta marca, podemos definir γ como el ángulo entre la recta $\mathcal{O}'P$ y la dirección $\hat{\theta}$.

Intentemos encontrar la velocidad angular $\vec{\Omega}_{\text{trompo}}$ del trompo. Para ello, consideremos cuatro sistemas de referencia: \mathcal{S} , \mathcal{S}' , \mathcal{S}'' y \mathcal{S}''' . El sistema \mathcal{S} corresponde al sistema fijo inercial habitual, que contiene al origen \mathcal{O} y la base cartesiana fija $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ (no ilustrada en la figura). El sistema \mathcal{S}' consiste en el origen \mathcal{O}' junto con la base cilíndrica $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$. Notemos que hemos dibujado la base cilíndrica a partir del origen \mathcal{O} , pero esto no debiera distraernos. Además, el sistema \mathcal{S}'' consiste en el origen \mathcal{O}' junto con la base esférica $\{\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{r}\}$. Por último, el sistema \mathcal{S}''' consiste en el sistema solidario al sólido origen \mathcal{O}' junto con una base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ solidaria al sólido. La siguiente figura permite visualizar el sistema \mathcal{S}''' con respecto al sistema \mathcal{S}'' :



Ahora, notemos que la velocidad angular de \mathcal{S}''' con respecto a \mathcal{S}'' es $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}''}''' = \dot{\gamma} \hat{r}$; la velocidad angular de \mathcal{S}'' con respecto a \mathcal{S}' es $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}'}'' = \dot{\theta} \hat{\phi}$; mientras que la velocidad angular de \mathcal{S}' con respecto a \mathcal{S} es $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}}' = \dot{\phi} \hat{k}$. Luego, gracias a la regla de suma de velocidades angulares, la velocidad angular del trompo $\vec{\Omega}_{\text{trompo}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{S}}'''$ debe ser $\vec{\Omega}_{\text{trompo}} = \dot{\gamma} \hat{r} + \dot{\theta} \hat{\phi} + \dot{\phi} \hat{k}$. Escribiendo $\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$, finalmente obtenemos:

$$\vec{\Omega}_{\text{trompo}} = \dot{\theta} \hat{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{\theta} + (\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{r}. \quad (7.215)$$

Gracias a esta expresión, ahora podemos calcular la energía cinética del trompo. Para ello, basta conocer el tensor de inercia del sólido rígido. Notemos que el tensor de inercia del trompo con respecto a \mathcal{O}' en términos de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ está dado por el tensor de inercia de un disco con respecto a su centro de masas encontrado en la ecuación (7.156). A partir de la figura anterior, vemos que el mismo resultado es válido para el tensor de inercia con respecto a la base esférica $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ (de no ser por la marca P el disco se ve igual en los sistemas \mathcal{S}'' y \mathcal{S}'''). Luego, podemos expresar

el tensor de inercia en términos de $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ como

$$I_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} I_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rr} \end{pmatrix} = \frac{M}{4} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7.216)$$

Esto nos permite multiplicar esta matriz con $\vec{\Omega}_{\text{trompo}}$ en (7.215), y derivar una expresión para la energía cinética del trompo. En particular, tenemos

$$\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega} = \frac{M}{4} R^2 (\dot{\phi}, -\dot{\phi} \sin \theta, \dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7.217)$$

$$= \frac{1}{4} M R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + 2(\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta)^2). \quad (7.218)$$

De esta forma, usando la ecuación (7.177) con $\vec{v}_{\text{CM}} = L\dot{\theta}\hat{\theta} + L\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$, finalmente obtenemos:

$$K = \frac{1}{2} M L^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{1}{8} M R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + 2(\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta)^2). \quad (7.219)$$

Por otro lado, usando (7.72), la energía potencial del sistema debido a la fuerza de gravedad es::

$$U_g = M g L \cos \theta. \quad (7.220)$$

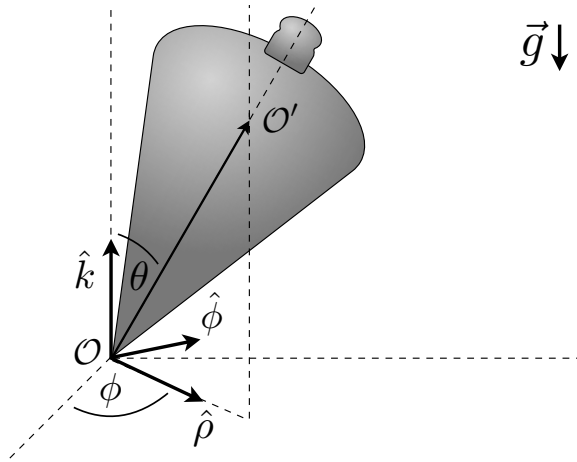
Con todo esto, el Lagrangiano de un trompo es:

$$L = \frac{1}{8} M (4L^2 + R^2) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{1}{4} M R^2 (\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - M g L \cos \theta. \quad (7.221)$$

Con este Lagrangiano, podemos deducir las ecuaciones de movimiento del trompo. Sin embargo, vale la pena considerar trompos de manera más general, con geometrías arbitrarias.

