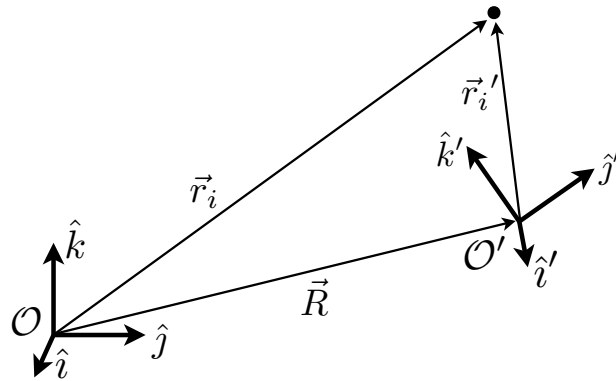


6 Movimiento relativo

Evidentemente, al habitar sobre la superficie de la Tierra, nuestra descripción del movimiento de las partículas no será hecha desde un sistema de referencia inercial. La rotación de la Tierra en torno a su propio eje, y el movimiento de la Tierra en torno al Sol (y así sucesivamente) naturalmente afectarán la forma de la segunda ley de Newton, que es estrictamente válida cuando el movimiento es descrito desde un sistema inercial. En esta sección deduciremos la segunda ley de Newton válida para un sistema no inercial, y estudiaremos sus consecuencias.

6.1 Sistemas de referencia no inerciales

Comencemos estableciendo relaciones cinemáticas válidas para la descripción del movimiento de una partícula desde un sistema no-inercial. Para ser precisos, diremos que un sistema de referencia es la especificación de un origen, junto a una base determinada. En la presente discusión consideraremos dos sistemas: un sistema inercial \mathcal{S} , caracterizado por origen \mathcal{O} y una base cartesiana $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, y un sistema no-inercial \mathcal{S}' con origen \mathcal{O}' y una base cartesiana $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ (ver figura).



La posición del origen \mathcal{O}' del sistema no-inercial con respecto al origen \mathcal{O} es $\vec{R}(t)$. En general, la posición de \mathcal{O}' no estará fija, por lo que no asumiremos nada sobre la dependencia temporal de $\vec{R}(t)$. Luego, podemos escribir:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}. \quad (6.1)$$

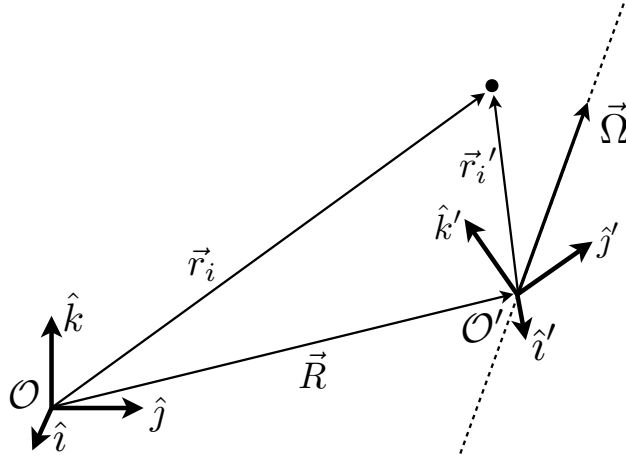
A partir de esta relación, es directo ver que

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}' + \dot{\vec{R}}. \quad (6.2)$$

Para desarrollar el lado derecho de esta relación, recordemos que podemos escribir

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'. \quad (6.3)$$

Para derivar con respecto al tiempo debemos considerar que en general la base del sistema no-inercial $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ puede girar en torno a algún eje instantáneo con velocidad angular $\vec{\Omega}(t)$ (siguiente figura).



Esto quiere decir que cada elemento de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$. Cómo ya hemos discutido en detalle (por ejemplo, en la Sección 1.20), esto quiere decir que las derivadas temporales de los vectores unitarios de $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ vienen dados por

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{k}'. \quad (6.4)$$

Luego, es directo ver que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{r}' &= \dot{x}'\hat{i}' + x'\vec{\Omega} \times \hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + y'\vec{\Omega} \times \hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + z'\vec{\Omega} \times \hat{k}' \\ &= (\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}') + \vec{\Omega} \times \vec{r}'. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ahora viene una observación importante: Notemos que la combinación $\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'$ es ni más ni menos que la velocidad de la partícula desde la perspectiva de \mathcal{S}' . En

efecto, para un observador fijo en \mathcal{S}' , los vectores de la base $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ están fijos, y solo constatarán los cambios en las coordenadas x' , y' y z' . Para enfatizar este punto, podemos utilizar la siguiente notación:

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{S}'} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'. \quad (6.6)$$

Esto es, la derivada temporal de \vec{r}' desde la perspectiva de un observador en \mathcal{S}' simplemente consiste en la derivada de las componentes x' , y' y z' . Por otro lado, $\frac{d}{dt}\vec{r}'$ es simplemente la derivada de \vec{r}' desde la perspectiva de un observador en \mathcal{S} . Luego, la ecuación (6.5) puede ser escrita elegantemente como

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{S}} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{S}'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'. \quad (6.7)$$

Reemplazando la derivada temporal de \vec{r}' en (6.2) ahora obtenemos:

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{S}'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \dot{\vec{R}}. \quad (6.8)$$

Para que sea más simple lidiar con ella, utilicemos la notación

$$\vec{v}' \equiv \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{S}'}. \quad (6.9)$$

Es decir, \vec{v}' es la velocidad de la partícula con respecto a \mathcal{O}' desde la perspectiva de \mathcal{S}' . Con esta notación, finalmente obtenemos

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \dot{\vec{R}}. \quad (6.10)$$

Esta ecuación nos informa cómo escribir la velocidad \vec{v} de acuerdo al sistema inercial \mathcal{S} en términos de la velocidad \vec{v}' de acuerdo al sistema no-inercial \mathcal{S}' .

