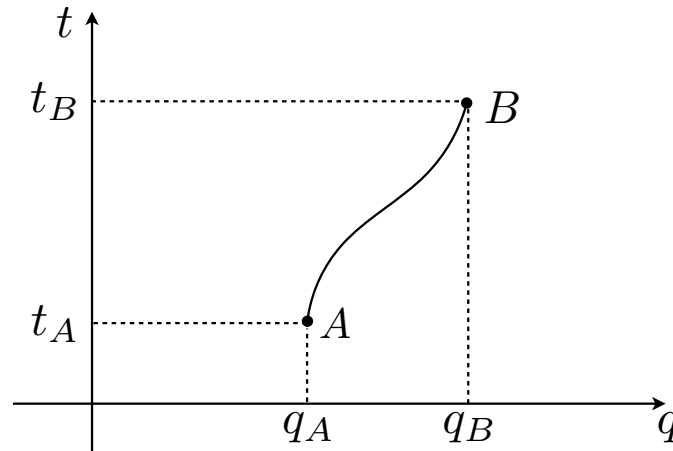


5 Principio de mínima acción

En esta sección derivaremos un formalismo alternativo para estudiar sistemas Newtonianos. Como veremos, las leyes de Newton son consecuencias de unos principios aún más fundamentales que tienen, como sustento, el uso de simetrías. Algo sorprendente en este formalismo es la ausencia del concepto de fuerza. Para disfrutar las discusiones que siguen tendremos que hacer un esfuerzo en olvidar todo lo que hemos aprendido sobre mecánica hasta ahora. Comenzaremos desde cero.

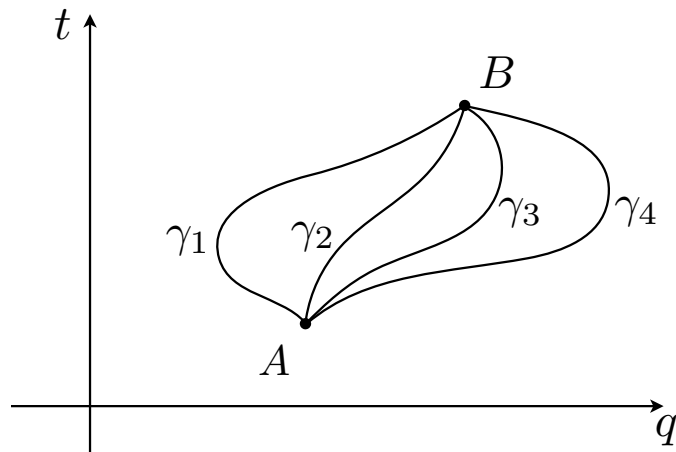
5.1 Trayectorias

Deseamos conocer la dinámica que gobierna el desplazamiento de una partícula puntual desde un punto A hasta un punto B . Para simplificar esta discusión, nos enfocaremos en situaciones donde el desplazamiento es a lo largo de una sola dimensión descrita por una coordenada q (no necesariamente cartesiana). Denominemos las posiciones inicial y final q_A y q_B respectivamente (ver figura).

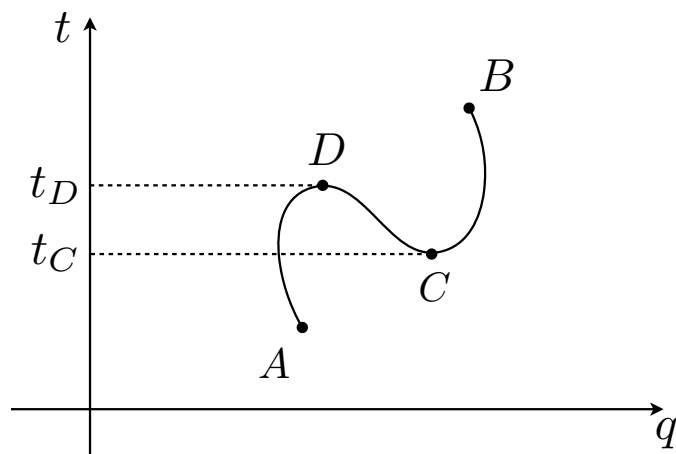


La figura muestra una trayectoria en el plano q - t describiendo el movimiento de una partícula desde A hasta B . Asumiremos como datos los puntos iniciales y finales q_A y q_B , en tiempos t_A y t_B respectivamente. El desafío es elucidar la curva $q(t)$ a partir de primeros principios. A la coordenada q se le llama coordenada generalizada, y puede consistir en cualquier parámetro que indique de forma inequívoca la posición de la partícula que nos interesa describir. Puede ser un ángulo, o una coordenada cartesiana, entre muchas otras opciones.

Sin un conocimiento previo de las leyes física que gobiernan el movimiento de dicha partícula, no podemos anticipar cuál de las infinitas trayectorias posibles seguirá. Nuestro desafío es identificar la trayectoria *física* escogida por la naturaleza. Para proceder en forma sistemática, etiquetemos cada trayectoria posible mediante el símbolo γ_i , con $i = 1, \dots, \infty$. La siguiente figura muestra la situación a la cual nos enfrentamos.



Una trayectoria γ_i dada consiste en un conjunto de puntos $\{q_i(t)\}$ donde t es el tiempo. Naturalmente, la función $q_i(t)$ debe ser continua y restringida a ser inyectiva. Es decir, por cada valor de t en el intervalo $[t_a, t_b]$ debe existir un solo valor de q (la partícula no puede estar en dos posiciones distintas en un mismo tiempo). Por lo tanto, la situación ilustrada en la siguiente figura no está permitida:



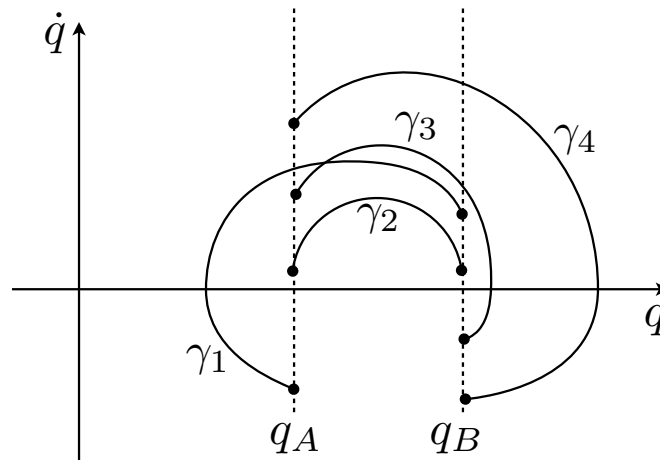
Si la situación de la figura se diera, veríamos que dos partículas son creadas en tiempo t_C , una de ellas aniquilándose en tiempo t_D con la partícula original que proviene desde A , y la otra continuando hasta el punto B .

Al contar con la función $q_i(t)$ podemos deducir otras propiedades cinemáticas de la trayectoria γ_i en cada uno de sus puntos t , tales como la velocidad $\dot{q}_i(t)$, aceleración $\ddot{q}_i(t)$, etc... Nuestra experiencia con la mecánica Newtoniana nos revela que una trayectoria física es una consecuencia de relaciones entre estas cantidades cinemáticas. En efecto, la segunda ley de Newton precisamente consiste en una relación entre la aceleración $\ddot{q}(t)$ y otras cantidades como $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ a través de la fuerza total F_{tot} . Por ejemplo, en el caso en que q fuese una coordenada cartesiana, tenemos:

$$m\ddot{q} = F_{\text{tot}}(q, \dot{q}). \quad (5.1)$$

Resolviendo dicha relación (una ecuación diferencial), somos capaces de deducir la trayectoria física γ . De este modo, nuestro interés consiste deducir la Segunda Ley de Newton a partir de principios más básicos y fundamentales que aquellos considerados por el propio Newton.

Un punto importante a notar, es que en ausencia de una ecuación del tipo (5.1), no existe una relación entre la coordenada $q(t)$ y la velocidad (generalizada) $\dot{q}(t)$. Por lo tanto, en lugar de dibujar trayectorias en el plano $q-t$, podríamos igualmente dibujar trayectorias en el plano $q-\dot{q}$, cada una distinguiendo una manera distinta de ir desde A hasta B , tal como lo muestra la siguiente figura:



La figura anterior muestra 4 trayectorias representando distintas posibilidades para llegar desde el punto A hasta el punto B , sin embargo, esta vez descritas en el plano

q y \dot{q} . Vemos que, al contrario de lo que ocurre en el plano q - t , las trayectorias no unen los mismos puntos. Lo único en común entre todas las trayectorias son las posiciones iniciales y finales q_A y q_B . Esto es porque las velocidades iniciales y finales no necesariamente son comunes para cada trayectoria uniendo A y B . En definitiva, para reflejar nuestra ignorancia sobre la ley concreta relacionando q y \dot{q} , debemos tratar a estas dos cantidades como variables independientes. Cuidado, esto no significa que \dot{q} no sea una derivada de q con respecto al tiempo t .

