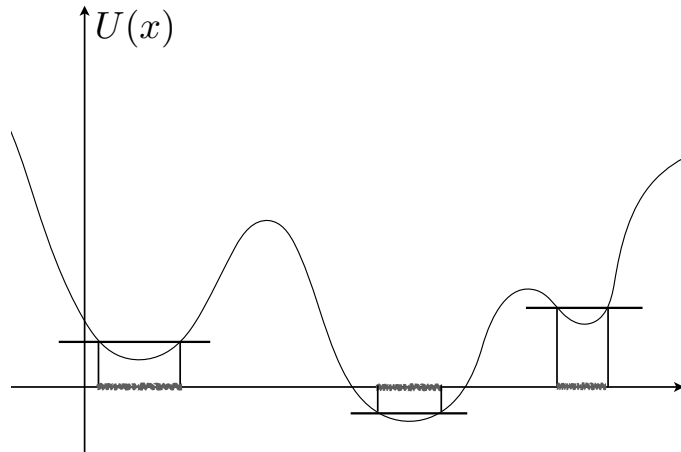


4 Pequeñas oscilaciones

Los sistemas físicos reales inevitablemente están expuestos a roces con el ambiente que provocan que la energía mecánica se disipe. En efecto. Recordemos que, en general, después de un intervalo de tiempo la energía mecánica final E_f difiere de la energía inicial E_i debido al trabajo efectuado por las fuerzas no-conservativas:

$$E_f = E_i + W_{\text{NC}} \quad (4.1)$$

Las fuerzas de roce se oponen al movimiento, por lo tanto, estas efectúan trabajos negativos ($W_{\text{NC}} < 0$). En consecuencia, la energía final de un sistema inevitablemente será menor que la inicial ($E_f < E_i$) a menos que se intervenga inyectando energía. A partir de esta observación, es de esperar que el destino final de un sistema dado sea estar cerca de una configuración de equilibrio estable. Por ejemplo, la siguiente figura muestra tres posibles destinos para la partícula con energía inicial E_1 sujeta a la influencia del potencial U , analizada en la Sección 3.13:



Recordemos que en nuestro análisis distinguimos a las posiciones de equilibrio como x_{e1} , x_{e3} y x_{e5} . Cada uno de estos puntos representa la posición de un mínimo local del potencial, llamados pozos de potencial. El destino final de la partícula, es decir, el pozo en el cual termine atrapada, dependerá de las condiciones iniciales del sistema. Si la partícula está en reposo en las posiciones de equilibrio, entonces una pequeña perturbación al sistema (por ejemplo, un pequeño empujón a la partícula), probablemente no logrará alejar a la partícula lo suficiente del mínimo, y ésta empezará a oscilar al interior del pozo. El propósito de esta sección es estudiar en algún de-

talle la variedad de oscilaciones posibles en situaciones donde un sistema es levemente perturbado desde el equilibrio estable.

4.1 Pequeñas oscilaciones en una dimensión

Comencemos este estudio examinando el movimiento en torno a un mínimo local de potenciales en una dimensión. Por ahora despreciaremos el roce. Sin embargo, gracias a nuestro análisis de la Sección 2.19, no nos resultará difícil incorporar los efectos disipativos del roce. Para comenzar, expandamos el potencial en torno a un punto de equilibrio estable x_e dado en serie de Taylor:

$$U(x) = U(x_e) + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_e (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_e (x - x_e)^2 + \dots \quad (4.2)$$

Por definición, $U'(x_e) = 0$, por lo que la expresión anterior se simplifica a

$$U(x) = U(x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_e (x - x_e)^2 + \dots \quad (4.3)$$

Luego, la segunda ley de Newton $m\ddot{x} + \partial U/\partial x = 0$ adquiere la forma

$$m\ddot{x} + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_e} (x - x_e) = 0. \quad (4.4)$$

Recordemos que $U''(x_e) > 0$. Luego, esta es la ecuación de un oscilador armónico simple. En efecto, si escribimos $\delta x = x - x_e$, obtenemos la ecuación de pequeñas oscilaciones:

$$\ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x = 0, \quad (4.5)$$

donde la frecuencia de oscilación ω_0 del sistema viene dada por

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\left. \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_e}}. \quad (4.6)$$

Debemos ser cuidadosos, dado que esta expresión para la frecuencia del sistema en términos del potencial U es sólo válida si el potencial depende de una coordenada. Sin embargo, podemos extender este resultado al caso de potenciales expresados con respecto a otros tipos de coordenadas, por ejemplo ángulos. Veamos. Supongamos que la energía mecánica de un sistema se expresa como

$$E = \frac{\alpha}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi), \quad (4.7)$$

donde ϕ es un ángulo, o cualquier otra variable. Entonces, dado que E es una constante, podemos diferenciar la expresión anterior con respecto al tiempo, para obtener $\alpha\ddot{\phi} + U'(\phi)\dot{\phi} = 0$, donde $U'(\phi) = \partial U/\partial\phi$. Dado que nos interesa analizar situaciones con movimiento, debemos considerar $\dot{\phi} \neq 0$, y obtenemos

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\alpha}U'(\phi) = 0. \quad (4.8)$$

Si el potencial $U(\phi)$ tiene un punto de equilibrio estable en la coordenada ϕ_e , entonces $U''(\phi_e) > 0$, y podemos expandirlo como

$$U(\phi) = U(\phi_e) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi_e} (\phi - \phi_e)^2 + \dots \quad (4.9)$$

de donde finalmente obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{\alpha}U''(\phi_e)(\phi - \phi_e) = 0. \quad (4.10)$$

A partir de este resultado, vemos que la frecuencia de oscilación del sistema es

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi_e}}. \quad (4.11)$$

Un ejemplo sencillo lo constituye el péndulo de masa m con cuerda ideal de largo L . En este caso, la tensión de la cuerda no ejerce trabajo (dado que siempre es perpendicular a la trayectoria de la masa) y por lo tanto el potencial del sistema solo se debe a la fuerza de gravedad, que tiene como potencial $U_g = mg(z + L)$. Notemos que hemos elegido como punto de referencia $z_0 = -L$, de modo que $U = 0$ cuando $z = -L$. Expresado el potencial en términos del ángulo ϕ con respecto a la vertical, éste se escribe como

$$U = mgL(1 - \cos \phi). \quad (4.12)$$

Por otro lado, la rapidez ν de la partícula es $\nu = L\dot{\phi}$, de modo que la energía mecánica del péndulo en términos de ϕ corresponde a

$$E = \frac{m}{2}L^2\dot{\phi}^2 + mgL(1 - \cos \phi). \quad (4.13)$$

Comparando esta expresión con (4.7), vemos que $\alpha = mL^2$. Luego, considerando que el punto de equilibrio estable es $\phi_e = 0$, y que $U''(0) = mgL$, obtenemos como frecuencia de oscilación:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (4.14)$$