No es difícil constatar de que la ecuación (6.7) es solo un ejemplo de una relación general que relaciona la derivada temporal de vectores desde la perspectiva de distintos sistemas de referencia (uno inercial \mathcal{S} y otro no-inercial \mathcal{S}'). Esto es, dado un vector arbitrario \vec{A} , siempre podemos expresarlo en las dos bases $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ y $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} = A'_x\hat{i}' + A'_y\hat{j}' + A'_z\hat{k}'. \quad (6.11)$$

Luego, de acuerdo a la discusión anterior, tenemos

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} = \dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}, \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{S}'} = \dot{A}'_x\hat{i}' + \dot{A}'_y\hat{j}' + \dot{A}'_z\hat{k}', \quad (6.12)$$

de donde sigue finalmente que

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{A}. \quad (6.13)$$

Gracias a esta formula, ahora estamos preparados para dar el siguiente paso, que consiste en obtener una relación entre la aceleración \vec{a} válida para un sistema inercial, y la aceleración \vec{a}' descrita desde un sistema de referencia no-inercial. Para ello, derivemos (6.10) con respecto al tiempo para obtener una expresión relacionando las aceleraciones en ambos sistemas. Es directo ver que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \ddot{\vec{R}}. \quad (6.14)$$

Aquí $d\vec{v}'/dt$ es la derivada temporal de \vec{v}' desde la perspectiva del sistema inercial \mathcal{S} . Es decir:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S. \quad (6.15)$$

Pero ya sabemos como expresar dichas derivadas en términos de derivadas temporales descritas desde el punto de vista de \mathcal{S}' :

$$\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}', \quad (6.16)$$

donde hemos definido $\vec{a}' = (d\vec{v}'/dt)_{S'}$. Como ya hemos visto, lo mismo es cierto para $d\vec{r}'/dt$. Luego, juntando todo, finalmente obtenemos:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \ddot{\vec{R}}. \quad (6.17)$$

Esta es la expresión que buscábamos.

6.2 Segunda ley de Newton en sistemas no inerciales

Ya estamos en condiciones de derivar la segunda ley de Newton válida en sistemas no inerciales. La derivación es simple: La segunda ley de Newton para una partícula de masa m en sistemas inerciales es

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (6.18)$$

Luego, haciendo uso de (6.17), obtenemos inmediatamente

$$m\vec{a}' = \vec{F}', \quad (6.19)$$

donde \vec{F}' es la fuerza desde la perspectiva del sistema no inercial \mathcal{S}' , definida como

$$\vec{F}' \equiv \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'. \quad (6.20)$$

Notemos que lo único que hemos hecho es empujar muchos términos que originalmente aparecen en el lado izquierda de la ley de Newton (debido a \vec{a}) hacia el lado derecho, para formar parte de la definición de \vec{F}' . La fuerza \vec{F}' es igual a la fuerza \vec{F} más varios términos correctivos, debido al hecho de que \mathcal{S}' es no-inercial. Estos términos correctivos se denominan fuerzas ficticias, y cada una tiene un nombre particular. En primer lugar tenemos la fuerza traslacional \vec{F}'_{tras} debido al movimiento acelerado del origen \mathcal{O}' con respecto a \mathcal{O} :

$$\vec{F}'_{\text{tras}} \equiv -m\ddot{\vec{R}}. \quad (6.21)$$

En segundo lugar tenemos la fuerza centrífuga \vec{F}'_{cent} debido a la rotación del sistema \mathcal{S}' con respecto al sistema inercial \mathcal{S} :

$$\vec{F}'_{\text{cent}} \equiv -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'). \quad (6.22)$$

Es posible notar que esta fuerza es perpendicular a $\vec{\Omega}$, y siempre apunta hacia afuera del eje de rotación. A continuación tenemos la fuerza de Coriolis, que viene dada por

$$\vec{F}'_{\text{Cor}} \equiv -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'. \quad (6.23)$$

Esta fuerza es debido a la rotación del sistema \mathcal{S}' pero para existir requiere que haya movimiento en \mathcal{S}' (es decir $\vec{v}' \neq 0$). Por último, tenemos la fuerza de Euler

$$\vec{F}'_{\text{Euler}} \equiv -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}', \quad (6.24)$$

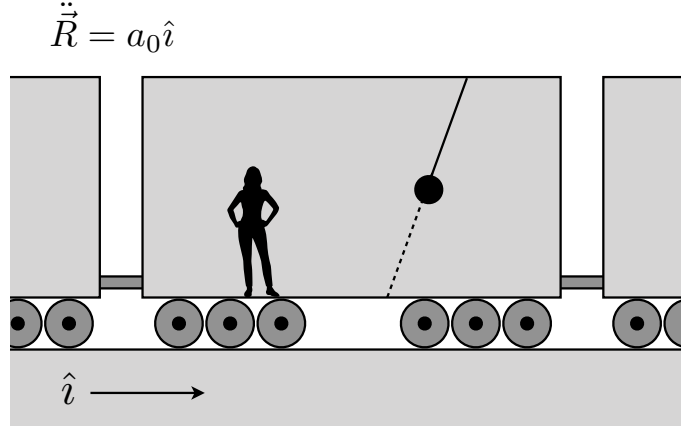
que se debe al cambio temporal en la velocidad angular $\vec{\Omega}$.

6.3 Ejemplos interesantes con fuerzas ficticias

Para familiarizarnos con el rol de las fuerzas ficticias, veamos algunos ejemplos básicos.

6.3.1 Vagón de tren acelerado

Consideremos un vagón de tren desplazándose con aceleración constante $\vec{a} = a_0\hat{i}$ a lo largo de una vía de tren recta. ¿Qué experimenta un observador al interior del vagón?



Situemos el sistema no-inercial \mathcal{S}' en el interior del vagón (solidario a este). Dado que el vagón no rota, tenemos $\vec{\Omega} = 0$. Por otro lado, el origen del vagón se desplaza de modo que

$$\ddot{\vec{R}} = a_0 \hat{i}. \quad (6.25)$$

Todo esto quiere decir que la segunda ley de Newton válida en \mathcal{S}' (describiendo el movimiento de una masa m al interior del vagón) viene dada por

$$m\vec{a}' = \vec{F} - ma_0 \hat{i}. \quad (6.26)$$

Aquí la fuerza \vec{F} corresponde a la fuerza total ejercida sobre la masa m debido a agentes externos. Por ejemplo, entre las muchas fuerzas que pueden estar afectando a m está la fuerza de gravedad $\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\hat{k}$. Para enfatizar esto escribamos

$$\vec{F} = -mg\hat{k} + \vec{F}_{\text{otras}}. \quad (6.27)$$

Luego, la segunda ley de Newton en \mathcal{S}' adquiere la forma

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{otras}} - m(g\hat{k} + a_0 \hat{i}). \quad (6.28)$$