5.2 Acción de una trayectoria

Para continuar, procedamos asignando a cada trayectoria γ_i un número real S_i . Diremos que S_i es la acción asociada a la trayectoria γ_i . En cierto sentido, la acción S es una función que, actuando sobre la trayectoria γ_i , nos provee el número $S_i = S[\gamma_i] \in \mathbb{R}$. Para hacer esto explícito, mejor escribamos:

$$S_i = S[q_i(t)]. \quad (5.2)$$

Omitiendo el índice i , vemos que S asigna a cada función $q(t)$ un valor en \mathbb{R} . A este tipo de funciones (*e.g.* S) se les llama funcionales, para distinguirlas de las funciones más cotidianas, como $q(t)$, que dependen de variables simples, como el tiempo t . Un ejemplo sencillo de un funcional es una integral. Por ejemplo, la integral I en todo \mathbb{R} de una función arbitraria $f(x)$ es un funcional dado que el resultado es sencillamente un número:

$$I[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

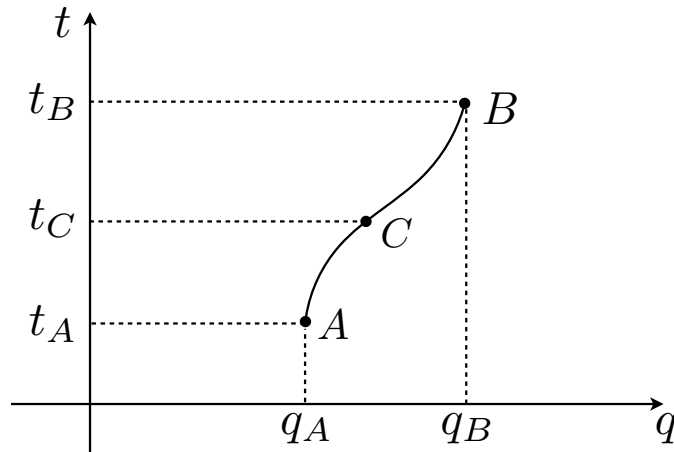
A cada función $f(x)$ la integral asigna un número en \mathbb{R} . También podemos construir funcionales con la ayuda de una segunda función $g(x)$ conocida. Por ejemplo, consideremos el siguiente funcional I_g definido como

$$I_g[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx. \quad (5.4)$$

A veces, la integral de dos funciones distintas pueden tener asignado el mismo número. Volviendo a nuestro caso, distintas trayectorias típicamente tendrían distintos valores para la acción. Sin embargo, dada la inmensidad del número de trayectorias posibles, muchas de estas tendrían asignadas el mismo valor para su acción.

5.3 El Lagrangiano

¿Qué forma tiene la acción de una trayectoria? Es decir, ¿cómo depende el funcional S de la función $q(t)$? Nuestra intención es que la acción caracterice a la trayectoria completa, incorporando información sobre cada porción de ésta. De este modo, la acción debe distinguir la cantidad de camino avanzado en el espacio-tiempo $q-t$. Mientras más tiempo separa al punto inicial A del punto final B , mayor debe ser la cantidad de información que incorpora la acción sobre la trayectoria. Una forma sencilla de incorporar esto en nuestro formalismo es la siguiente: Supongamos que contamos con una trayectoria dada γ_{AB} extendida desde A hasta B . Esta trayectoria puede ser pensada como la suma de dos intervalos menores, uno desde A hasta un punto intermedio C , y otro desde C hasta el punto final B , tal como lo muestra la siguiente figura.

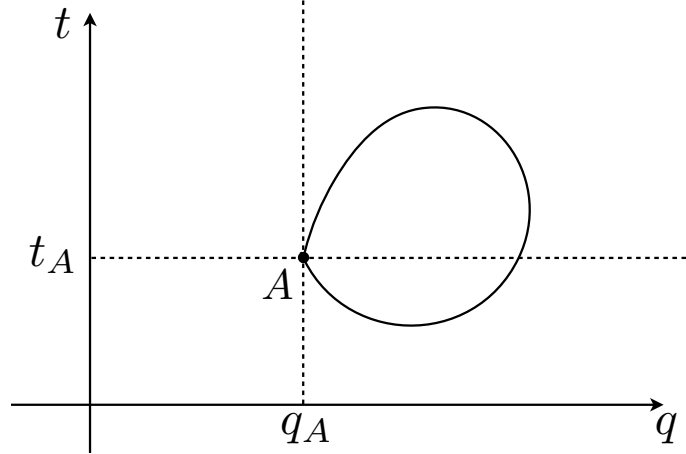


En la figura, la trayectoria γ_{AB} extendida desde A hasta B puede ser pensada como la suma de dos intervalos menores, uno desde A hasta un punto intermedio C , y otro desde C hasta el punto final B . Es decir, el camino γ_{AB} consiste en la suma de dos caminos $\gamma_{AB} = \gamma_{AC} + \gamma_{CB}$. Luego, exigiremos que la acción satisfaga la siguiente propiedad aditiva

$$S[\gamma_{AB}] = S[\gamma_{AC}] + S[\gamma_{CB}]. \quad (5.5)$$

Luego, a mayor camino recorrido, mayor información (acción) asociada a éste. Esta propiedad también nos dice que si ambos puntos A y B coinciden, no hay trayectoria de la cual hablar ($\gamma_{AA} = 0$), y por lo tanto la acción es nula ($S[0] = 0$). Observen que esta afirmación la podemos hacer solamente porque hemos descartamos de plano situaciones en las cuales nuestra partícula, que se desplaza hacia el futuro, pueda dar

un giro y comenzar a viajar hacia el pasado, tal como la que muestra la siguiente figura.



La figura muestra una trayectoria no permitida desde el punto inicial A , hasta el punto final A . Dado que este tipo de trayectorias está descartada, la única trayectoria uniendo A con A , es la trayectoria nula $\gamma_{AA} = 0$. Dado que estamos parametrizando las curvas mediante el tiempo t , una forma simple de hacer la propiedad (5.5) más explícita es a través la introducción de una función del tiempo $L(t)$, que llamaremos Lagrangiano, de modo que:

$$S[\gamma_{AB}] = \int_{t_A}^{t_B} L(t) dt. \quad (5.6)$$

Esta definición automáticamente satisface la propiedad anterior, dado que

$$\int_{t_A}^{t_B} L(t) dt = \int_{t_A}^{t_C} L(t) dt + \int_{t_C}^{t_B} L(t) dt. \quad (5.7)$$

El Lagrangiano $L(t)$ debe contener información sobre la trayectoria, por lo que en principio puede depender del tiempo no solo de forma explícita, sino que también a través de la coordenada generalizada $q(t)$:

$$L(t) = L(q, t). \quad (5.8)$$

Pero esta no es la posibilidad más general. Dado que el Lagrangiano está siendo integrado con respecto al tiempo, también podemos permitir que dependa del tiempo t a través de la velocidad $\dot{q}(t)$. Es decir:

$$L(t) = L(q, \dot{q}, t), \quad (5.9)$$

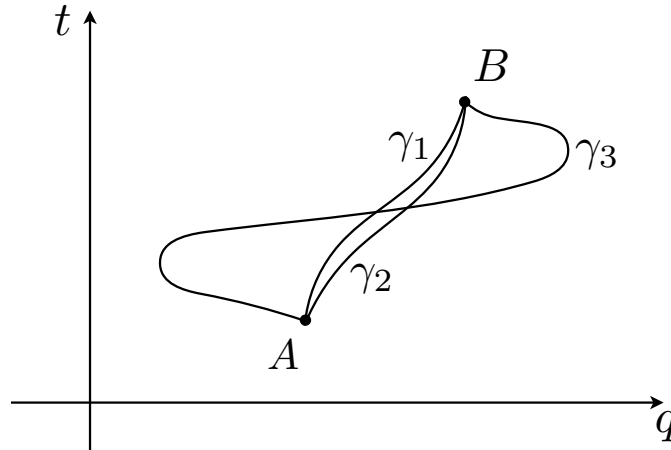
de modo que la acción asociada a cierta curva $q(t)$ es

$$S[q(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (5.10)$$

En cierto sentido, la integral actuando sobre $L(q, \dot{q}, t)$ le baja el orden a la derivada temporal contenida por la velocidad $\dot{q}(t)$. Veremos que esto es cierto en la siguiente sección.