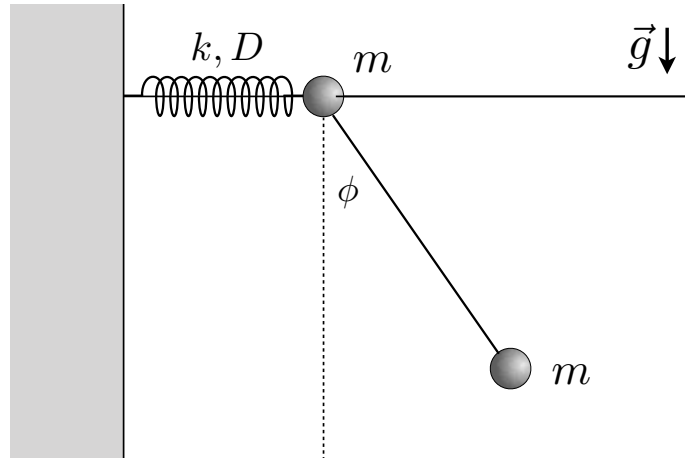
un resultado que ya conocíamos.

4.2 Pequeñas oscilaciones con dos grados de libertad

Los grados de libertad corresponden a aquellas variables que nos indican la configuración del sistema. Es decir, son las variables encargadas de informarnos la posición de cada elemento en un sistema. Estas pueden ser coordenadas cartesianas, radios, ángulos, etc. Como veremos, en torno al equilibrio estable, la ecuación de movimiento de un sistema pueden ser linealizadas (sin importar qué tan complicado sea el sistema), dando como resultado ecuaciones diferenciales lineales acopladas. Antes de abordar esto de forma más sistemática, veamos un ejemplo concreto.

4.2.1 Ejemplo 1

Consideremos dos masas m , la primera de ellas confinada a moverse por un riel horizontal, y la segunda colgando desde la primera por medio de una cuerda ideal inextensible de largo L . La primera masa se mantiene unida a una pared mediante un resorte de largo natural D y constante elástica k (ver figura).



Utilicemos como coordenadas la distancia x de la primera masa desde la pared, y el ángulo ϕ de la segunda masa con respecto a la vertical. Luego, las posiciones, velocidades y aceleraciones de ambas masas son:

$$\vec{r}_1 = x\hat{i}, \quad \vec{v}_1 = \dot{x}\hat{i}, \quad \vec{a}_1 = \ddot{x}\hat{i}, \quad (4.15)$$

$$\vec{r}_2 = x\hat{i} + L\hat{\rho}, \quad \vec{v}_2 = \dot{x}\hat{i} + L\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad \vec{a}_2 = \ddot{x}\hat{i} + L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{\rho}. \quad (4.16)$$

Las fuerzas actuando sobre cada masa son:

$$\vec{F}_1 = N\hat{j} - mg\hat{j} + T\hat{\rho} - k(x - D)\hat{i}, \quad (4.17)$$

$$\vec{F}_2 = -T\hat{\rho} - mg\hat{j}. \quad (4.18)$$

Antes de escribir las ecuaciones de movimiento, anticipemos la configuración de equilibrio estable (x_e, ϕ_e) . Estas deben cumplir con la condición $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$, lo que solo es posible si $x_e = D$ y $\hat{\rho} = \pm\hat{j}$. Pero $\hat{\rho} = +\hat{j}$ corresponde al caso en que el péndulo está invertido, el cual claramente es inestable. Luego, debemos tomar $\hat{\rho} = -\hat{j}$, lo que equivale a $\phi = 0$, con lo cual la configuración de equilibrio estable es:

$$(x_e, \phi_e) = (D, 0). \quad (4.19)$$

Para continuar, las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x}\hat{i} = N\hat{j} - mg\hat{j} + T\hat{\rho} - k(x - D)\hat{i}, \quad (4.20)$$

$$m(\ddot{x}\hat{i} + L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{\rho}) = -T\hat{\rho} - mg\hat{j}. \quad (4.21)$$

Descomponiendo la primera ecuación en \hat{i} y \hat{j} , y la segunda ecuación en $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$, obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones escalares:

$$m\ddot{x} = T \sin \phi - k(x - D), \quad (4.22)$$

$$0 = N - mg - T \cos \phi, \quad (4.23)$$

$$m\ddot{x} \sin \phi - mL\dot{\phi}^2 = -T + mg \cos \phi, \quad (4.24)$$

$$m\ddot{x} \cos \phi + mL\ddot{\phi} = -mg \sin \phi. \quad (4.25)$$

Combinando la primera ecuación junto con la tercera ecuación, obtenemos:

$$m\ddot{x}(1 + \sin^2 \phi) - mL\dot{\phi}^2 \sin \phi = mg \cos \phi \sin \phi - k(x - D). \quad (4.26)$$

De esta forma, las dos ecuaciones de movimiento buscadas son (4.25) y (4.26). Ambas son expresiones complicadas, pero válidas para todo valor de x y ϕ . Sin embargo, no olvidemos que estamos interesados en movimientos pequeños cercanos a la configuración de equilibrio estable $(x_e, \phi_e) = (D, 0)$. Si definimos $\delta x = x - D$ (la distancia de la primera masa desde el punto de equilibrio) y expandimos las funciones trigonométricas para ángulos pequeños, estas dos ecuaciones se simplifican

$$\ddot{\delta x} + L\ddot{\phi} = -g\phi. \quad (4.27)$$

$$\ddot{\delta x} = g\phi - \frac{k}{m}\delta x. \quad (4.28)$$

Combinando ambas ecuaciones para simplificar la primera de ellas, finalmente obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden acopladas:

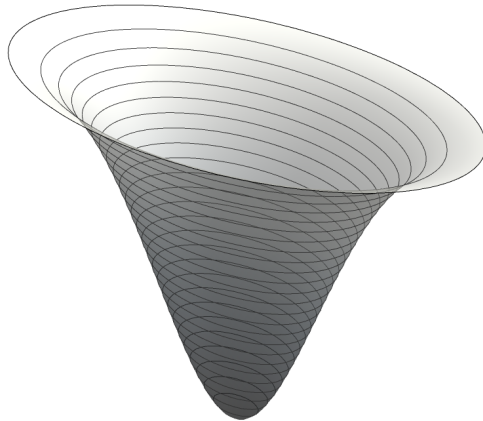
$$\ddot{\phi} + \frac{2g}{L}\phi - \frac{k}{mL}\delta x = 0, \quad (4.29)$$

$$\ddot{\delta x} - g\phi + \frac{k}{m}\delta x = 0. \quad (4.30)$$

Estas ecuaciones tienen una similitud con la ecuación de un oscilador armónico. De hecho consiste en un ejemplo particular de la generalización de un oscilador armónico al caso de dos grados de libertad. Aprenderemos a resolver este tipo de ecuación en la Sección 4.5.