Notemos que la fuerza de gravedad se combina con la fuerza ficticia debido a la aceleración del vagón en una sola expresión. De hecho, podemos afirmar que ahora la gravedad apunta en una dirección distinta a $-\hat{k}$. Al interior del vagón, la fuerza de gravedad es

$$\vec{F}'_{\text{grav}} = mg'\hat{g}', \quad (6.29)$$

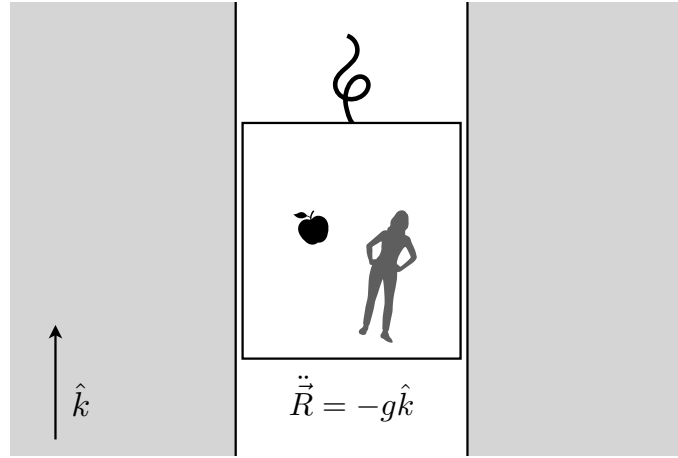
donde g' y \hat{g}' vienen dados por

$$g' \equiv \sqrt{g^2 + a_0^2}, \quad \hat{g}' = -\frac{g\hat{k} + a_0\hat{i}}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}. \quad (6.30)$$

Curiosamente, para un observador al interior del vagón acelerado el suelo se percibirá inclinado con respecto a la vertical. De hecho, si el observador al interior del vagón utiliza un péndulo para encontrar la dirección vertical (determinada por la posición de equilibrio del péndulo), descubrirá que la cuerda del péndulo en equilibrio se extiende a lo largo de la dirección \hat{g}' (ver figura).

6.3.2 Ascensor en caída libre

Supongamos que nos encontramos al interior de un ascensor al cual se le han cortado los cables. El ascensor, junto con todos los objetos en su interior (incluido un observador capaz de realizar experimentos) comenzará a acelerarse en la dirección $-\hat{k}$ con aceleración g , debido a la fuerza de gravedad.



Luego, el sistema no inercial \mathcal{S}' solidario al ascensor estará caracterizado por:

$$\ddot{R} = -g\hat{k}. \quad (6.31)$$

De este modo, la segunda ley de Newton describiendo el movimiento de una partícula de masa m al interior del ascensor vendrá dada por

$$m\vec{a}' = \vec{F} + mg\hat{k}. \quad (6.32)$$

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos distinguir la presencia de la fuerza de gravedad en \vec{F} escribiendo:

$$\vec{F} = -mg\hat{k} + \vec{F}_{\text{otras}}. \quad (6.33)$$

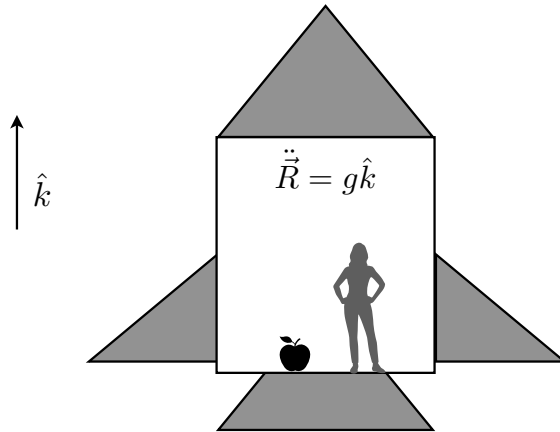
Luego, la ecuación de movimiento se simplifica, y obtenemos

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{otras}}. \quad (6.34)$$

Es decir, la fuerza ficticia cancela la fuerza de gravedad, y la descripción del movimiento de la partícula m será tal que la gravedad no juega ningún rol. En otras palabras, el observador al interior del ascensor no sentirá la gravedad.

6.3.3 Gravedad artificial en una nave espacial I

Un ejemplo opuesto al del ascensor lo constituye una nave espacial acelerada de manera uniforme. Supongamos una nave que está lejos de la influencia de la Tierra (o de cualquier otro cuerpo celeste), de tal modo que $\vec{F}_{\text{grav}} = 0$.



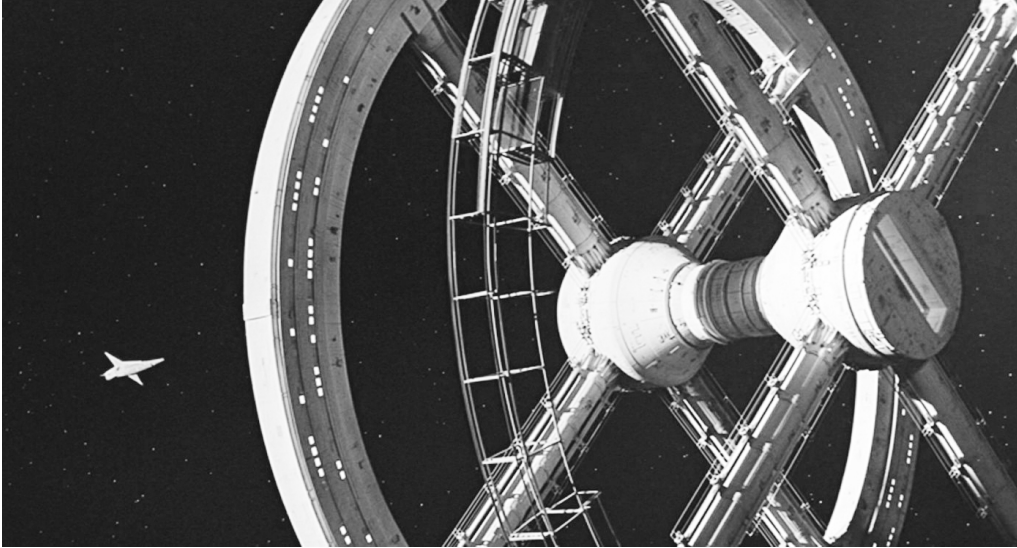
Si los motores de la nave la mantienen acelerada de manera que $\ddot{\vec{R}} = g\hat{k}$, entonces la segunda ley de Newton dictando el movimiento de una partícula de masa m al interior de la nave será:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - mg\hat{k}. \quad (6.35)$$

Es decir, la aceleración de la nave tiene como efecto reproducir la fuerza de gravedad que sentimos sobre la superficie de la Tierra.

6.3.4 Gravedad artificial en una nave espacial II

Una alternativa más económica de producir gravedad involucra rotaciones. En la película “2001: Odisea en el Espacio”, existen varias naves espaciales con anillos rotando sobre su eje de simetría.