5.4 Variación de la acción

Si el Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ es una función continua de ambas variables q , \dot{q} y t , esperamos que la acción sea un *funcional continuo* de las trayectorias γ . Es decir, si dos trayectorias distintas son muy parecidas, esperamos que las acciones asociadas a estas sean números similares. La siguiente figura intenta reflejar esta idea:



La figura anterior muestra tres trayectorias distintas γ_1 , γ_2 y γ_3 . Las trayectorias γ_1 y γ_2 son parecidas, por lo tanto esperamos que S_1 y S_2 sean números cercanos. Por otro lado, γ_3 es drásticamente distinta a las dos anteriores, por lo que esperamos que S_3 sea un número lejano a S_1 y S_2 . Para darle sentido a esta idea, diremos que dos trayectorias $q'(t)$ y $q(t)$ son infinitesimalmente cercanas si la función diferencia $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$ entre ambas consiste en valores *infinitesimales* en todo el intervalo $[t_A, t_B]$. En otras palabras, $q'(t)$ consiste en $q(t)$ más una pequeña *variación* $\delta q(t)$:

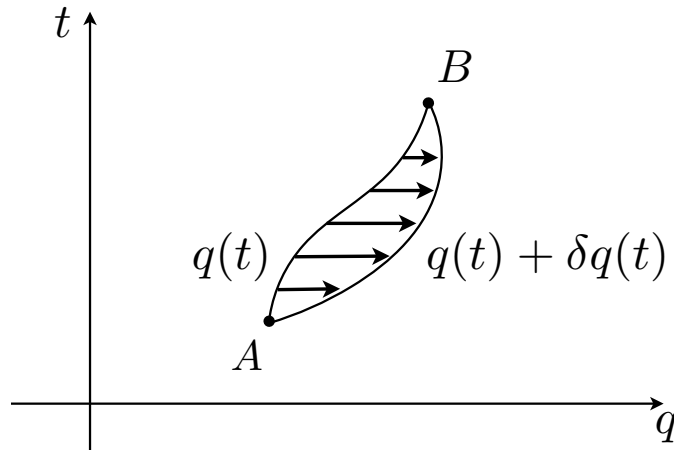
$$q'(t) = q(t) + \delta q(t). \quad (5.11)$$

Dado que los puntos iniciales y finales A y B están fijos, la variación $\delta q(t)$ debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\delta q(t_A) = 0, \quad (5.12)$$

$$\delta q(t_B) = 0. \quad (5.13)$$

La siguiente figura muestra dos curvas $q(t)$ y $q'(t) = q(t) + \delta q(t)$ infinitesimalmente cercanas:



Dadas dos curvas $q(t)$ y $q'(t) = q(t) + \delta q(t)$ infinitesimalmente cercanas, también podemos definir la diferencia de las velocidades de ambas curvas $\delta \dot{q}(t) = \dot{q}'(t) - \dot{q}(t)$. Al igual que antes, la velocidad \dot{q}' puede ser pensada como infinitesimalmente cercana a la velocidad $\dot{q}(t)$:

$$\dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t). \quad (5.14)$$

Derivando (5.11) con respecto al tiempo t y comparando el resultado con (5.14), descubrimos que:

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta q(t). \quad (5.15)$$

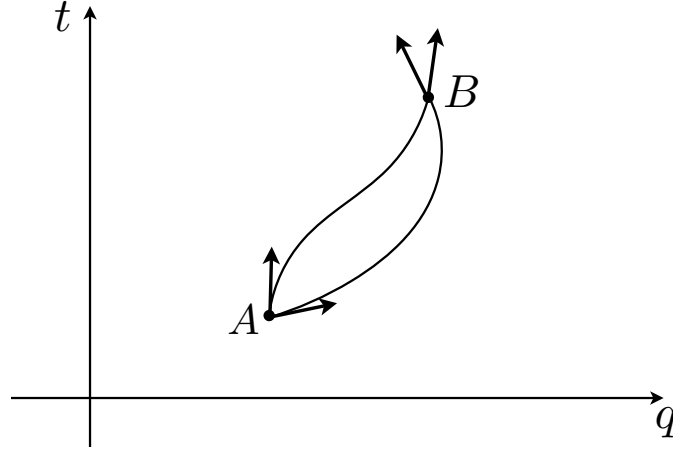
Usaremos este resultado dentro de un momento. Es importante notar que si bien $\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0$, la variación de las velocidades en los puntos A y B no son necesariamente nulas. En otras palabras, en general se cumplirá

$$\delta \dot{q}(t_A) \neq 0, \quad (5.16)$$

$$\delta \dot{q}(t_B) \neq 0. \quad (5.17)$$

Esto es simplemente porque las trayectorias $q(t)$ y $q'(t)$ no necesariamente comparten las mismas velocidades iniciales y finales. La siguiente figura ilustra esta situación en

los extremos A y B . Recordemos que si bien estos puntos están fijos, y coinciden para todas las trayectorias, las velocidades evaluadas en esos puntos no necesariamente coinciden.



En el límite $\delta q(t) \rightarrow 0$ para todo t , ambas trayectorias $q'(t)$ y $q(t)$ coinciden. Por lo tanto, si $\delta q(t)$ es infinitesimal, es de esperar que $S' = S[q'(t)]$ y $S = S[q(t)]$ sean números parecidos, con una discrepancia infinitesimal. Verifiquemos esto explícitamente. Noten que $S' = S[q'(t)] = S[q(t) + \delta q(t)]$ se puede desarrollar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 S' &= \int_{t_a}^{t_b} L(q', \dot{q}', t) dt \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ L + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right\} dt + \mathcal{O}(\delta q^2), \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

donde, para pasar de la segunda a la tercera línea, se expandió $L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)$ en serie de Taylor. La cantidad $\mathcal{O}(\delta q^2)$ representa términos de orden superior, que se asumen pequeños. A partir de este resultado, vemos que la diferencia $\delta S = S' - S$ satisface:

$$\delta S = S' - S = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right\} dt. \tag{5.19}$$

Más aun, con la ayuda de (5.15) podemos reemplazar $\delta \dot{q}(t)$ por $\frac{d}{dt} \delta q(t)$ en el segundo

término de la ecuación anterior, e integrar por partes:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right\} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right\} dt + \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right\} dt.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Observen que el integrando del último término es una derivada total con respecto al tiempo, y por lo tanto la integral puede ser evaluada:

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right\} dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t=t_b} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t=t_a}.\quad (5.21)$$

Sin embargo $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$ y por lo tanto esta integral es idénticamente nula. De este modo, concluimos que la diferencia $\delta S = S' - S$ entre ambas acciones viene dada por:

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q dt\quad (5.22)$$

Es importante notar que esta diferencia es solamente proporcional a la variación δq y no a $\delta \dot{q}$. Esta es la razón por la cual en la ecuación (5.9) permitimos que L dependiera tanto de q como de \dot{q} . Aun cuando el Lagrangiano depende de estas dos cantidades, el resultado de la ecuación (5.22) demuestra que S es sólo funcional de $q(t)$.

Para apreciar esta última afirmación con más nitidez, supongamos que el Lagrangiano L haya sido también función de la aceleración, es decir $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$. Luego, repitiendo los pasos anteriores, obtenemos que la variación infinitesimal $\delta S = S' - S$ viene dada por:

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \right\} \delta q dt + \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right|_{t_B} - \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta \ddot{q} \right|_{t_A}.$$

Es decir, la variación δS depende de la variación $\delta \dot{q}$ evaluada en los puntos A y B que en general no es nula. Esto quiere decir que si el Lagrangiano es de la forma $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$, entonces S es un funcional de q y \dot{q} (aunque esta última cantidad evaluada en los puntos A y B), lo que marcha en contra de la idea original de que la acción es un funcional solamente de la trayectoria $q(t)$.

5.5 Principio de mínima acción

Aún no hemos contestado a la pregunta de cuál es la trayectoria física escogida por la naturaleza para que la partícula se desplace desde A hasta B . El principio de la mínima acción establece que dicha trayectoria corresponde a aquella que *minimiza* el valor de la acción. Recordemos que en cálculo diferencial, cuando deseamos encontrar el mínimo de una función $f(x)$, primero buscamos aquellos puntos donde la derivada $f'(x)$ se anula. En otras palabras, cuando

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0, \quad (5.23)$$

para $dx \neq 0$. En completa analogía con el cálculo diferencial, el valor mínimo de la acción S ocurrirá para aquellas trayectorias $q(t)$ donde la variación δS se anula

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q dt = 0 \quad (5.24)$$

para una variación arbitraria $\delta q(t) \neq 0$. Dado que esto debe ocurrir para cualquier deformación $\delta q(t) \neq 0$ infinitesimal, concluimos que para dicha curva necesariamente se cumple

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (5.25)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange, y nos entrega la ecuación de movimiento que rige el movimiento de la partícula desde el punto inicial A hasta el punto final B . No es difícil generalizar el resultado previos al caso de N partículas descritas por las posiciones $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$. Si repetimos la discusión anterior con un Lagrangiano $L = L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_N, \dot{q}_N)$, es directo deducir que habrán N ecuaciones de Euler-Lagrange de la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.26)$$

Además, notemos que en ningún momento asumimos que la coordenada q debe ser cartesiana. De hecho, pudimos haber repetido todos los pasos anteriores refiriéndonos a cualquier tipo de coordenadas (cartesianas, angulares, radiales, etc.). Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.26) son completamente generales, y válidas para cualquier tipo de coordenadas que elijamos usar para describir un sistema físico determinado.

5.6 Forma del Lagrangiano

Por supuesto, de nada nos sirven estos resultados sin contar con una forma concreta del Lagrangiano L . Durante las siguientes secciones nos dedicaremos a demostrar, a partir de principios de simetrías, que el Lagrangiano L de un sistema dado viene dado por:

$$L = K - U, \quad (5.27)$$

donde K es la energía cinética del sistema y U es la energía potencial del sistema. Antes de hacer esto, comprobemos a través de algunos ejemplos de cómo la segunda ley de Newton emerge a partir de (5.27).