4.3 Una partícula en dos dimensiones

Si el sistema que estamos estudiando está descrito en términos de coordenadas cartesianas, entonces podemos expresar las del sistema fuerzas en términos de gradientes de potenciales. Esto nos permite derivar ecuaciones diferenciales acopladas en donde el potencial juega un rol principal. Por ejemplo, supongamos ahora que una partícula puede moverse en dos dimensiones, a lo largo de coordenadas cartesianas x e y . Esto quiere decir que el sistema está descrito por dos grados de libertad. En dos dimensiones, un potencial en torno a un mínimo local (x_e, y_e) tiene la forma de un pozo, tal como lo muestra la siguiente figura:



Si la energía es apenas suficiente para que exista una pequeña región de movimiento permitida alrededor del mínimo, entonces podemos expandir la función $U(x, y)$ en

torno a (x_e, y_e) , de la siguiente forma:

$$U(x, y) = U(x_e, y_e) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_e (x - x_e)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_e (x - x_e)(y - y_e) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_e (y - y_e)^2 + \dots, \quad (4.31)$$

donde usamos el hecho de que $\partial U / \partial x = \partial U / \partial y = 0$ en la posición (x_e, y_e) . La curva de nivel que determina la región de movimiento permitida corresponde a la ecuación (3.146), que en el presente caso, toma la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_e (x - x_e)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_e (x - x_e)(y - y_e) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_e (y - y_e)^2 = E - U(x_e, y_e). \quad (4.32)$$

Esta es una ecuación cuadrática. Para lidiar con ella, es costumbre introducir una matriz H , denominada la matriz Hessiana de U , definida de la siguiente forma:

$$H(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

De esta manera, la ecuación (4.32) ahora se puede escribir como:

$$\frac{1}{2} H_{xx}^e (x - x_e)^2 + H_{xy}^e (x - x_e)(y - y_e) + \frac{1}{2} H_{yy}^e (y - y_e)^2 = E - U(x_e, y_e), \quad (4.34)$$

donde la etiqueta 'e' nos indica que los elementos de matriz de H están evaluados en \vec{r}_e . Para que la solución sea una curva cerrada (una elipse o un círculo), es necesario que H sea una matriz hermítica definida positiva. Esto quiere decir que los autovalores de H sean todos reales y positivos. Asumamos que este es el caso, la ecuación de movimiento $m\ddot{\vec{r}} + \nabla U = 0$ adquirirá la forma

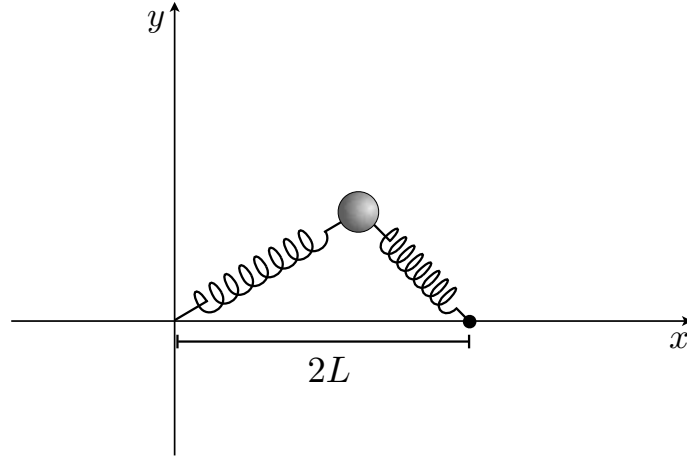
$$\ddot{\delta x} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_e \delta x + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_e \delta y = 0, \quad (4.35)$$

$$\ddot{\delta y} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \Big|_e \delta x + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_e \delta y = 0, \quad (4.36)$$

donde se definieron $\delta x = x - x_e$ y $\delta y = y - y_e$. Nuevamente, estamos en presencia de dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, acopladas. El siguiente ejemplo muestra una situación concreta donde podemos utilizar las ecuaciones (4.35) y (4.36).

4.3.1 Ejemplo 2

Consideremos el caso de una masa m confinada al plano x - y , y unida al origen y un punto $P = (0, L)$ a través de dos resortes idénticos de largo natural $D = \sqrt{2}L$ y constante elástica k .



Luego, el potencial del sistema consiste en la suma de los potenciales asociados a cada resorte:

$$U(x, y) = \frac{k}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L)^2 + \frac{k}{2}(\sqrt{(x - 2L)^2 + y^2} - \sqrt{2}L)^2. \quad (4.37)$$

Los puntos de equilibrio del sistema vienen determinados por las ecuaciones $\partial U/\partial x = 0$, y $\partial U/\partial y = 0$, las que en el presente caso toman la forma:

$$k \left[1 - \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] x + k \left[1 - \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{(x - 2L)^2 + y^2}} \right] (x - 2L) = 0, \quad (4.38)$$

$$k \left[1 - \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] y + k \left[1 - \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{(x - 2L)^2 + y^2}} \right] y = 0. \quad (4.39)$$

Estas ecuaciones revelan la existencia de tres puntos de equilibrio:

$$(x_{e,1}, y_{e,1}) = (L, L), \quad (x_{e,2}, y_{e,2}) = (L, 0), \quad (x_{e,3}, y_{e,3}) = (-L, L). \quad (4.40)$$

Es posible verificar que los puntos de equilibrio estables son $(x_{e,1}, y_{e,1})$ y $(x_{e,3}, y_{e,3})$ (estos puntos son tales que la matriz Hessiana de U es definida positiva). Examinemos

las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones en torno al primer punto $(x_{e,1}, y_{e,1}) = (L, L)$. Las segundas derivadas del potencial en torno a dicho punto son:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_e = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) k, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right|_e = \frac{k}{2}, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_e = \frac{3}{2} k. \quad (4.41)$$