Los habitantes de estas naves pueden caminar al interior de estos anillos como si estuviesen sobre la superficie de la Tierra. Veamos esto en detalle.

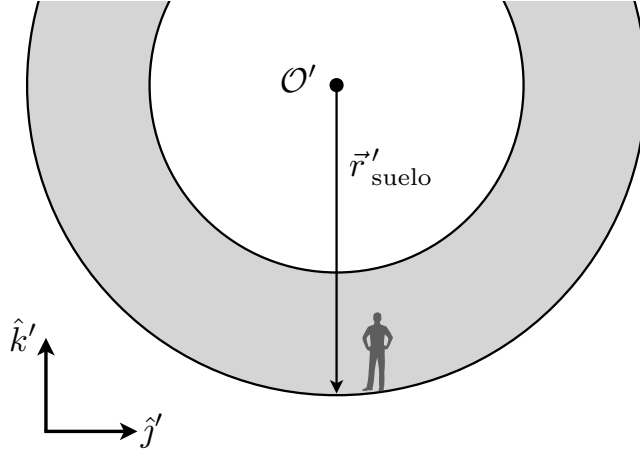
Supongamos que el anillo de radio exterior R_0 gira con velocidad angular constante $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{i}$. Ubiquemos tanto el origen \mathcal{O} del sistema inercial \mathcal{S} como el origen \mathcal{O}' del sistema no-inercial \mathcal{S}' en el centro del anillo, de modo que $\vec{R} = 0$. Luego, la ecuación de movimiento para una partícula de masa m adquiere la forma:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\Omega_0^2 \hat{i} \times (\hat{i} \times \vec{r}') - 2m\Omega_0 \hat{i} \times \vec{v}'. \quad (6.36)$$

Notemos que el origen está en el centro del anillo, y la posición de la partícula es con respecto a dicho origen, tal como lo muestra la siguiente figura.

Si deseamos describir el movimiento con respecto al suelo, que permanece fijo con respecto al sistema \mathcal{S}' , simplemente podemos escribir:

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\text{suelo}} + \delta\vec{r}' \quad (6.37)$$



donde \vec{r}'_{suelo} denota la posición del suelo con respecto a \mathcal{O}' , y $\delta\vec{r}'$ es la posición de la partícula con respecto al suelo. Por ejemplo, de la figura vemos que $\vec{r}'_{\text{suelo}} = -R_0\hat{k}'$. Luego, obtenemos

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\Omega_0^2 R_0 \hat{i} \times (\hat{i} \times \hat{k}') - m\Omega_0^2 \hat{i} \times (\hat{i} \times \delta\vec{r}') - 2m\Omega_0 \hat{i} \times \vec{v}'. \quad (6.38)$$

Obviamente, la altura interior del anillo será mucho menor que el radio del anillo. Por lo tanto, para estudiar el movimiento al interior del anillo podemos asumir $\|\delta\vec{r}'\| \ll R_0$. Esto nos permite despreciar el tercer término de la expresión anterior. Además, despreciemos los efectos debido a la fuerza de Coriolis (lo que podemos hacer si $\|\vec{v}'\| \ll \Omega_0 R_0$). Así, finalmente obtenemos:

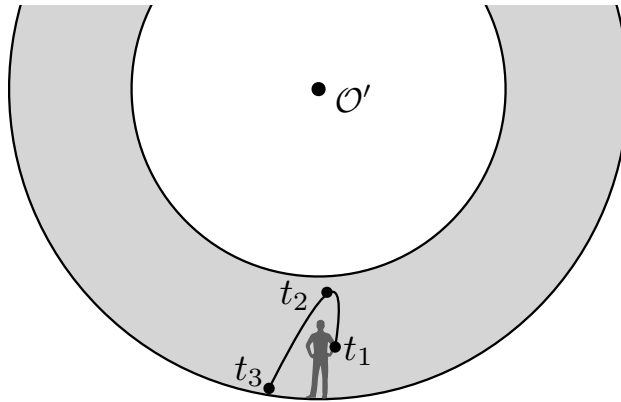
$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\Omega_0^2 R_0 \hat{k}', \quad (6.39)$$

donde usamos $\hat{i} \times (\hat{i} \times \hat{k}') = -\hat{k}'$. De la expresión anterior, es posible reconocer que la rotación de la nave induce una fuerza constante que siempre apunta hacia abajo (en relación al suelo), con una aceleración de gravedad dada por

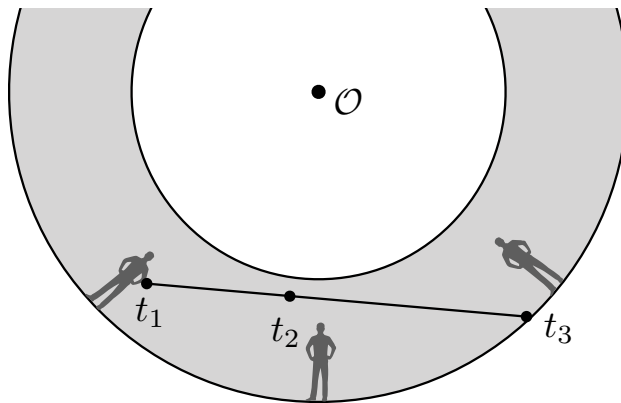
$$g = \Omega_0^2 R_0. \quad (6.40)$$

Esta relación nos permite conocer la velocidad angular que requiere la nave, dado un radio R_0 determinado. Esta es $\Omega_0 = \sqrt{g/R_0}$.

Volvamos ahora a los términos que despreciamos. No es difícil ver que estos términos introducirán correcciones debido a que el radio de la nave es finito (y por lo tanto el suelo no es completamente plano). La siguiente figura muestra, por ejemplo, qué pasa si arrojamos una masa m hacia arriba, en la dirección vertical \hat{k}' .



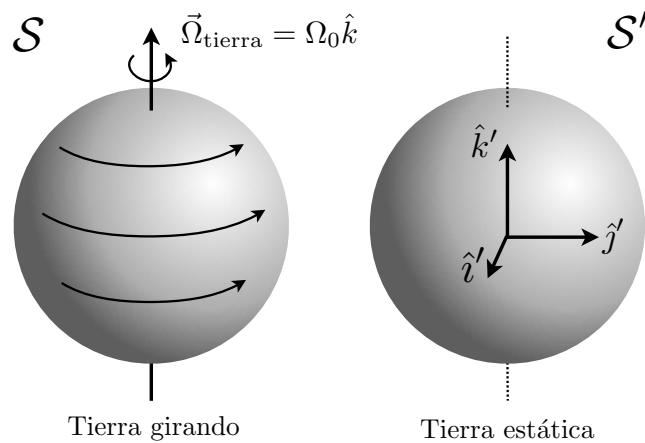
Desde la perspectiva del sistema inercial \mathcal{S} , la masa sigue un camino rectilíneo uniforme, el cual difícilmente interceptará al suelo (que gira junto a la nave) en el mismo punto desde el cual fue disparada. Los términos que despreciamos se hacen cargo de describir el movimiento completo, que es muy complicado desde la perspectiva de \mathcal{S}' , pero extremadamente simple desde el punto de vista de \mathcal{S} (ver siguiente figura).