5.6.1 Ejemplo 1

Consideremos (5.27) para el caso básico de una partícula de masa m confinada a moverse a lo largo de una dimensión parametrizada por la coordenada cartesiana x . Esto es

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x). \quad (5.28)$$

Veamos la forma que adquiere la ecuación de Euler-Lagrange. Las respectivas derivadas parciales de L con respecto a x y \dot{x} son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (5.29)$$

Luego, la ecuación de Euler-Lagrange (5.25) implica

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (5.30)$$

Esta es la segunda Ley de Newton, donde identificamos $F = -\partial U/\partial x$.

5.6.2 Ejemplo 2

Repitamos el ejemplo anterior, pero consideremos esta vez el caso de una partícula de masa m en movimiento por todo el espacio (de 3 dimensiones), bajo la influencia de un potencial $U(\vec{r})$. En este caso el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}). \quad (5.31)$$

Escrito en términos de coordenadas cartesianas, tenemos

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z). \quad (5.32)$$

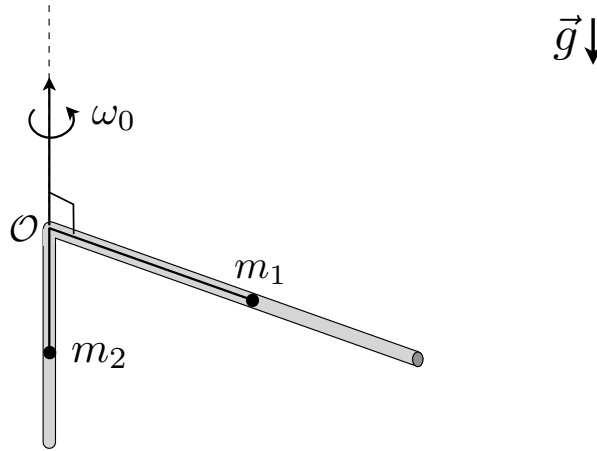
Luego, calculando las derivadas parciales de L con respecto a x , \dot{x} , y , \dot{y} , z y \dot{z} , las ecuaciones de Euler-Lagrange nos entregan

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (5.33)$$

Por supuesto, estos tres resultados pueden ser combinados en una sola ecuación vectorial de la forma $m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -\nabla U$, que es la segunda ley de Newton con una fuerza conservativa $\vec{F} = -\nabla U$.

5.6.3 Ejemplo 3

Recordemos al siguiente ejemplo visto en la sección 2.11, donde dos masas m_1 y m_2 permanecen unidas por una cuerda ideal inextensible (ver siguiente figura):



Las posiciones de ambas masas son $\vec{r}_1 = \rho \hat{\rho}$, y $\vec{r}_2 = z \hat{k}$. Recordemos que $\rho - z = L$, por lo que la posición de m_2 la podemos expresar en términos de ρ como $\vec{r}_2 = (\rho - L) \hat{k}$. Luego, las velocidades son

$$\vec{v}_1 = \dot{\rho} \hat{\rho} + \omega_0 \rho \hat{\phi}, \quad \vec{v}_2 = \dot{\rho} \hat{k}. \quad (5.34)$$

De estos resultados, podemos inferir que la energía cinética del sistema viene dado por:

$$K = \frac{m_1}{2} (\dot{\rho}^2 + \omega_0^2 \rho^2) + \frac{m_2}{2} \dot{\rho}^2. \quad (5.35)$$

Por su parte, la energía potencial del sistema viene dada solo por la fuerza de gravedad, la que podemos escribir como

$$U = m_2gz = m_2g(\rho - L). \quad (5.36)$$

Todo esto implica que el Lagrangiano del sistema viene dado por

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_0^2\rho^2 - m_2g(\rho - L). \quad (5.37)$$

Las derivadas parciales de este Lagrangiano con respecto a ρ y $\dot{\rho}$ son

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m_1\omega_0^2\rho - m_2g, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = (m_1 + m_2)\dot{\rho}. \quad (5.38)$$

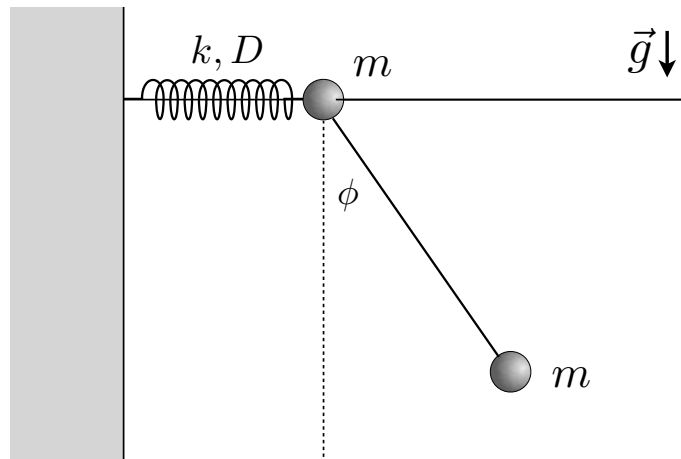
Luego, usando (5.25) vemos que

$$\ddot{\rho} - \frac{m_1\omega_0^2}{(m_1 + m_2)}\rho + \frac{m_2g}{(m_1 + m_2)} = 0, \quad (5.39)$$

la que es idéntica a la ecuación de movimiento (2.158).

5.6.4 Ejemplo 4

Recordemos ahora el ejemplo analizado en la sección 4.2.1, donde consideramos dos partículas de igual masa m en contacto con una pared mediante tal como lo indica la siguiente figura:



Las posiciones de ambas partículas son $\vec{r}_1 = x\hat{i}$, y $\vec{r}_2 = x\hat{i} + L\hat{\rho}$. Luego, las velocidades son

$$\vec{v}_1 = \dot{x}\hat{i}, \quad \vec{v}_2 = \dot{x}\hat{i} + L\dot{\phi}\hat{\phi}. \quad (5.40)$$

A partir de este resultado, vemos que la energía cinética del sistema K es

$$K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + L^2\dot{\phi}^2\right). \quad (5.41)$$

Por otro lado, la energía potencial U del sistema tiene contribuciones provenientes de la energía potencial gravitacional $U_g = mgL(1 - \cos\phi)$ y la energía potencial del resorte $U_k = \frac{k}{2}(x - D)^2$:

$$U = mgL(1 - \cos\phi) + \frac{k}{2}(x - D)^2. \quad (5.42)$$

Con todo lo anterior, el Lagrangiano del sistema consiste en:

$$L = m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(2L\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + L^2\dot{\phi}^2\right) - mgL(1 - \cos\phi) - \frac{k}{2}(x - D)^2. \quad (5.43)$$

Las derivadas parciales de L son:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - D), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mL\dot{\phi}\cos\phi, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mL\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgL\sin\phi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mL\dot{x}\cos\phi + mL^2\dot{\phi}. \quad (5.45)$$

Con estos resultados, las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.26) adquieren la forma

$$2m\ddot{x} + mL\ddot{\phi}\cos\phi - mL\dot{\phi}^2\sin\phi + k(x - D) = 0, \quad (5.46)$$

$$mL\ddot{x}\cos\phi + mL^2\ddot{\phi} + mgL\sin\phi = 0. \quad (5.47)$$

No es difícil comprobar que estas dos ecuaciones de movimiento son equivalentes a las ecuaciones (4.25) y (4.26) encontradas en la Sección 4.2.1.

5.7 Acciones y Lagrangianos equivalentes

Supongamos dos acciones $S[q(t)]$ y $S'[q(t)] = S[q(t)] + S_c$, donde S_c es una constante. Dado que S_c es una constante (y por lo tanto no cambia al ser evaluada para distintas trayectorias $q(t)$) ambas acciones $S[q(t)]$ y $S'[q(t)]$ darían como resultado las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange, y por lo tanto la misma trayectoria física.

Esto quiere decir que $S[q(t)]$ y $S'[q(t)]$ son equivalentes y, por lo tanto, en la práctica no podemos distinguir entre ambas. Esta situación se puede articular en términos del Lagrangiano de la siguiente forma. Supongamos dos Lagrangianos $L(q, \dot{q}, t)$ y $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + F(q, \dot{q}, t)$. Luego, si F se puede escribir como la derivada total con respecto al tiempo t de una función arbitraria G , que solo depende de $q(t)$, y de t ,

$$F = \frac{d}{dt}G(q(t), t), \quad (5.48)$$

entonces se cumple que:

$$S'[q(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L'(q, \dot{q}, t) dt \quad (5.49)$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} (L(q, \dot{q}, t) + F(q, \dot{q}, t)) dt \quad (5.50)$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}G(q(t), t) dt \quad (5.51)$$

$$= S[q(t)] + G(q_b, t_b) - G(q_a, t_a). \quad (5.52)$$

Puesto que a y b son fijos, la cantidad $G(q(b)) - G(q(a))$ es simplemente una constante, y por lo tanto vemos que $L(q, \dot{q}, t)$ y $L'(q, \dot{q}, t)$ proveen dos acciones equivalentes. De hecho, es posible verificar que las ecuaciones de Euler-Lagrange deducidas a partir de $L(q, \dot{q}, t)$ y $L'(q, \dot{q}, t)$ son idénticas, y por lo tanto ambos Lagrangianos implican las mismas ecuaciones de movimiento (para comprobar esto es importante notar que G sólo es función de q y t , pero no de \dot{q}).