Luego, usando las ecuaciones (4.35) y (4.36), vemos que las ecuaciones de movimiento para el presente sistema son:

$$\ddot{\delta x} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) \frac{k}{m} \delta x + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \delta y = 0, \quad (4.42)$$

$$\ddot{\delta y} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \delta x + \frac{3}{2} \frac{k}{m} \delta y = 0, \quad (4.43)$$

4.4 Dos partículas en una dimensión

Exploremos ahora otra situación interesante, donde dos partículas distintas se mueven a lo largo de direcciones descritas por coordenadas cartesianas. Gracias a nuestra discusión en la Sección 3.16, sabemos que un sistema conservativo con dos partículas tendrá un único potencial U que depende de la posición de cada partícula. Luego, si la posición de las partículas se denotan x_1 y x_2 , el potencial del sistema será una función de estas coordenadas: $U = U(x_1, x_2)$. Las coordenadas x_1 y x_2 no necesariamente corresponden al mismo eje cartesiano x . Por ejemplo, la primera partícula podría estar confinada a moverse por el eje cartesiano y y la segunda partícula podría estar confinada a moverse a lo largo del eje z , en cuyo caso tendríamos $x_1 = y$ y $x_2 = z$.

Los puntos de equilibrio x_{1e} y x_{2e} del sistema estarán determinados por el potencial, a través de las condiciones

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_e = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_e = 0. \quad (4.44)$$

Si expandimos $U(x_1, x_2)$ alrededor de estos puntos de equilibrio, obtenemos

$$U(x, y) = U(x_{1,e}, x_{2,e}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_e (x_1 - x_{1,e})^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_e (x_1 - x_{1,e})(x_2 - x_{2,e}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_e (x_2 - x_{2,e})^2 + \dots, \quad (4.45)$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton, las ecuaciones de movimiento para cada partícula es $m_1 \ddot{x}_1 + \partial U / \partial x_1 = 0$, y $m_2 \ddot{x}_2 + \partial U / \partial x_2 = 0$. Luego, haciendo uso de la

expansión (4.45), obtenemos

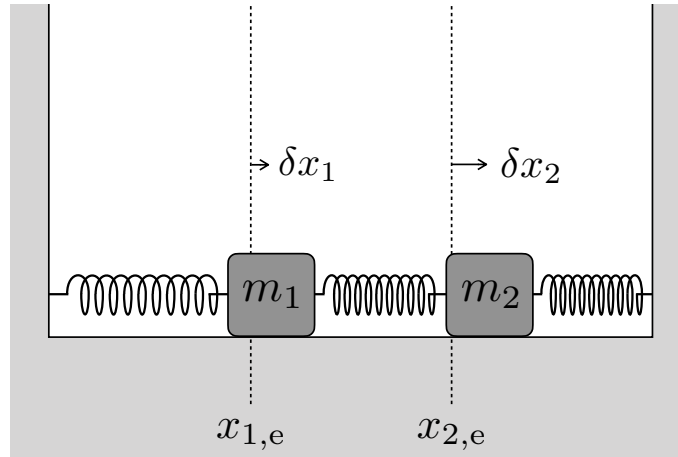
$$\ddot{\delta x}_1 + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \Big|_e \delta x_1 + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_e \delta x_2 = 0, \quad (4.46)$$

$$\ddot{\delta x}_2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \Big|_e \delta x_2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_e \delta x_1 = 0, \quad (4.47)$$

donde hemos definido $\delta x_1 = x_1 - x_{1,e}$ y $\delta x_2 = x_2 - x_{2,e}$. Nuevamente, hemos obtenido dos diferenciales lineales de segundo orden, acopladas. Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (4.35) y (4.36), excepto por la forma en que aparecen las masas, que pueden tener valores distintos. De hecho, las ecuaciones (4.35) y (4.36) son un ejemplo particular del caso que estamos analizando en esta sección: La descripción matemática de una partícula en dos dimensiones no difiere de la descripción de dos partículas cada una confinada a moverse en una dimensión. Veamos a continuación dos ejemplos en donde las ecuaciones (4.46) y (4.47) son útiles.

4.4.1 Ejemplo 3

Consideremos dos bloques de masas m_1 y m_2 sobre un plano horizontal, conectados entre sí y con las paredes a través de resortes idénticos de largo natural D y constantes elásticas k . La distancia entre ambas paredes es L (ver figura).



Midamos las posiciones de las masas a partir de la primera pared. Luego, el potencial del sistema consiste en la suma de los potenciales individuales asociados a cada resorte:

$$U(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(x_1 - D)^2 + \frac{k}{2}(|x_2 - x_1| - D)^2 + \frac{k}{2}(|L - x_2| - D)^2. \quad (4.48)$$

Si asumimos que $L > x_2 > x_1 > 0$, entonces podemos escribir

$$U(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(x_1 - D)^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - D)^2 + \frac{k}{2}(L - x_2 - D)^2. \quad (4.49)$$

Este potencial tiene un solo mínimo en la configuración $(x_{1e}, x_{2e}) = (L/3, 2L/3)$. Luego, las segundas derivadas de U evaluadas en este punto de equilibrio estable son:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_e = 2k, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_e = -k, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_e = 2k. \quad (4.50)$$

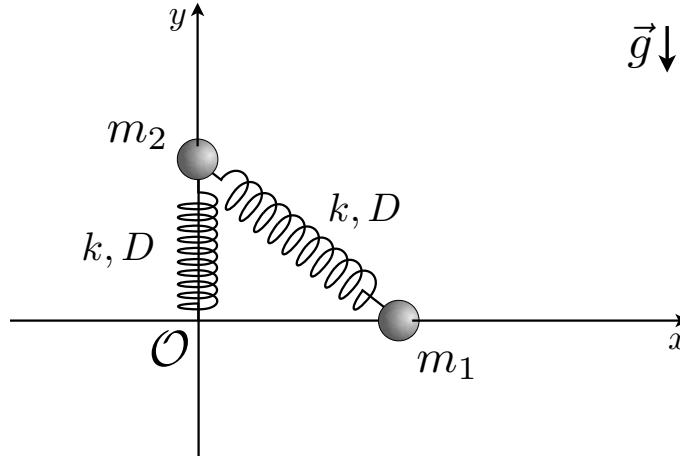
Con este resultado, vemos que (4.46) y (4.47) adquieren la forma:

$$\delta \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m_1} \delta x_1 - \frac{k}{m_1} \delta x_2 = 0, \quad (4.51)$$

$$\delta \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2} \delta x_1 + 2\frac{k}{m_2} \delta x_2 = 0. \quad (4.52)$$

4.4.2 Ejemplo 4

Veamos ahora otro ejemplo perteneciente a la misma categoría. Consideremos una partícula de masa m_1 confinada a moverse por el eje y , unida al origen a través de un resorte de largo natural D y constante elástica k . Una segunda partícula de masa m_2 puede deslizar por el eje x , y permanece unida a m_1 mediante un resorte idéntico al primero (ver figura).