7.17.1 Trompos con geometrías generales

En la discusión anterior consideramos el caso particular de un trompo donde toda la masa está distribuida en un disco. Los pasos matemáticos no cambian mucho si hubiésemos considerado un trompo con una distribución de masa distinta, por ejemplo como el de la siguiente figura:



Lo único que debemos reconsiderar es la forma de la matriz de inercia con respecto al origen \mathcal{O}' , que sigue coincidiendo con el centro de masas. Debido a la simetría del trompo con respecto al eje \hat{r} , podemos escribir:

$$I_{\mathcal{O}'} = \begin{pmatrix} I_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (7.222)$$

Luego, repitiendo el cálculo para la energía cinética, finalmente obtenemos el siguiente Lagrangiano para un trompo general:

$$L = \frac{1}{2}(ML^2 + I_1) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - MgL \cos \theta. \quad (7.223)$$

Notemos de paso que, gracias al teorema de Steiner, $ML^2 + I_1$ es ni más ni menos que el momento de inercia I_1 con respecto a \mathcal{O} . A partir de este Lagrangiano, vemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange con respecto a las variables θ , ϕ y γ entregan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$(ML^2 + I_1) (\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I_3(\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta) \sin \theta \dot{\phi} - MgL \sin \theta = 0, \quad (7.224)$$

$$\frac{d}{dt} \left((ML^2 + I_1) \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3(\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \right) = 0, \quad (7.225)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0. \quad (7.226)$$

La rotación alrededor del eje \hat{r} , corresponde al spin del trompo, y su existencia es necesaria para que el trompo sea interesante. De acuerdo a la ecuación (7.215), la

velocidad angular alrededor de \hat{r} corresponde a la combinación

$$\omega_r \equiv \dot{\gamma} + \dot{\phi} \cos \theta. \quad (7.227)$$

Notablemente, de acuerdo a (7.226) la velocidad angular de spin es siempre constante. Por este motivo, resulta cómodo trabajar con ω_r en lugar de $\dot{\gamma}$. Los movimientos más visibles del trompo son aquellos relacionados con θ y ϕ . Al movimiento a lo largo de θ se le llama nutación, y al movimiento en ϕ se le llama precesión. Asumamos que en tiempo $t = 0$ la varilla tiene un ángulo θ_0 y velocidades angulares $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ y $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$. Integrando la ecuación (7.225) obtenemos

$$(ML^2 + I_1) \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \omega_r \cos \theta = C_0, \quad (7.228)$$

$$(7.229)$$

donde C_0 es una constante de integración dadas por:

$$C_0 \equiv (ML^2 + I_1) \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}_0 + I_3 \omega_r \cos \theta_0, \quad (7.230)$$

$$(7.231)$$

Estas ecuaciones nos permiten escribir $\dot{\phi}$ en términos de θ :

$$\dot{\phi} = \frac{C_0 - I_3 \omega_r \cos \theta}{(ML^2 + I_1) \sin^2 \theta}. \quad (7.232)$$

Con esto, la ecuación (7.224) nos permite encontrar la siguiente ecuación de movimiento sólo para el ángulo θ :

$$\ddot{\theta} - \frac{(C_0 - I_3 \omega_r \cos \theta)^2}{(ML^2 + I_1)^2 \sin^3 \theta} \cos \theta + \frac{I_3 \omega_r (C_0 - I_3 \omega_r \cos \theta)}{(ML^2 + I_1)^2 \sin \theta} - \frac{MgL}{(ML^2 + I_1)} \sin \theta = 0. \quad (7.233)$$

Esta ecuación es complicada, y no esperamos resolverla. Sin embargo, podemos ver que existen configuraciones para las cuales los movimientos son simples. Por ejemplo, es posible mantener al trompo inclinado en un ángulo θ_0 constante. De acuerdo a (7.232) esto requiere que $\dot{\phi}$ sea constante (es decir $\dot{\phi}_0$). Luego, la ecuación (7.224) nos entrega una relación entre $\dot{\phi}_0$ y ω_r que debe ser satisfecha para que el trompo permanezca con una inclinación constante:

$$(ML^2 + I_1) \dot{\phi}_0^2 \cos \theta_0 - I_3 \omega_r \dot{\phi}_0 + MgL = 0. \quad (7.234)$$

Despejando $\dot{\phi}_0$ como función de ω_3 , encontramos dos posibles velocidades angulares de precesión:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{1}{2(ML^2 + I_1) \cos \theta_0} \left(I_3 \omega_r \pm \sqrt{I_3^2 \omega_r^2 - 4(ML^2 + I_1) MgL \cos \theta_0} \right) \quad (7.235)$$

Notemos que si $\theta_0 = \pi/2$ y $2I_1 = I_3 = MR^2/4$, recobramos el resultado del ejemplo visto en la Sección 7.16.1. Dado que $\dot{\phi}_0$ debe ser real, el argumento de la raíz cuadrada debe ser positivo, con lo que vemos que existe una velocidad angular de spin mínima para lograr que el trompo permanezca inclinado sin caer:

$$\omega_r^{\min} \equiv \frac{2}{I_3} \sqrt{(ML^2 + I_1)MgL \cos \theta_0}, \quad (7.236)$$

lo que, dada nuestra experiencia con trompos, era de esperar.