5.8 Simetrías de la naturaleza

La naturaleza respeta simetrías que consideraremos fundamentales, pues nos recuerdan que no hay nada especial sobre nuestra ubicación (o velocidad). Veamos a continuación estas simetrías:

5.8.1 Traslación espacial

Nuestra experiencia nos indica que la ubicación espacial donde se desarrolla cierto experimento es irrelevante para que éste analice cierto fenómeno (de otro modo no podríamos comparar resultados, y por lo tanto ¡no podríamos hacer ciencia!). Por ejemplo, supongamos que diseñamos un experimento que consiste en medir el periodo

T con el cual oscilan dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de largo natural L y constante elástica k . Para evitar sutilezas innecesarias, supongamos que el universo entero sólo consiste en usted (el observador o la observadora) y estas partículas unidas por el resorte. Si desplazamos la posición de ambas partículas un metro desde su posición original hacia cualquier dirección, esperamos que el nuevo sistema se comporte de la misma forma que el sistema original, y mediremos el mismo periodo T .

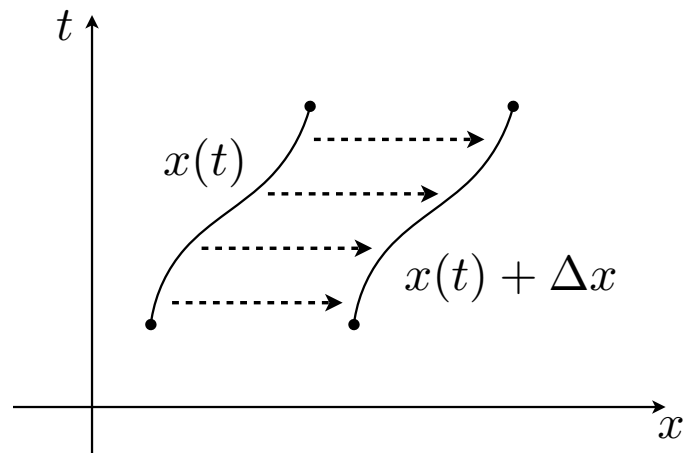
A esta propiedad la llamamos simetría bajo traslación espacial, y puede ser establecida en términos matemáticos con la ayuda de coordenadas *cartesianas* indicando la posición de cada partícula involucrada. Una traslación de un sistema con N partículas consiste en reubicar cada una de estas partículas desplazándolas simultáneamente la misma distancia en la misma dirección. Si las posiciones de las partículas vienen dadas por coordenadas cartesianas $q_i = x_i$ entonces una traslación hacia la derecha en una distancia Δx consiste en la operación:

$$x_i(t) \rightarrow x'_i(t) = x_i(t) + \Delta x, \quad (5.53)$$

Dado que la distancia Δx es una constante, es directo constatar que las velocidades no son afectadas por esta operación. Es decir:

$$\dot{x}_i(t) \rightarrow \dot{x}'_i(t) = \dot{x}_i(t). \quad (5.54)$$

Se dice que la velocidad es *invariante* bajo una traslación espacial. La siguiente figura ilustra el efecto de una traslación espacial sobre una trayectoria arbitraria $x(t)$.



Antes de utilizar (5.53) y (5.54) debemos esforzarnos en entender bien sus significados. La ecuación (5.53) establece una relación entre dos cantidades: $x_i(t)$ es la coordenada

de la i -ésima partícula en el sistema original. $x'_i(t)$ es la coordenada generalizada de la i -ésima partícula en un nuevo sistema, construido a partir del primero. La posición $x'_i(t)$ se encuentra a una distancia Δx de la posición original $x_i(t)$. Tal como lo sugiere la figura anterior, es imperativo que también hagamos lo mismo con las condiciones iniciales.

Ahora bien, las leyes físicas del nuevo sistema estarán determinadas por un Lagrangiano L' , que necesariamente es el mismo Lagrangiano que gobierna las leyes físicas del primer sistema (solo puede haber un Lagrangiano para todo el universo), pero evaluado con las posiciones de las partículas desplazadas. Esto es

$$L' = L(x', \dot{x}', t) = L(x + \Delta x, \dot{x}, t) \quad (5.55)$$

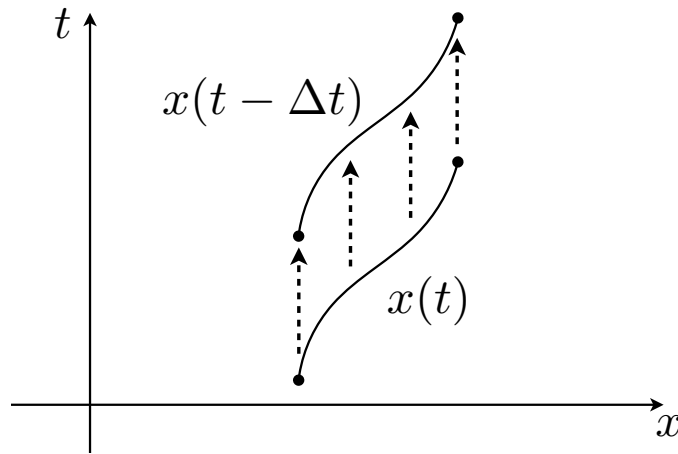
Considerando un desplazamiento Δx infinitesimal $\Delta x = \epsilon$, podemos comparar este Lagrangiano con aquel evaluado sobre la coordenada y velocidad de la partícula no desplazada. Es decir:

$$L' = L(x', \dot{x}', t) = L(x + \epsilon, \dot{x}, t) = L + \frac{\partial L}{\partial x} \epsilon. \quad (5.56)$$

En otras palabras, dos trayectorias idénticas, pero separadas por una distancia infinitesimal ϵ , necesariamente tienen Lagrangianos que difieren en una cantidad $\frac{\partial L}{\partial x} \epsilon$. Explotaremos este resultado dentro de un momento.

5.9 Traslación temporal

En forma similar al caso de traslaciones espaciales, también esperamos que un experimento no dependa de cuando se realiza. En el caso de las dos masas unidas por un resorte, mediremos el mismo periodo T independientemente del tiempo en que el experimento comience a funcionar. Veamos esto matemáticamente: Consideremos un sistema cuyas partículas tienen posiciones $x_i(t)$ en cierto tiempo t . Una traslación temporal de este sistema en un lapso de tiempo Δt constante equivale a desplazar la trayectoria $x(t)$ hacia adelante en el tiempo tal como lo ilustra la figura siguiente.



La nueva trayectoria $x'(t)$ debe tener valores en el eje x que coincidan con los valores de la trayectoria original $x(t)$ pero evaluada en un tiempo anterior $t - \Delta t$. En otras palabras:

$$x(t) \rightarrow x'(t) = x(t - \Delta t). \quad (5.57)$$

Repitiendo el mismo razonamiento para la velocidad, encontramos que:

$$\dot{x}(t) \rightarrow \dot{x}'(t) = \dot{x}(t - \Delta t). \quad (5.58)$$

En el caso en que Δt corresponde a un lapso de tiempo infinitesimal $\Delta t = \epsilon$, tendremos:

$$x'(t) = x_i(t - \epsilon) = x(t) - \dot{x}(t)\epsilon. \quad (5.59)$$

$$\dot{x}'(t) = \dot{x}(t - \epsilon) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\epsilon. \quad (5.60)$$

Con estos resultados, y volviendo al caso de una sola partícula, podemos comparar los Lagrangianos evaluados sobre las coordenadas y velocidades de la partícula desplazada

y no desplazada, tal como lo hicimos con el caso de una traslación espacial. Esto es:

$$L' = L(x', \dot{x}', t) = L(x + \dot{x}\epsilon, \dot{x} + \ddot{x}\epsilon, t) = L - \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} \right\} \epsilon. \quad (5.61)$$

Utilizaremos este resultado dentro de un momento.

5.10 Transformaciones de Galileo

Por último, no olvidemos la existencia de las transformaciones de Galileo, que relacionan las observaciones hechas por dos observadores inerciales, uno de ellos moviéndose a una velocidad v_0 constante con respecto a otro. Siguiendo la misma notación anterior, estas vienen dadas por:

$$x(t) \rightarrow x'(t) = x(t) - v_0 t, \quad (5.62)$$

$$\dot{x}(t) \rightarrow \dot{x}'(t) = \dot{x}(t) - v_0. \quad (5.63)$$

Si v_0 es positiva, interpretamos la trayectoria $x'(t)$ es obtenida a partir de $x(t)$ dándole a la partícula original un impulso hacia la izquierda. Procediendo de la misma forma que antes, si consideramos una velocidad v_0 infinitesimal $v_0 = \epsilon$ encontramos que:

$$L' = L(x', \dot{x}', t) = L(x + \epsilon t, \dot{x} + \epsilon, t) = L - \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} t - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\} \epsilon. \quad (5.64)$$

A continuación explotaremos los resultados (5.56), (5.61) y (5.64) para deducir la forma más general posible de un Lagrangiano describiendo un sistema consistente en una sola partícula.