Asumiremos que $D - mg/2k > 0$. Si designamos $x_2 = x$ a la distancia a lo largo del eje x de la segunda partícula con respecto al origen, y $x_1 = y$ a la altura de la primera

partícula con respecto al origen, entonces el potencial del sistema viene dado por

$$U(x, y) = \frac{k}{2}(x_2 - D)^2 + \frac{k}{2} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - D \right)^2 + m_2 g x_2. \quad (4.53)$$

Luego, las condiciones para encontrar los puntos de equilibrio son

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - D \right) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k(x_2 - D) + k \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - D \right) \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + m_2 g = 0. \quad (4.55)$$

A partir de estas ecuaciones, es posible ver que existen dos configuraciones de equilibrio estable y una inestable. Las dos configuraciones estables vienen dadas por $(x_{1e}, x_{2e}) = (\pm \sqrt{2Dm_2g/k - (m_2g/k)^2}, D - m_2g/k)$. Mientras que la configuración inestable viene dada por $(x_{1e}, x_{2e}) = (0, D - m_2g/2k)$. Concentremonos en la configuración estable en la cual la masa m_2 permanece a la derecha del origen:

$$(x_{1e}, x_{2e}) = (\sqrt{2Dm_2g/k - (m_2g/k)^2}, D - m_2g/k). \quad (4.56)$$

Luego, las segundas derivadas de U evaluadas en este punto de equilibrio estable son:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_e = \frac{m_2 g (D + x_{2e})}{D^2}, \quad (4.57)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_e = \frac{k x_{1e} x_{2e}}{D^2}, \quad (4.58)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_e = \frac{k}{D^2} (x_{1e}^2 + 2x_{2e}^2). \quad (4.59)$$

Con este resultado, vemos que (4.46) y (4.47) adquieren la forma:

$$\delta \ddot{x}_1 + \frac{m_2 g (D + x_{2e})}{m_1 D^2} \delta x_1 + \frac{k x_{1e} x_{2e}}{m_1 D^2} \delta x_2 = 0, \quad (4.60)$$

$$\delta \ddot{x}_2 + \frac{k x_{1e} x_{2e}}{m_2 D^2} \delta x_1 + \frac{k}{m_2 D^2} (x_{1e}^2 + 2x_{2e}^2) \delta x_2 = 0. \quad (4.61)$$

4.5 Oscilaciones acopladas

En los ejemplos anteriores vimos cómo sistemas muy distintos conducen al mismo tipo de ecuaciones de movimiento en torno a sus configuraciones de equilibrio estable. A

continuación aprenderemos a resolver esta clase de ecuaciones de movimiento. Para proceder de forma general, nos propondremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden acopladas:

$$\ddot{\xi}_1 + \Omega_{11}^2 \xi_1 + \Omega_{12}^2 \xi_2 = 0, \quad (4.62)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \Omega_{21}^2 \xi_1 + \Omega_{22}^2 \xi_2 = 0, \quad (4.63)$$

donde las variables ξ_1 y ξ_2 pueden ser cualquier par de grados de libertad, sin importar si éstos corresponden a coordenadas cartesianas u otro tipo de coordenadas. Por otro lado, las cantidades Ω_{ij}^2 son constantes. Por ejemplo, en las ecuaciones (4.29) y (4.30) del ejemplo de la Sección 4.2.1 tenemos $\xi_1 = \phi$, $\xi_2 = x$, $\Omega_{11} = \frac{2g}{L}$, $\Omega_{12} = -\frac{k}{mL}$, $\Omega_{21} = -g$, y $\Omega_{22} = \frac{k}{m}$. Para lidiar con el sistema de ecuaciones (4.62) y (4.63), podemos ordenar las variables ξ_1 y ξ_2 en un vector $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$. De forma similar, podemos ordenar los coeficientes Ω_{ij}^2 en una matriz Ω^2 de la forma forma:

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \Omega_{11}^2 & \Omega_{12}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Gracias a esta organización, ahora podemos escribir las ecuaciones (4.62) y (4.63) como una sola ecuación vectorial:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{\xi} + \Omega^2 \vec{\xi} = 0. \quad (4.65)$$

La notación Ω^2 puede resultar engañosa. Ω^2 es una matriz, y no una cantidad elevada a la potencia 2.

4.5.1 Solución general

Dado que el sistema consiste en 2 ecuaciones diferenciales de segundo orden, necesariamente tendrán que haber $2 \times 2 = 4$ soluciones independientes. En otras palabras, 4 condiciones iniciales que satisfacer. Para proceder, notemos que Ω^2 es una matriz de 2×2 . Luego, deberíamos ser capaces de deducir los 2 valores propios ω_a^2 y sus respectivos vectores propios \vec{e}_a , con $a = I, II$. Estos provienen de resolver la ecuación de valores propios dada por

$$\Omega^2 \vec{e}_a = \omega_a^2 \vec{e}_a, \quad a = I, II. \quad (4.66)$$

Asumamos por el momento que los valores propios ω_a^2 son reales y positivos. Es posible demostrar que si los todos los valores propios son no-nulos, entonces los vectores

proprios \vec{e}_a forman una base completa. Esta base no es necesariamente ortogonal, sin embargo, si la matriz Ω^2 es simétrica, entonces esta base será ortogonal. Dado que una ecuación de valores propios no determina el largo de los vectores propios \vec{e}_a , tenemos la libertad de ajustar sus largos de modo que estos sean vectores unitarios:

$$\vec{e}_I \cdot \vec{e}_I = 1, \quad \vec{e}_{II} \cdot \vec{e}_{II} = 1. \quad (4.67)$$