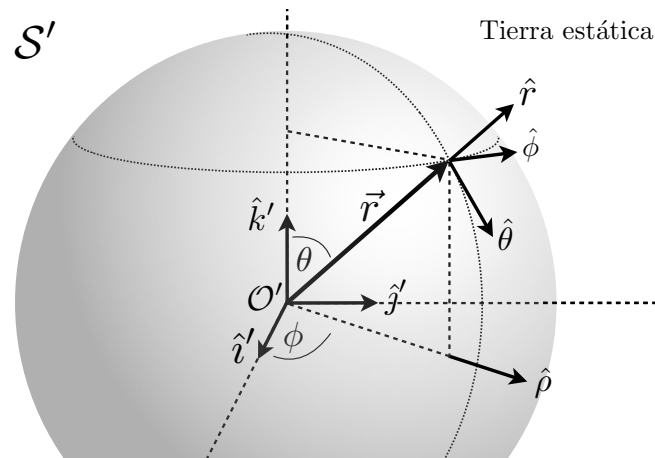
comparando ambas figuras, podemos ver la trayectoria de la misma partícula para distintos tiempos, donde t_1 es el tiempo en que la partícula es arrojada hacia arriba, t_2 es el tiempo en que la partícula experimenta el mayor acercamiento posible al techo, y t_3 es el momento en que la partícula golpea el suelo.

6.4 Efectos sobre la Tierra

Estudiamos ahora algunos efectos interesantes experimentados (por nosotros) sobre la superficie de la tierra. Para comenzar, decidamos qué coordenadas usar para describir movimientos sobre la Tierra. Desde nuestro punto de vista, la Tierra está inmóvil. Esto se debe sencillamente al hecho de que estamos rotando junto a la tierra. La siguiente figura contrasta el movimiento de la tierra percibido desde el sistema inercial \mathcal{S} , en el cual la Tierra rota, y el sistema no-inercial \mathcal{S}' , en el cual la Tierra no rota:

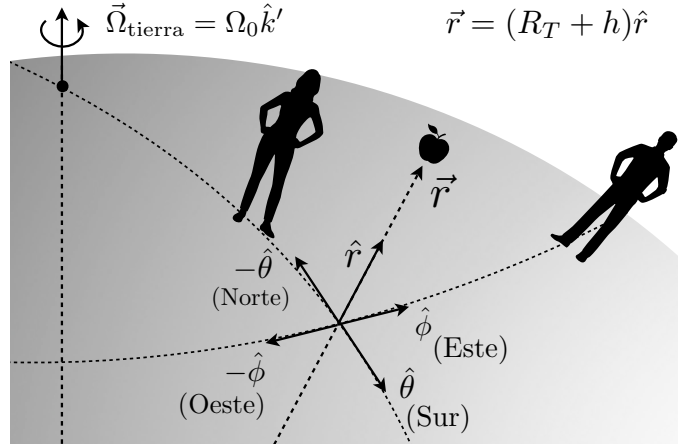


Describamos el movimiento de las partículas desde un sistema de referencia no-inercial \mathcal{S}' que rota junto a la Tierra, y cuyo origen coincide con el centro de la Tierra:



Notemos que contamos con una base Cartesiana $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ solidaria a la tierra. Nada nos impide definir un sistema de coordenadas esféricas, de tal modo que cada punto del sistema de coordenadas denota un punto fijo con respecto a la Tierra. Es decir, el ángulo θ denota latitudes mientras que el ángulo ϕ denota longitudes. De acuerdo a nuestra notación, deberíamos utilizar primas ($'$) para recordar que estas coordenadas pertenecen a un sistema no-inercial, sin embargo es más sencillo trabajar con coordenadas sin primas.

Pensemos ahora qué pasa en la vecindad de la superficie de la Tierra. Supongamos que estamos parados en algún punto de la superficie observando una manzana en movimiento (ver siguiente figura).



Naturalmente, la posición de la manzana puede ser descrita a partir del centro de la tierra. El vector posición de la manzana a partir del origen \mathcal{O}' de la tierra es simplemente:

$$\vec{r} = (R_T + h)\hat{r}, \quad (6.41)$$

donde R_T es el radio de la Tierra, y h es la altura de la manzana con respecto a la superficie de la Tierra. De esta forma, un cambio en la altura, significará una mayor distancia entre \mathcal{O}' y la manzana. La manzana también puede moverse a lo largo y ancho de la superficie. Si lo hiciera en la dirección $\hat{\phi}$ se estaría desplazando hacia el Este, y si lo hiciera en la dirección $\hat{\theta}$ se estaría desplazando hacia el Sur.

Mediante esta descripción, veamos cuáles son las fuerzas ficticias que afectan a una manzana de masa m : En primer lugar, dado que $\vec{R} = 0$, la fuerza traslacional es inmediatamente 0. De manera similar, dado que $\vec{\Omega} = 0$, la fuerza de Euler será nula.

De este modo, solo tenemos que preocuparnos de la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis. Para la fuerza centrífuga es directo ver que adoptara la siguiente forma

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -m \Omega^2 (R_T + h) \hat{k}' \times (\hat{k}' \times \hat{r}), \quad (6.42)$$

$$= -m \Omega^2 (R_T + h) \sin \theta \hat{k}' \times \hat{\phi}, \quad (6.43)$$

$$= m \Omega^2 (R_T + h) \sin \theta \hat{\rho}, \quad (6.44)$$

$$\simeq m \Omega^2 R_T \sin \theta \hat{\rho}, \quad (6.45)$$

donde $\hat{\rho}$ es el vector unitario de la base cilíndrica. Este resultado tiene sentido. Nos dice que la rotación de la Tierra produce una fuerza centrífuga que empuja a la manzana en una dirección perpendicular al eje de giro de la Tierra. Veamos ahora la fuerza de Coriolis. Usando $\vec{v}' = \dot{r} \hat{r} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$ con $r = R_T + h$ vemos que ésta tendrá la forma