5.11 Consecuencias de las simetrías sobre la acción

Las leyes de la física deben ser las mismas independientemente de la ubicación espacial o temporal elegidas para constatarlas. De igual forma, deben ser las mismas para distintos observadores inerciales. Como veremos, el formalismo Lagrangiano permite incorporar estos requerimientos en forma muy elegante, restringiendo dramáticamente la forma del Lagrangiano. Para esto, basta exigir que, en cualquiera de los tres casos anteriores, la acción S' correspondiente al sistema *transformado* sea equivalente a la acción S correspondiente al sistema original. En término del Lagrangiano, esto quiere decir que el Lagrangiano *transformado* L' debe ser equivalente al Lagrangiano no transformado L . En otras palabras, la diferencia $L' - L$ debe ser igual a una derivada total con respecto al tiempo. Veamos la consecuencia de este requisito para cada uno de los casos anteriores.

5.11.1 Simetría de traslación espacial

En el caso de traslaciones espaciales, el requisito de que $L' - L$ sea una derivada total con respecto a t de una función que solo depende de $x(t)$ y de t , implica que existe una función $G(x, t)$ tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}G(x, t). \quad (5.65)$$

Esta expresión puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}G(x, t)\dot{x} + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (5.66)$$

Recordemos que podemos tratar x , \dot{x} y t como variables independientes cuando hablamos del Lagrangiano. Para desarrollar (5.65), separemos G en dos partes:

$$G(x, t) = \bar{G}(x, t) + g(t). \quad (5.67)$$

La función $\bar{G}(x, t)$ es tal que $\partial_x \bar{G} \neq 0$. Luego tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{G}(x, t)\dot{x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (5.68)$$

Si integramos esta expresión con respecto a x , obtenemos:

$$L = \dot{x}\bar{G}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int dx \bar{G}(x, t) + \dot{g}(t)x + f(\dot{x}, t), \quad (5.69)$$

donde $f(\dot{x}, t)$ es una función arbitraria de \dot{x} y t aun por determinar. Notemos que hemos permitido que la derivada parcial ∂_t salga de la integral $\int dx$. Esto es porque x y t son variables independientes. Ahora, los dos primeros términos pueden ser agrupados de modo que:

$$L = \frac{d}{dt} \int dx \bar{G}(x, t) + \dot{g}(t)x + f(\dot{x}, t). \quad (5.70)$$

Dado que el primer término es una derivada total con respecto al tiempo de una función que solo depende de x y t , podemos omitirlo. De esta forma, el requisito de que la acción sea invariante bajo traslaciones espaciales ha reducido la forma del Lagrangiano a

$$L = f(\dot{x}, t) + h(t)x, \quad (5.71)$$

donde $h(t) = \dot{g}(t)$.

5.11.2 Simetría de traslación temporal

El caso de traslaciones temporales es un poco más sutil. Siguiendo la misma filosofía empleada para el caso de traslaciones espaciales, vemos que debemos exigir que $\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}$ sea una derivada total con respecto al tiempo de una función que no dependa de la velocidad. Notemos primero que:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.72)$$

Vemos que si $\partial_t L = 0$ y, además, que si L es independiente de \dot{x} , entonces es posible satisfacer el requisito deseado. Pero estas condiciones son muy restrictivas.

De hecho, estamos cometiendo un error. Lo que estamos omitiendo en esta discusión es que la traslación $t \rightarrow t - \epsilon$ también afecta a los límites de integración de la acción, lo que no está capturado por el Lagrangiano. Es decir:

$$S' = \int_{t_a+\epsilon}^{t_b+\epsilon} L' dt. \quad (5.73)$$

Si desarrollamos esta expresión, vemos que

$$S' = \int_{t_a}^{t_b} L' dt + \int_{t_b}^{t_b+\epsilon} L' dt - \int_{t_a}^{t_a+\epsilon} L' dt \quad (5.74)$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} L' dt + \epsilon L'(t_b) - \epsilon L'(t_a), \quad (5.75)$$

donde en la segunda igualdad usamos el hecho de que ϵ es una cantidad infinitesimal. Ahora, insertando en (5.75) la expresión obtenida para L' , encontramos que:

$$S' = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ L - \epsilon \frac{dL}{dt} + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} \right\} dt + \epsilon L(t_b) - \epsilon L(t_a) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_a}^{t_b} L dt + \epsilon \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= S + \epsilon \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Luego, las acciones son equivalentes solo si $\partial_t L = 0$. En otras palabras, si L depende de t solo a través de x y \dot{x} , la acción es automáticamente invariante bajo traslaciones temporales. Tomando en cuenta este requisito, la acción está restringida a tener la forma

$$L = f(\dot{x}) + cx, \quad (5.78)$$

donde c es una constante.

5.11.3 Simetría de Galileo

Por último, impongamos simetría de Galileo. Esto significa exigir que se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{\partial L}{\partial x} t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} G(x, t), \quad (5.79)$$

donde $G(x, t)$ solo es función del espacio y el tiempo. Pero dado que L tiene la forma dictada por (5.78), vemos que:

$$ct + f'(\dot{x}) = \partial_x G \dot{x} + \partial_t G. \quad (5.80)$$

La única forma de satisfacer ambos lados de la ecuación es que $\partial_x G$ sea una constante, y que $\partial_t G = ct$. Esto es posible:

$$G(x, t) = mx + \frac{t^2}{2}, \quad (5.81)$$

donde m es una constante. Por otro lado, esto implica que

$$f(\dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2. \quad (5.82)$$

El resultado de esto es que ahora el Lagrangiano está restringido a tener la forma:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + cx. \quad (5.83)$$

La cantidad m no viene determinada por ningún principio, y por lo tanto corresponde a una característica esencial de la partícula descrita. Para determinar su valor debemos recurrir a experimentos. Al ingresar esta forma del Lagrangiano a las ecuaciones de Euler-Lagrange, se encuentra que:

$$m\ddot{x} = c. \quad (5.84)$$

En efecto, podemos ver que esta ecuación es invariante bajo todas las transformaciones que hemos estado estudiando. Si hubiésemos impuesto una simetría adicional de reflexión $x \rightarrow x' = -x$, entonces habríamos encontrado que $c = 0$. Esta simetría nos dice que no hay una *orientación* privilegiada en nuestro universo de juguete 1-dimensional. En dicho caso, al variar la acción, habríamos derivado la primera Ley de Newton:

$$m\ddot{x} = 0. \quad (5.85)$$

Este resultado tiene sentido: Si existiese una fuerza externa actuando sobre nuestra partícula, necesariamente no se cumplirían las simetrías de las cuales hemos hablado. Pero entonces, ¿de dónde surgen las fuerzas? Para responder a esta pregunta debemos analizar el caso de varias partículas.

5.12 Acción para varias partículas

Supongamos que tenemos dos partículas descritas por las coordenadas x_1 y x_2 . Si las partículas no interactúan (la una no siente la presencia de la otra), entonces es razonable que el Lagrangiano sea la suma de los Lagrangianos individuales de cada partícula:

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2. \quad (5.86)$$

Para incorporar interacciones, basta agregar términos al Lagrangiano que dependa de las posiciones de las partículas. De hecho, repitiendo todos los pasos anteriores, es posible deducir que el Lagrangiano más general (con interacciones sólo dependientes en las posiciones) respetando todas las simetrías discutidas anteriormente es de la forma:

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - U(x_1 - x_2), \quad (5.87)$$

donde $U(x_1 - x_2)$ es una función arbitraria de la diferencia $x_1 - x_2$. Esto tiene sentido, ya que el valor de $U(x_1 - x_2)$ no cambia bajo traslaciones espaciales y transformaciones de Galileo (También se puede verificar que no afecta la condición impuesta por la simetría de traslación temporal).

La función U se llama función potencial y determina la interacción (fuerza) entre ambas partículas. Ahora es fácil anticipar que el Lagrangiano más general para un sistema consistente en N partículas tiene la forma:

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - U(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1, \dots), \quad (5.88)$$

donde U es una función potencial (arbitraria) que sólo depende de las diferencias de las posiciones de las partículas (y que determina la interacción entre ellas). Dado que sólo podemos ingresar diferencias de posiciones $x_i - x_j$, las ecuaciones de movimiento garantizan la Tercera Ley de Newton, es decir, que la reacción es igual a la acción pero apuntando en el sentido opuesto. El formalismo Lagrangiano que hemos deducido no permite deducir cual es la forma particular de esta función (salvo que debe depender de diferencias de posiciones), y para ello debemos recurrir a experimentos. En el caso en que las interacciones se den sólo entre pares de partículas, el potencial será de la forma:

$$U(x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1, \dots) = \sum_{i < j} U_{ij}(x_i - x_j) \quad (5.89)$$

donde U_{ij} son funciones que dependen sólo de la diferencia $x_i - x_j$. Notemos que hemos escrito la suma con la regla $i < j$ para no repetir la aparición de $U_{ij} = U_{ji}$.

Para concluir esta sección, notemos que el Lagrangiano puede ser expresado en la forma más sucinta:

$$L = K - U, \quad (5.90)$$

donde K es la energía cinética del sistema.