Asumiendo que este es el caso, podemos denotar como ϕ al ángulo entre ambos vectores, de modo que

$$\cos \phi = \vec{e}_I \cdot \vec{e}_{II}. \quad (4.68)$$

Para continuar, notemos ahora que, dado que los vectores \vec{e}_a conforman una base completa, podemos escribir $\vec{\xi}(t)$ como una combinación lineal de los vectores \vec{e}_a . Esto es, podemos escribir

$$\vec{\xi}(t) = \sum_a f_a(t) \vec{e}_a, \quad (4.69)$$

donde los $f_a(t)$ son funciones del tiempo que aun debemos determinar. Luego, si insertemos esta expresión en la ecuación (4.65), obtenemos:

$$\sum_a \ddot{f}_a(t) \vec{e}_a + \sum_a f_a(t) \Omega^2 \vec{e}_a = 0. \quad (4.70)$$

Sin embargo, dado que $\Omega^2 \vec{e}_a = \omega_a^2 \vec{e}_a$, la expresión anterior se convierte en

$$\sum_a \left[\ddot{f}_a(t) + \omega_a^2 f_a(t) \right] \vec{e}_a = 0. \quad (4.71)$$

Pero dado que los vectores \vec{e}_a son linealmente independientes (puesto que conforman una base), entonces la expresión anterior se satisface si y solo si

$$\ddot{f}_a(t) + \omega_a^2 f_a(t) = 0, \quad a = I, II. \quad (4.72)$$

En otras palabras, hemos intercambiado el desafío de resolver 2 ecuaciones diferenciales lineales acopladas por el desafío de resolver 2 osciladores armónicos, de frecuencias ω_a . Ya sabemos que las soluciones son de la forma $f_a(t) = A_a \cos(\omega_a t) + B_a \sin(\omega_a t)$, donde $\omega_a \equiv \sqrt{\omega_a^2}$, por lo que finalmente obtenemos la solución general

$$\vec{\xi}(t) = \sum_a [A_a \cos(\omega_a t) + B_a \sin(\omega_a t)] \vec{e}_a. \quad (4.73)$$

Las constantes A_a y B_a corresponden a las 4 constantes de integración, y para determinar sus valores debemos conocer las condiciones iniciales del sistema. Ahora

podemos ver la relevancia de haber asumido que los valores propios ω_a^2 sean reales y positivos. De no serlos, el sistema habría tenido soluciones que crecen en el tiempo, alejándose del punto de equilibrio estable (que corresponde a la configuración $\vec{\xi} = 0$). De modo que si, efectivamente estamos analizando un sistema cerca del equilibrio estable, necesariamente Ω^2 será una matriz cuyos valores propios deben ser reales y positivos.

4.6 Condiciones iniciales

Como hemos dicho, los coeficientes A_I , B_I , A_{II} y B_{II} pueden ser determinados imponiendo condiciones iniciales. Para ello, escribamos las velocidades asociadas a $\vec{\xi}$ como $\vec{v} \equiv \frac{d}{dt}\vec{\xi}$. Luego, es directo ver que

$$\vec{v}(t) = \sum_a \omega_a [-A_a \sin(\omega_a t) + B_a \cos(\omega_a t)] \vec{e}_a. \quad (4.74)$$

Asumamos que en un tiempo inicial $t = 0$ las posiciones y velocidades son conocidas, dadas por $\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}(0)$ y $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ respectivamente. Entonces, es posible verificar que

$$\vec{\xi}_0 = A_I \vec{e}_I + A_{II} \vec{e}_{II}, \quad (4.75)$$

$$\vec{v}_0 = \omega_I B_I \vec{e}_I + \omega_{II} B_{II} \vec{e}_{II}. \quad (4.76)$$

Para determinar A_I , B_I , A_{II} y B_{II} , podemos proyectar ambas ecuaciones a lo largo de \vec{e}_I y \vec{e}_{II} . Esta operación conduce a los siguientes resultados:

$$A_I = \frac{1}{\sin \phi^2} [\vec{e}_I \cdot \vec{\xi}_0 - \vec{e}_{II} \cdot \vec{\xi}_0 \cos \phi], \quad (4.77)$$

$$B_I = \frac{1}{\omega_I \sin \phi^2} [\vec{e}_I \cdot \vec{v}_0 - \vec{e}_{II} \cdot \vec{v}_0 \cos \phi], \quad (4.78)$$

$$A_{II} = \frac{1}{\sin \phi^2} [\vec{e}_{II} \cdot \vec{\xi}_0 - \vec{e}_I \cdot \vec{\xi}_0 \cos \phi], \quad (4.79)$$

$$B_{II} = \frac{1}{\omega_{II} \sin \phi^2} [\vec{e}_{II} \cdot \vec{v}_0 - \vec{e}_I \cdot \vec{v}_0 \cos \phi]. \quad (4.80)$$

Notemos de paso que si la matriz Ω^2 es simétrica, entonces $\cos \phi = 0$, y obtenemos resultados mucho más simples:

$$A_I = \vec{e}_I \cdot \vec{\xi}_0, \quad (4.81)$$

$$B_I = \frac{1}{\omega_I} \vec{e}_I \cdot \vec{v}_0, \quad (4.82)$$

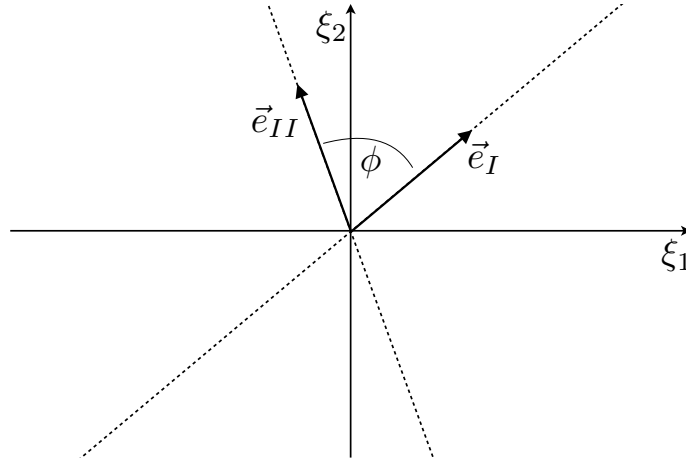
$$A_{II} = \vec{e}_{II} \cdot \vec{\xi}_0, \quad (4.83)$$

$$B_{II} = \frac{1}{\omega_{II}} \vec{e}_{II} \cdot \vec{v}_0. \quad (4.84)$$

Mediante la adecuada elección de $\vec{\xi}_0$ y \vec{v}_0 , podemos controlar los valores de A_I , B_I , A_{II} y B_{II} a nuestro antojo.