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\Omega \hat{k}' \times (\dot{r} \hat{r} + (R_T + h) \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} + (R_T + h) \dot{\theta} \hat{\theta}), \quad (6.46)$$

$$= -2m\Omega \dot{h} \sin \theta \hat{\phi} + 2m\Omega (R_T + h) \sin \theta \dot{\phi} \hat{\rho} - 2m(R_T + h) \dot{\theta} \Omega \cos \theta \hat{\phi}, \quad (6.47)$$

$$\simeq -2m\Omega \dot{h} \sin \theta \hat{\phi} + 2m\Omega R_T \sin \theta \dot{\phi} \hat{\rho} - 2m R_T \dot{\theta} \Omega \cos \theta \hat{\phi}. \quad (6.48)$$

Reemplazando $\hat{\rho} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$, finalmente obtenemos

$$\vec{F}_{\text{Cor}} \simeq 2m\Omega \left[R_T \sin^2 \theta \dot{\phi} \hat{r} - (\dot{h} \sin \theta + R_T \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\phi} + R_T \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \hat{\theta} \right]. \quad (6.49)$$

Para entender este resultado, analicemos cada tipo de movimiento por separado. Primero, supongamos que la manzana se mueve hacia arriba o abajo, en una locación fija en la tierra ($\dot{h} \neq 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi} = 0$). Luego, tendremos que la fuerza de Coriolis sobre nuestra manzana será:

$$\vec{F}_{\text{Cor}} \simeq -2m\Omega \dot{h} \sin \theta \hat{\phi}. \quad (6.50)$$

Este resultado implica que sobre la manzana (que se eleva en la dirección \hat{r}) actuará una fuerza ficticia hacia $-\hat{\phi}$ (Oeste) si la manzana se eleva, o hacia $\hat{\phi}$ (Este) si la manzana desciende. En otras palabras, si la manzana sube, tenderá a quedar rezagada con respecto a la rotación de la Tierra, mientras que si baja, tenderá a anticiparse a la rotación.

Veamos ahora qué pasa si la manzana se mueve en direcciones paralelas a la superficie. Por ejemplo, si la manzana se mueve hacia el Sur o Norte ($\dot{\theta} \neq 0$, $\dot{h} = 0$, $\dot{\phi} = 0$), entonces la fuerza de Coriolis adopta la forma

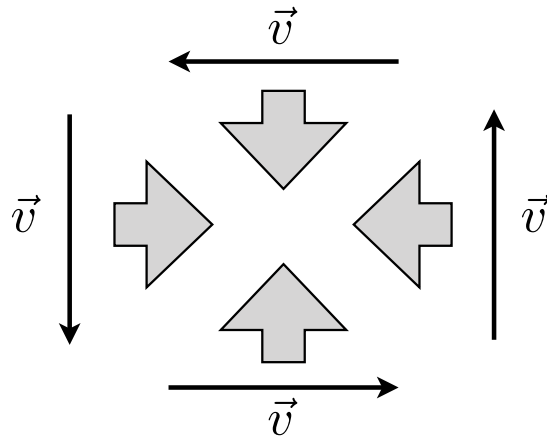
$$\vec{F}_{\text{Cor}} \simeq -2m R_T \dot{\theta} \cos \theta \hat{\phi}. \quad (6.51)$$

Este resultado depende del hemisferio en donde la manzana esté moviéndose. Por ejemplo, si la manzana está en el hemisferio Norte, tendremos $\cos \theta > 0$, y entonces la fuerza apuntará hacia el Oeste ($-\hat{\phi}$) si la manzana se mueve hacia el Sur ($\dot{\theta} > 0$), y apuntará hacia el Este ($\hat{\phi}$) si la manzana se mueve hacia el Norte ($\dot{\theta} < 0$). Por el contrario, si la manzana está en el hemisferio Sur, tendremos $\cos \theta < 0$, y entonces la fuerza apuntará hacia el Este ($\hat{\phi}$) si la manzana se mueve hacia el Sur ($\dot{\theta} > 0$), y apuntará hacia el Oeste ($-\hat{\phi}$) si la manzana se mueve hacia el Norte ($\dot{\theta} < 0$).

Finalmente, si la manzana se mueve hacia el Este u Oeste, ($\dot{\phi} \neq 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{h} = 0$), entonces la fuerza de Coriolis adoptará la forma

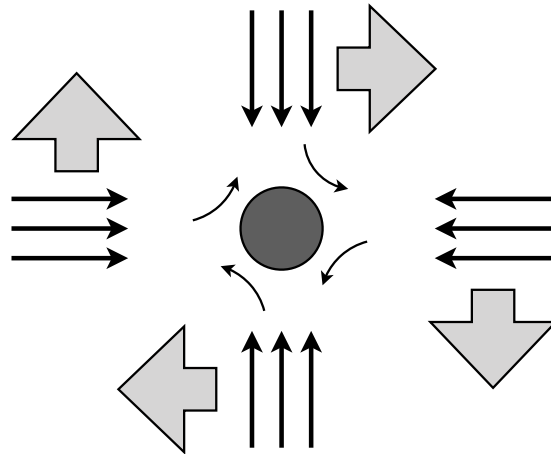
$$\vec{F}_{\text{Cor}} \simeq 2m\dot{\phi} \sin \theta \Omega R_T \left[\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \right]. \quad (6.52)$$

Aquí vemos que la dirección de la fuerza también dependerá de en qué hemisferio se encuentra la manzana. Si la manzana está en el hemisferio Norte, tendremos $\cos \theta > 0$, la fuerza apuntará hacia arriba y hacia Sur ($\hat{\theta}$) si la manzana se mueve hacia el Este ($\dot{\phi} > 0$), y apuntará hacia abajo y hacia el Norte ($-\hat{\theta}$) si la manzana se mueve hacia el Oeste ($\dot{\phi} < 0$). Por el contrario, si la manzana está en el hemisferio Sur, tendremos $\cos \theta < 0$, y la fuerza apuntará hacia arriba y hacia el Norte ($-\hat{\theta}$) si la manzana se mueve hacia el Este ($\dot{\phi} > 0$), y apuntará hacia abajo y hacia el Sur ($\hat{\theta}$) si la manzana se mueve hacia el Oeste ($\dot{\phi} < 0$). La siguiente figura ilustra la dirección de las fuerzas de acuerdo al movimiento en el hemisferio Sur:



6.4.1 Ejemplo 1: Inodoros

Preguntémosnos ahora qué debiera pasar si llenamos un lavamanos con agua y quitamos el tapón, o qué debiera pasar si largamos la cadena del inodoro. En particular, preguntémosnos que pasaría si realizamos estos experimentos en el hemisferio Sur. En cualquiera de los dos casos, el agua comenzará a moverse hacia el centro del contenedor. Al ocurrir esto, el flujo que se mueve hacia el Este (en dirección al centro) sentirá una fuerza hacia el Sur mientras que el flujo que se mueve hacia el Oeste sentirá una fuerza hacia el Norte. Igualmente, el flujo que se mueve hacia el Sur (siempre en dirección al centro) sentirá una fuerza el Este, mientras que el flujo que se mueve hacia el Norte sentirá una fuerza hacia el Oeste. La siguiente figura ilustra la situación:



En definitiva, el agua comenzará a arremolinarse siguiendo el sentido a favor de los punteros del reloj. En el hemisferio Norte, el resultado sería al revés. Hagan el experimento cuando tengan tiempo.