5.13 De regreso a una sola partícula

En nuestro análisis de la Sección 5.11 vimos que un sistema consistente en una sola partícula, satisfaciendo simetría de traslación espacial, temporal y de Galileo, necesariamente tiene la forma $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2$. Es decir, en dichos sistemas no hay fuerzas actuando sobre la partícula. Por otro lado, recordemos que en nuestro ejemplo de la Sección 5.6.1 vimos que es posible obtener la segunda ley de Newton para una partícula a partir del Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x). \quad (5.91)$$

¿De dónde proviene el potencial U ? La respuesta reside en que U debe provenir de un agente externo. Al ser externo, este agente no aparecerá en el Lagrangiano a través de coordenadas generalizadas (como x). Para entender esto, consideremos un Lagrangiano describiendo dos partículas, satisfaciendo todas las simetrías previamente discutidas (traslación espacial, temporal y de Galileo):

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - U(x_1 - x_2). \quad (5.92)$$

La ecuación de movimiento para la partícula 2 viene dada por

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0. \quad (5.93)$$

Notemos que en el límite $m_2 \rightarrow \infty$, la partícula 2 debe satisfacer $\ddot{x}_2 = 0$ independiente de la fuerza $F_{12} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$ que ejerce 1 sobre ella. Luego, \dot{x}_2 debe ser constante. Si nos situamos en el sistema inercial donde $\dot{x}_2 = 0$, entonces la partícula 2 permanecerá inmóvil, con una posición fija $x_2 = x_0$, mientras que la partícula 1 (que ahora podemos describir mediante la coordenada $x_1 = x$) podrá moverse bajo la influencia de la partícula 2 a través del potencial $U(x - x_0)$. Es decir, el Lagrangiano describiendo la dinámica de la partícula 1 será (5.92) con el reemplazo $x_2 = x_0$ y $\dot{x}_2 = 0$:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x - x_0). \quad (5.94)$$

Notemos que este Lagrangiano ya no satisface las simetrías discutidas anteriormente. Esto es debido a que la partícula 2 ha sido relegada a un agente externo, y por lo tanto su dinámica no está descrita mediante coordenadas generalizadas (que son las que satisfacen las simetrías en cuestión). Aún así, a partir de este Lagrangiano se puede deducir las ecuaciones de movimiento para una partícula, con una fuerza externa conservativa actuando sobre ésta.

Por cierto, este análisis nos permite tener un mejor entendimiento sobre agentes externos: Los agentes externos son agentes que han sido excluidos de la descripción debido a que sus movimientos no se ven afectados por las partículas del sistema que estamos estudiando. Por ejemplo, en el caso de la partícula 2 que acabamos de discutir, si su masa es muy grande, entonces la partícula 1 no podrá afectar su inercia y, por lo tanto, no necesitamos preocuparnos de resolver ecuaciones de movimiento para entender su movimiento. Esto es cierto con respecto al rol de paredes, suelos, techos, etc. en muchos de los problemas vistos a lo largo de este curso. Cuando analizamos un problema en donde participa una pared, básicamente estamos asumiendo que la masa de la pared es muy grande comparada con la masa de las partículas que interactúan con ella (por ejemplo, a través de un resorte) y por lo tanto no necesitamos describir su dinámica. Por supuesto, esto no significa que la pared no pueda ejercer una influencia sobre las partículas que describimos a través de coordenadas generalizadas.

5.14 Una partícula en dos y tres dimensiones

Veamos ahora cómo obtener la acción de una sola partícula en dos dimensiones mediante argumentos de simetría. Para ello, utilicemos como escenario un espacio plano parametrizado con coordenadas cartesianas (x, y) , y designamos a la posición de la partícula mediante el vector posición $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. Requiriendo que la acción sea invariante bajo traslaciones espaciales, temporales, y transformaciones de Galileo en las direcciones \hat{i} y \hat{j} por separado, vemos que L debe tener la forma:

$$L = \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 + \frac{\beta}{2}\dot{y}^2 + \gamma\dot{x}\dot{y} + c_1x + c_2y. \quad (5.95)$$

Ahora que tenemos dos dimensiones nos enfrentamos con la posibilidad de exigir que la acción sea invariante bajo rotaciones. Una rotación en un ángulo θ traslada a la partícula en \vec{r} a una nueva posición \vec{r}' dada por

$$\vec{r}' = R(\theta)\vec{r}, \quad (5.96)$$

donde $R(\theta)$ representa dicha rotación. Esta transformación, expresada en términos matriciales, tiene la forma:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.97)$$

y por lo tanto, las nuevas coordenadas x' e y' son:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad (5.98)$$

$$y' = y \cos \theta + x \sin \theta. \quad (5.99)$$

Consideremos ahora una rotación infinitesimal, con $\theta = \epsilon$. A primer orden, el resultado de dicha rotación es

$$x' = x - \epsilon y, \quad (5.100)$$

$$y' = y + \epsilon x. \quad (5.101)$$

Insertando estas relaciones en $L' = L(\vec{r}')$, y expandiendo a primer orden en ϵ , obtenemos:

$$L' = L - \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial x} y - \frac{\partial L}{\partial y} x \right) - \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{x} \right). \quad (5.102)$$

Juntando este resultado con (5.95), vemos que

$$L' = L - \epsilon(\alpha - \beta)\dot{x}\dot{y} + \epsilon\gamma(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \epsilon(c_1 y - c_2 x). \quad (5.103)$$

Ahora vemos que la única forma de que $L' - L$ sea una derivada total con respecto al tiempo de una cantidad que sólo depende de las coordenadas (y del tiempo), es que $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$, y que $c_1 = c_2 = 0$. De este modo, concluimos que el Lagrangiano de una partícula libre en dos dimensiones viene dado por:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (5.104)$$

No es difícil extender estas ideas para incluir varias partículas (tal como ya lo hemos hecho para el caso de varias partículas en una dimensión). El resultado es

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (5.105)$$

donde i se refiere a la i -ésima partícula. Más aún, los pasos anteriores (para escribir la acción de una o varias partículas en dos dimensiones) pueden ser extendidos a tres

dimensiones. Aquello que fue cierto para el plano x - y , también tendrá que ser válido para los planos y - z y x - z por separado, y por lo tanto llegaremos a la conclusión de que el Lagrangiano más general, satisfaciendo simetrías de traslación espacial, temporal, simetría de Galileo, y simetría bajo rotaciones corresponde a

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (5.106)$$

donde $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ es la posición de la i -ésima partícula.

5.15 Pequeñas oscilaciones con Lagrangianos

La mecánica Lagrangiana es particularmente útil para estudiar sistemas cerca del equilibrio estable. Notemos que si una acción es cuadrática con respecto a las coordenadas y velocidades generalizadas, las ecuaciones de movimiento necesariamente serán lineales. Por ejemplo, consideremos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (x - D)^2. \quad (5.107)$$

Este Lagrangiano describe una partícula en una dimensión sometida a la influencia de un resorte. Las derivadas parciales con respecto a x y \dot{x} son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - D), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (5.108)$$

Estas derivadas son lineales con respecto a x y \dot{x} . Esto quiere decir que la ecuación de movimiento (es decir, la ecuación de Euler-Lagrange) será lineal:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - D) = 0. \quad (5.109)$$

De hecho, por la forma en que participan en la ecuación de Euler-Lagrange, vemos que las derivadas (5.108) nos ofrecen una forma de identificar puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio del sistema serán aquellos donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (5.110)$$

De esta forma, la ecuación (5.108) nos revela que $\dot{x} = 0$ y $x = D$ corresponde a un punto de equilibrio. Luego, si definimos $\delta x = x - x_e$, podemos volver al Lagrangiano y reemplazar x y \dot{x} en términos de δx , obteniendo:

$$L = \frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 - \frac{k}{2} \delta x^2. \quad (5.111)$$

Ahora las coordenadas y velocidades generalizadas son δx y $\delta \dot{x}$ respectivamente. Y la ecuación de Euler-Lagrange obtenida a partir de este Lagrangiano es

$$\delta \ddot{x} + \frac{k}{m} \delta x = 0. \quad (5.112)$$

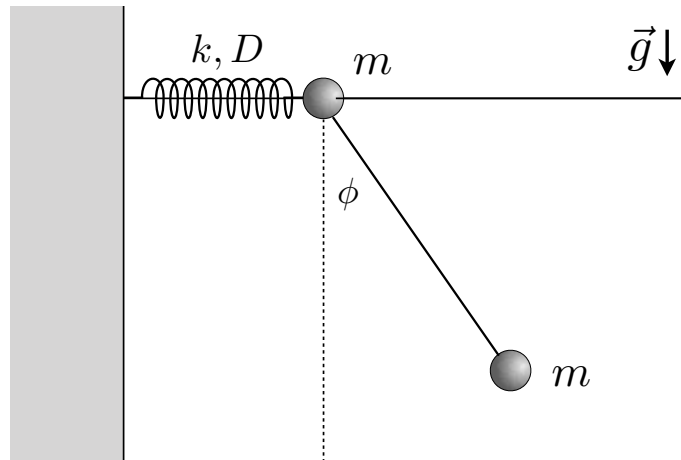
Toda esta discusión revela una estrategia general para estudiar pequeñas oscilaciones con Lagrangianos. Si contamos con un Lagrangiano con N coordenadas generalizadas q_i , podemos identificar los puntos de equilibrio del sistema mediante las ecuaciones algebraicas

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (5.113)$$

Estas ecuaciones, por si solas, no revelarán necesariamente si el punto de equilibrio es estable o no, pero usualmente tendremos un entendimiento del sistema no solo basado en el Lagrangiano (es decir, usualmente conoceremos la composición del sistema, y podremos anticipar si los puntos son de equilibrio estable o no). Luego, después de encontrar los puntos de equilibrios $q_{i,e}$ y $\dot{q}_{i,e}$, podemos expandir el Lagrangiano alrededor de estos puntos hasta segundo orden (de modo que las ecuaciones de movimiento sean lineales). Veamos cómo funciona esto con un par de ejemplos.