4.7 Modos normales

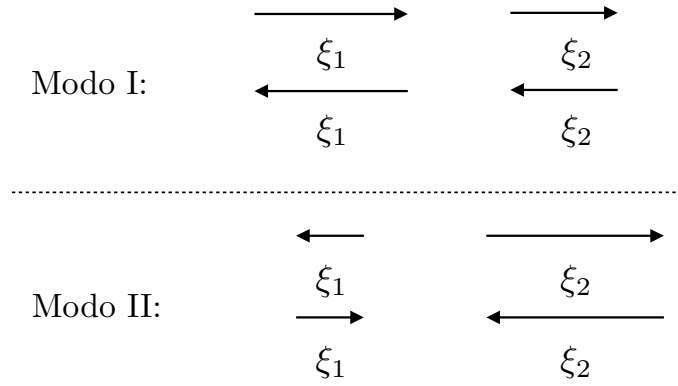
A continuación aprenderemos a visualizar el movimiento debido a la solución (4.73). Notemos que estamos en presencia de dos osciladores armónicos cuyos movimientos ocurren a lo largo de las direcciones \vec{e}_I y \vec{e}_{II} . A cada uno de estos movimientos se les llama modo normal. Por lo tanto, la solución (4.73) consta de dos modos normales. Nada nos impide representar a los vectores unitarios \vec{e}_I y \vec{e}_{II} en el plano ξ_1 y ξ_2 , tal como lo muestra la siguiente figura:



De acuerdo a la ecuación (4.73), la solución general es una combinación lineal de un movimiento armónico de frecuencia ω_I en la dirección \vec{e}_I , y un movimiento armónico de frecuencia ω_{II} en la dirección \vec{e}_{II} . De hecho, siempre podemos ajustar las condiciones iniciales para lograr que el sistema oscile solo a lo largo de \vec{e}_I o solo a lo largo

de \vec{e}_{II} . Por otro lado, en general no será posible encontrar condiciones iniciales tal que el movimiento solo ocurra en ξ_1 o en ξ_2 respectivamente. Es decir, los osciladores acoplados se caracterizan por combinar el movimiento a lo largo de ξ_1 y ξ_2 a través de modos normales.

Por ejemplo, en la figura anterior, podemos ver que para el modo normal I si ξ_1 crece (o decrece), entonces necesariamente ξ_2 debe crecer (o decrecer) simultáneamente. Por otro lado, para el modo normal II , si ξ_1 crece (o decrece), entonces necesariamente ξ_2 debe decrecer (o crecer) simultáneamente. Esta situación puede ser caracterizada mediante el siguiente diagrama:



Para familiarizarnos con estas ideas, revisemos los modos normales del ejemplo 3 analizado en la Sección 4.4.1. Para simplificar nuestro análisis, consideremos el caso en que ambas masas son idénticas $m_1 = m_2 = m$. Luego, contamos con el siguiente set the ecuaciones acopladas

$$\delta\ddot{x}_1 + \frac{2k}{m}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2 = 0, \tag{4.85}$$

$$\delta\ddot{x}_2 - \frac{k}{m}\delta x_1 + \frac{2k}{m}\delta x_2 = 0. \tag{4.86}$$

Esto nos permite identificar a la matriz Ω^2 como

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix}. \tag{4.87}$$

Los valores propios de esta matriz corresponden a las raíces de la ecuación $\det(\Omega^2 - \omega^2 I) = 0$, la que en el presente caso adquiere la forma

$$\omega^4 - 4\omega^2 \frac{k}{m} + 3 \frac{k^2}{m^2} = 0. \tag{4.88}$$

Las dos soluciones de esta ecuación son

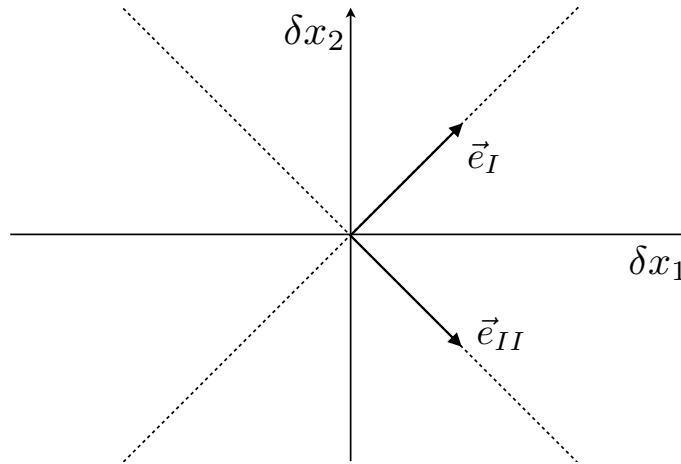
$$\omega_I^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_{II}^2 = 3\frac{k}{m}. \quad (4.89)$$

Luego, los correspondientes auto-vectores normalizados son:

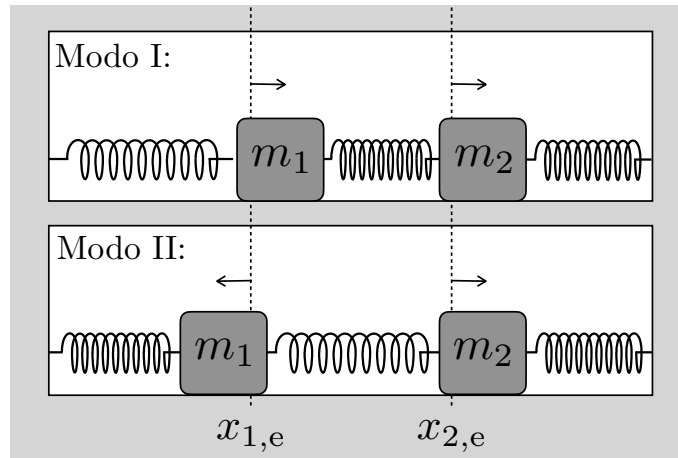
$$\vec{e}_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

$$\vec{e}_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Notemos que estos son ortogonales, lo que es una consecuencia del hecho de que Ω^2 es una matriz simétrica. La orientación de estos vectores puede ser visualizada en el plano δx_1 y δx_2 de la siguiente manera