6.4.2 Ejemplo 2: Péndulo de Foucault

Estudiemos ahora el movimiento de un péndulo de largo L y masa m sobre la superficie de la Tierra. Si tienen tiempo de visitar la biblioteca de nuestra facultad, no olviden comprobar los movimientos que predeciremos en esta discusión. Para comenzar, consideremos la descripción del péndulo en ausencia de fuerzas ficticias. Una forma de describir al péndulo sería usando coordenadas Cartesianas (x, y) con respecto al punto de equilibrio del péndulo, que podemos hacer coincidir con el origen $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Luego, de acuerdo a la Segunda Ley e Newton las ecuaciones de

movimiento para las coordenadas (x, y) , describiendo pequeñas oscilaciones, vienen dadas por

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0, \quad (6.53)$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L}y = 0. \quad (6.54)$$

Veamos ahora qué pasa si incluimos los efectos de la rotación de la Tierra. Asumiremos que x es la coordenada que va de Oeste a Este, e y es la coordenada que va de Sur a Norte. Para simplificar el problema, nos enfocaremos únicamente en los efectos debido a la fuerza de Coriolis. Dado que el movimiento de un péndulo colgando del techo es esencialmente paralelo a la superficie de la Tierra, despreciaremos sus cambios de altura ($\dot{h} = 0$). También despreciaremos la componente de la fuerza que apunta en la dirección \hat{r} (que estará compensada por la tensión de la cuerda). De esta forma, la fuerza de Coriolis adquiere la forma:

$$\vec{F}_{\text{Cor}} \simeq 2m\Omega R_T \cos \theta \left[-\dot{\theta}\hat{\phi} + \sin \theta \dot{\phi}\hat{\theta} \right]. \quad (6.55)$$

No olvidemos que θ y ϕ son las coordenadas del péndulo desde el origen en el centro de la Tierra. Sin embargo, podemos relacionarlas con las coordenadas x e y recién introducidas escribiendo:

$$x \simeq R_T \sin \theta_0 (\phi - \phi_0), \quad y \simeq -R_T (\theta - \theta_0), \quad (6.56)$$

donde ϕ_0 y θ_0 son las posiciones del punto de equilibrio del péndulo sobre la Tierra. La velocidad en estas coordenadas será

$$\dot{x} \simeq R_T \sin \theta_0 \dot{\phi}, \quad \dot{y} \simeq -R_T \dot{\theta}. \quad (6.57)$$

Luego, la Fuerza de Coriolis será:

$$\vec{F}_{\text{Cor}} \simeq 2m\Omega \cos \theta_0 [\dot{y}\hat{x} - \dot{x}\hat{y}], \quad (6.58)$$

donde hemos usado $\hat{x} = \hat{\phi}$ y $\hat{y} = -\hat{\theta}$. Luego, de acuerdo a la Segunda Ley de Newton, el movimiento del péndulo en el plano (x, y) estará gobernado por la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 2\Omega \cos \theta_0 \dot{y}, \quad (6.59)$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L}y = -2\Omega \cos \theta_0 \dot{x}. \quad (6.60)$$

Podemos reescribir estas ecuaciones de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega_0 \dot{y}, \quad (6.61)$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega_0 \dot{x}. \quad (6.62)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ y $\Omega_0 = \Omega \cos \theta_0$. Notemos que ω_0 es la frecuencia natural del péndulo, mientras que Ω es la rapidez angular de rotación de la Tierra. Desde luego, es razonable que el periodo de oscilación del péndulo $2\pi/\omega_0$ sea mucho menor al periodo de rotación de la tierra $2\pi/\Omega$ (que son 24 horas), por lo que podemos considerar $\omega_0 \gg \Omega_0$. Para resolver las ecuaciones anteriores supongamos una solución de la forma:

$$x = Ae^{i\Gamma t} + A^*e^{-i\Gamma t}, \quad y = Be^{i\Gamma t} + B^*e^{-i\Gamma t}. \quad (6.63)$$

Insertando esta solución de regreso en (6.61) y (6.62) obtenemos las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$(\omega_0^2 - \Gamma^2)A = 2i\Gamma\Omega_0 B, \quad (6.64)$$

$$(\omega_0^2 - \Gamma^2)B = -2i\Gamma\Omega_0 A. \quad (6.65)$$

Al juntarlas, obtenemos una ecuación para Γ :

$$(\omega_0^2 - \Gamma^2)^2 = 4\Gamma^2\Omega_0^2. \quad (6.66)$$

Esta ecuación puede ser resuelta en forma exacta, pero resultará mucho más práctico usar el hecho de que $\omega_0 \gg |\Omega_0|$. En dicho límite, es directo obtener las siguientes dos soluciones para Γ

$$\Gamma_{\pm} \simeq \omega_0 \pm \Omega_0 \quad (6.67)$$

Dado que hay dos soluciones para Γ , la solución general será una combinación lineal de nuestra adivinanza (6.63) para ambos valores de Γ . Es decir

$$x(t) = A_+e^{i\Gamma_+t} + A_+^*e^{-i\Gamma_+t} + A_-e^{i\Gamma_-t} + A_-^*e^{-i\Gamma_-t}, \quad (6.68)$$

$$y(t) = B_+e^{i\Gamma_+t} + B_+^*e^{-i\Gamma_+t} + B_-e^{i\Gamma_-t} + B_-^*e^{-i\Gamma_-t}. \quad (6.69)$$