5.15.1 Ejemplo 1

Recordemos una vez más el sistema examinado en la Sección 4.2.1.



Ya vimos que el Lagrangiano de este sistema viene dado por:

$$L = m\dot{x}^2 + \frac{m}{2} \left(2L\dot{x}\dot{\phi} \cos \phi + L^2\dot{\phi}^2 \right) - mgL(1 - \cos \phi) - \frac{k}{2} (x - D)^2. \quad (5.114)$$

Recordemos que las derivadas parciales de L con respecto a x , \dot{x} , ϕ y $\dot{\phi}$ son:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - D), \quad (5.115)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mL\dot{\phi} \cos \phi, \quad (5.116)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mL\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi - mgL \sin \phi, \quad (5.117)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mL\dot{x} \cos \phi + mL^2\dot{\phi}. \quad (5.118)$$

Vemos que una configuración de equilibrio es:

$$x_e = D, \quad (5.119)$$

$$\dot{x} = 0, \quad (5.120)$$

$$\phi_e = 0, \quad (5.121)$$

$$\dot{\phi}_e = 0. \quad (5.122)$$

Luego, expandiendo el Lagrangiano con respecto a estos puntos de equilibrio hasta segundo orden, y definiendo $\delta x = x_e - D$, obtenemos:

$$L = m\delta\dot{x}^2 + \frac{m}{2} \left(2L\delta\dot{x}\dot{\phi} + L^2\dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2}mgL\phi^2 - \frac{k}{2}\delta x^2. \quad (5.123)$$

A partir de este resultado, las ecuaciones de Euler-Lagrange dan directamente:

$$2\delta\ddot{x} + L\ddot{\phi} + \frac{k}{m}\delta x = 0, \quad (5.124)$$

$$\delta\ddot{x} + L\ddot{\phi} + g\phi = 0. \quad (5.125)$$

Combinando ambas ecuaciones, finalmente obtenemos

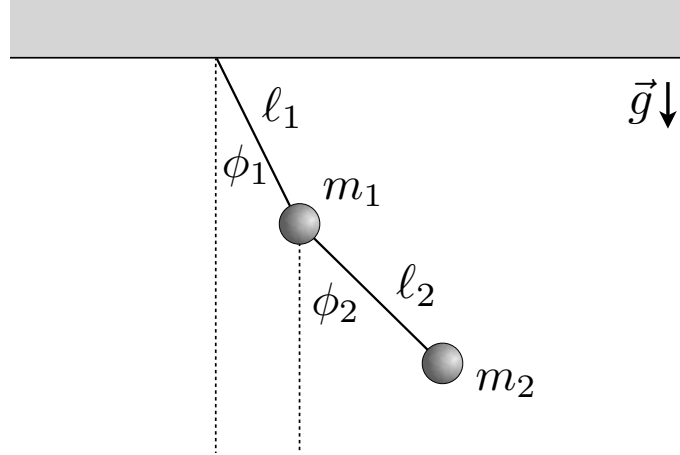
$$\ddot{\phi} + \frac{2g}{L}\phi - \frac{k}{mL}\delta x = 0, \quad (5.126)$$

$$\delta\ddot{x} + \frac{k}{m}\delta x - g\phi = 0. \quad (5.127)$$

Estas coinciden con las ecuaciones (4.29) y (4.30) ya deducidas.

5.15.2 Ejemplo 2

Veamos ahora el clásico ejemplo del péndulo doble, con dos masas m_1 y m_2 y cuerdas ideales inextensibles de largos ℓ_1 y ℓ_2 , como muestra la siguiente figura:



Para determinar el Lagrangiano, notemos que las posiciones de las masas son

$$\vec{r}_1 = \ell_1 \sin \phi_1 \hat{i} - \ell_1 \cos \phi_1 \hat{j}, \quad (5.128)$$

$$\vec{r}_2 = (\ell_1 \sin \phi_1 + \ell_2 \sin \phi_2) \hat{i} - (\ell_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \cos \phi_2) \hat{j}. \quad (5.129)$$

Luego, las energías cinéticas vienen dadas por

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2, \quad (5.130)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right] \quad (5.131)$$

Por su parte, la energía potencial del sistema viene dado por

$$\begin{aligned} U &= -m_1 g \ell_1 \cos \phi_1 - m_2 g (\ell_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \cos \phi_2) \\ &= -(m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \phi_1 - m_2 g \ell_2 \cos \phi_2. \end{aligned} \quad (5.132)$$

De este modo, el Lagrangiano total es:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \\ &\quad + (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \phi_1 + m_2 g \ell_2 \cos \phi_2. \end{aligned} \quad (5.133)$$

En lugar de deducir las ecuaciones de movimiento válidas en general, busquemos las ecuaciones para pequeñas oscilaciones. Es obvio que la configuración de equilibrio

estable del sistema corresponde a $\phi_{1e} = \dot{\phi}_{1e} = \phi_{2e} = \dot{\phi}_{2e} = 0$. Luego, expandiendo el Lagrangiano hasta segundo orden, encontramos

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g\ell_1\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2g\ell_2\phi_2^2. \quad (5.134)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos entregan las siguientes ecuaciones lineales:

$$(m_1 + m_2)\ell_1\ddot{\phi}_1 + m_2\ell_2\ddot{\phi}_2 + (m_1 + m_2)g\phi_1 = 0, \quad (5.135)$$

$$m_2\ell_2\ddot{\phi}_2 + m_2\ell_1\ddot{\phi}_1 + m_2g\phi_2 = 0. \quad (5.136)$$

Combinando ambas ecuaciones, podemos llegar al siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{\ell_1} \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \phi_1 - \frac{g}{L_1} \frac{m_2}{m_1} \phi_2 = 0, \quad (5.137)$$

$$\ddot{\phi}_2 - \phi_1 \frac{g}{\ell_2} \frac{m_1 + m_2}{m_2} + \frac{g}{\ell_2} \frac{m_1 + m_2}{m_2} \phi_2 = 0. \quad (5.138)$$

Ahora este sistema puede ser resuelto usando las técnicas de sistemas de osciladores acoplados estudiados en la Sección 4.

5.16 Fuerzas fundamentales y mecánica cuántica

Debiera llamarnos la atención de que el concepto de fuerza no está presente en el presente formalismo. En las discusiones presentes (sobre principio de mínima acción y Lagrangianos) hemos mencionado el concepto de fuerza, pero solo en referencia a ideas familiares estudiadas con anterioridad. De hecho, en el presente formalismo hemos entregado una definición de energía potencial que antecede a la definición de Fuerza. Luego, debiera ser evidente de que la mecánica Lagrangiana sólo puede describir situaciones donde las interacciones son debidas a fuerzas conservativas (gradientes de potenciales). Entonces, ¿qué hay de las fuerzas no-conservativas?

Si consideramos al principio de mínima acción como un principio más fundamental que las propias leyes de Newton, entonces debemos concluir las fuerzas fundamentales son todas conservativas. En consecuencia, las fuerzas no-conservativas son formas de representar de manera macroscópicas procesos que, a nivel microscópico, involucran fuerzas conservativas. Por ejemplo, el roce cinético es el resultado del contacto entre

superficies con rugosidades microscópicas, pero estas rugosidades en realidad interactúan mediante fuerzas electroestáticas, que son conservativas. Igualmente, el roce viscoso es el resultado de múltiples colisiones microscópicas cuando un objeto intenta abrirse paso por un medio viscoso. En ambos casos, la cantidad de grados de libertad que participan en interacciones de roce es altísima, y muchos de estos grados de libertad transportan parte de la energía del sistema hacia otros sistemas, haciendo impracticable escribir la ecuación de movimiento para cada elemento. De este modo, es preferible trabajar con fuerzas no-conservativas para describir, de manera efectiva, interacciones que en realidad sí son conservativas.

Las afirmaciones anteriores pueden parecer limitantes. Sin embargo, si nos tomamos en serio la conclusión de que las fuerzas de la naturaleza deben ser conservativas, la mecánica Lagrangiana tiene la llave para entender la naturaleza de manera más fundamental. De hecho, nuestro entendimiento moderno de la física se basa fuertemente en la mecánica Lagrangiana. Por ejemplo, al plantear el principio de mínima acción, decidimos que el movimiento que escoge la naturaleza para que una partícula llegue desde un punto A hasta un punto B debe ser tal que la acción se minimiza (recordar discusión de la Sección 5.5). Pero, ¿qué rol cumplen aquellas trayectorias que descartamos, que no minimizan la acción? La mecánica cuántica nos dice que dichas trayectorias también ocurren. En realidad, todas ocurren, y la trayectoria que minimiza la acción es un camino *promedio* de todas las trayectorias seguidas simultáneamente por una partícula para llegar desde A a B .