Gracias a las ecuaciones (6.64) y (6.65), es posible mostrar que las amplitudes A_{\pm} y B_{\pm} deben satisfacer

$$B_{\pm} = \pm iA_{\pm}. \quad (6.70)$$

Luego, la solución general tiene la forma:

$$x = A_+e^{i\omega_0 t}e^{i\Omega_0 t} + A_+^*e^{-i\omega_0 t}e^{-i\Omega_0 t} + A_-e^{i\omega_0 t}e^{-i\Omega_0 t} + A_-^*e^{-i\omega_0 t}e^{i\Omega_0 t}, \quad (6.71)$$

$$y = iA_+e^{i\omega_0 t}e^{i\Omega_0 t} - iA_+^*e^{-i\omega_0 t}e^{-i\Omega_0 t} - iA_-e^{i\omega_0 t}e^{-i\Omega_0 t} + iA_-^*e^{-i\omega_0 t}e^{i\Omega_0 t}. \quad (6.72)$$

Los valores de A_{\pm} pueden ser encontrados imponiendo condiciones iniciales. Supongamos que en $t = 0$ el sistema está en la configuración $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ y $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Luego, es posible obtener

$$A_+ = \frac{1}{i4\omega_0} [\dot{x}_0 + (\omega_0 - \Omega_0)y_0] - \frac{1}{4\omega_0} [\dot{y}_0 - (\omega_0 - \Omega_0)x_0], \quad (6.73)$$

$$A_- = \frac{1}{4\omega_0} [\dot{y}_0 + (\omega_0 + \Omega_0)x_0] + \frac{1}{i4\omega_0} [\dot{x}_0 - (\omega_0 + \Omega_0)y_0]. \quad (6.74)$$

De esta forma, la solución finalmente adquiere la forma:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{2\omega_0} [\dot{x}_0 + (\omega_0 - \Omega_0)y_0] \sin [(\omega_0 + \Omega_0)t] \\ & - \frac{1}{2\omega_0} [\dot{y}_0 - (\omega_0 - \Omega_0)x_0] \cos [(\omega_0 + \Omega_0)t] \\ & + \frac{1}{2\omega_0} [\dot{x}_0 - (\omega_0 + \Omega_0)y_0] \sin [(\omega_0 - \Omega_0)t] \\ & + \frac{1}{2\omega_0} [\dot{y}_0 + (\omega_0 + \Omega_0)x_0] \cos [(\omega_0 - \Omega_0)t], \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{2\omega_0} [\dot{y}_0 - (\omega_0 - \Omega_0)x_0] \sin [(\omega_0 + \Omega_0)t] \\ & + \frac{1}{2\omega_0} [\dot{x}_0 + (\omega_0 - \Omega_0)y_0] \cos [(\omega_0 + \Omega_0)t] \\ & + \frac{1}{2\omega_0} [\dot{y}_0 + (\omega_0 + \Omega_0)x_0] \sin [(\omega_0 - \Omega_0)t] \\ & - \frac{1}{2\omega_0} [\dot{x}_0 - (\omega_0 + \Omega_0)y_0] \cos [(\omega_0 - \Omega_0)t]. \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$(6.77)$$

Para apreciar el tipo de movimiento descrito por esta solución general, veamos el caso particular en el cual el péndulo comienza oscilando a lo largo del eje x (de Este a Oeste) partiendo del reposo: $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$. Con estas condiciones iniciales, la solución anterior se simplifica enormemente, con lo cual obtenemos:

$$x(t) = x_0 \left(\cos [\omega_0 t] \cos [\Omega_0 t] + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin [\omega_0 t] \sin [\Omega_0 t] \right) \quad (6.78)$$

$$y(t) = x_0 \left(\frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin [\omega_0 t] \cos [\Omega_0 t] - \cos [\omega_0 t] \sin [\Omega_0 t] \right) \quad (6.79)$$

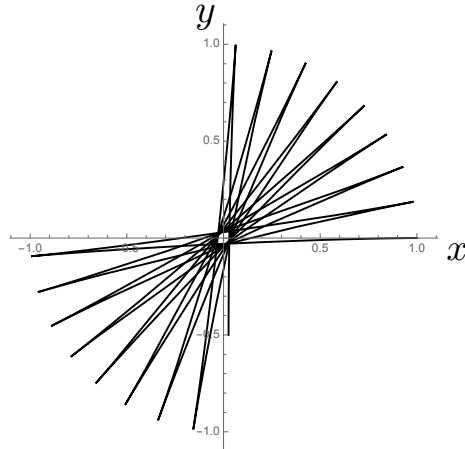
$$(6.80)$$

Dado que $\omega_0 \gg |\Omega_0|$, es posible ver que para tiempos iniciales $t \ll 2\pi/|\Omega_0|$ podemos tomar $\cos[\Omega_0 t] \simeq 1$ y $\sin[\Omega_0 t] \simeq 0$ y la oscilación solo ocurre a lo largo del eje x :

$$x(t) \simeq x_0 \cos[\omega_0 t], \quad (6.81)$$

$$y(t) \simeq 0. \quad (6.82)$$

Por otro lado, en la medida que las horas transcurren, se notará la influencia de la rotación de la Tierra, y el péndulo empezará a oscilar fuera del eje x . De hecho, al cabo de un tiempo $T = \pi/(2|\Omega_0|)$ el movimiento será completamente a lo largo del eje y . Por otro lado, al cabo de un tiempo $\pi/|\Omega_0|$, el movimiento volverá a estar orientado a lo largo del eje x . La siguiente figura muestra la trayectoria del péndulo dibujado sobre el plano (x, y) para valores $\omega_0 = 1$ y $\Omega_0 = -0.03$, entre $t = 0$ y $t = \pi/(2|\Omega_0|)$: Al movimiento de giro en el plano (x, y) con frecuencia $|\Omega_0|$



se le denomina precesión. Como es posible apreciar, péndulos en distintos lugares de la Tierra tendrán distintas frecuencias de precesión. Además, dado que $\cos\theta_0$ puede ser positivo o negativo, dependiendo de el hemisferio, la precesión ocurrirá de forma anti-horaria si el péndulo está en el hemisferio Sur, y de forma horaria si está en el hemisferio Norte. De esta manera, el péndulo de Foucault constituye una demostración de la rotación de la Tierra. Pensemos en cifras concretas. El giro de la Tierra, que toma 24horas, implica que su velocidad angular es $\Omega = 2\pi/86400\text{s}^{-1}$. Luego, un péndulo de Foucault en Santiago, cuya latitud implica $\cos\theta_0 = -0.545$, estará caracterizado por una frecuencia de precesión $|\Omega_0| = 0.00004 \text{ s}^{-1}$. Luego, el tiempo que le tomará al péndulo pasar de oscilar a lo largo del eje x a oscilar a lo largo del eje y será de 11 horas.