Estos vectores unitarios nos revelan los dos modos de movimiento. El primer modo corresponde a un movimiento de frecuencia $\omega_I = \sqrt{k/m}$ tal que ambas masas se mueven simultáneamente hacia la derecha o hacia la izquierda. Es decir, si la primera masa se encuentra en la posición $\delta x_1 = \ell$ (hacia la derecha de su posición de equilibrio), entonces la segunda masa estará en la posición $\delta x_2 = \ell$ (hacia la derecha de su posición de equilibrio), o viceversa. Por otro lado, el segundo modo consiste en un movimiento de frecuencia $\omega_{II} = \sqrt{3k/m}$ tal que ambas masas se mueven simultáneamente en direcciones opuestas. Esto quiere decir que si la primera masa se encuentra en la posición $\delta x_1 = \ell$ (hacia la derecha de su posición de equilibrio), entonces la segunda masa estará en la posición $\delta x_2 = -\ell$ (hacia la izquierda de su posición de equilibrio), o viceversa. La siguiente figura muestra los dos modos:



Por cierto, no es difícil entender por qué el primer modo tiene frecuencia k/m . Notemos que si ambas masas se mueven de forma simultánea hacia la izquierda o derecha, entonces el resorte que las une nunca se estira o se contrae. Es decir, permanece con su largo natural intacto. Luego, quienes se encargan de mantener al sistema oscilando son los resortes de los extremos. El resorte que une a la primera masa con la pared izquierda mantiene a la primera masa oscilando, y el resorte que une a la segunda masa con la pared derecha mantiene a la segunda masa oscilando. Por otro lado, en el movimiento del segundo modo todos los resortes están ejerciendo actuando sobre las masas, por lo que resulta natural que la frecuencia del segundo modo sea mayor que la del primer modo.

4.8 Oscilador forzado

Estudiamos ahora otro tipo de fenómeno relevante relacionado con pequeñas perturbaciones. Hay situaciones en las cuales un agente externo afecta a un sistema mediante fuerzas periódicas en el tiempo. Si el sistema está cerca del equilibrio estable, entonces esta fuerza periódica hará que el sistema comience a oscilar en torno al equilibrio estable. ¿Cómo será este movimiento? Consideremos el caso de una partícula de masa m confinada a una dimensión descrita por una variable cartesiana x sobre la cual actúa una fuerza externa oscilatoria $F = F_0 \cos(\Omega_0 t)$. La segunda ley de Newton tendrá la forma

$$m\ddot{x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x - x_e) = F_0 \cos(\Omega_0 t), \quad (4.92)$$

donde x_e es la posición de equilibrio estable que minimiza al potencial del sistema. Escribamos esta ecuación de la siguiente manera

$$\ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x = Q_0 \cos(\Omega_0 t), \quad (4.93)$$

donde, como de costumbre, $\delta x \equiv x - x_e$, y $\omega_0^2 \equiv U''(x_e)/m$. Además, definimos $Q_0 = F_0/m$. Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden inhomogénea. Al término del lado derecho, habitualmente se le llama “fuente”. Notemos que en la ausencia de una fuente (esto es, en ausencia del agente externo), el sistema consiste en un oscilador armónico de frecuencia ω_0 . Sin embargo, la fuente contiene una dependencia temporal armónica de frecuencia Ω_0 , por lo que esperamos que el movimiento final de la partícula tenga un comportamiento donde ambas frecuencias jueguen un rol.

La solución general de (4.93) consiste en la suma $\delta x = \delta x_h + \delta x_p$ de la solución homogénea δx_h (es decir, aquella que resuelve la ecuación para el caso $Q_0 = 0$), y la solución particular δx_p (que depende de Q y no contiene constantes de integración). Ya conocemos la solución homogénea, que viene dada por

$$\delta x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (4.94)$$

La solución particular puede ser encontrada mediante una adivinanza. Dado que la fuente es proporcional a $\cos(\Omega_0 t)$, apostaremos a que la solución particular también es proporcional a $\cos(\Omega_0 t)$. Es decir:

$$\delta x_p(t) = X_0 \cos(\Omega_0 t), \quad (4.95)$$

donde X_0 es una constante que debemos determinar. Insertando esta adivinanza en (4.93) obtenemos directamente

$$X_0 = \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}. \quad (4.96)$$

Luego, la solución general viene dada por

$$\delta x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \cos(\Omega_0 t). \quad (4.97)$$

Esta solución consiste en una combinación lineal de funciones armónicas de frecuencias ω_0 y Ω_0 . Notemos, sin embargo, que la amplitud de la contribución de frecuencia Ω_0 no depende de las condiciones iniciales, al contrario de lo que ocurre con la parte homogénea.

Debiera llamarnos la atención que cuando $\Omega_0 = \omega_0$ el denominador del tercer término de (4.97) se anula, con lo cual la solución se indefine. Pero esto es solo aparente. Aún no hemos impuesto condiciones iniciales, las que necesariamente determinarán las constantes A y B en función de la posición y velocidad iniciales, al igual que las constantes ω_0 y Ω_0 . Para proceder con esto, supongamos que en $t = 0$ la posición y velocidad de la masa vienen dadas por $\delta x(0) = \delta x_0$ y $\dot{\delta x}(0) = v_0$. Luego, la ecuación (4.97) nos conduce a las siguientes expresiones entre el par $(\delta x_0, v_0)$ y (A, B) :

$$\delta x_0 = A + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}, \quad (4.98)$$

$$v_0 = \omega_0 B. \quad (4.99)$$

Despejando A y B , la solución general finalmente adquiere la forma:

$$\delta x(t) = \left[\delta x_0 - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \cos(\Omega_0 t). \quad (4.100)$$

De esta forma, vemos que el denominador $\omega_0^2 - \Omega_0^2$ ahora está presente en el primer término. Esto es afortunado, ya que, como veremos en el análisis de la siguiente sección, esto elimina la indefinición de la solución general en el caso $\Omega_0^2 = \omega_0^2$.

4.8.1 Resonancia

Estudiemos el caso en que $\Omega_0^2 = \omega_0^2$. Para lidiar con este caso, conviene re-ordenar los términos de la ecuación (4.100) de tal manera que el denominador $\omega_0^2 - \Omega_0^2$ aparezca en un solo término:

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} [\cos(\Omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)]. \quad (4.101)$$

Aquí podemos apreciar que el término proporcional a Q_0 no se indefinirá para $\Omega_0^2 = \omega_0^2$. En efecto, al mismo tiempo que el denominador $\omega_0^2 - \Omega_0^2$ se anula, es posible ver que el término $\cos(\Omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)$ también lo hará. Para avanzar, examinemos el límite $\Omega_0 \rightarrow \omega_0$ en (4.101). Esto lo podemos hacer escribiendo $\Omega_0 = \omega_0 + \epsilon$, expandiendo todo en serie de Taylor, y luego examinar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Se obtiene:

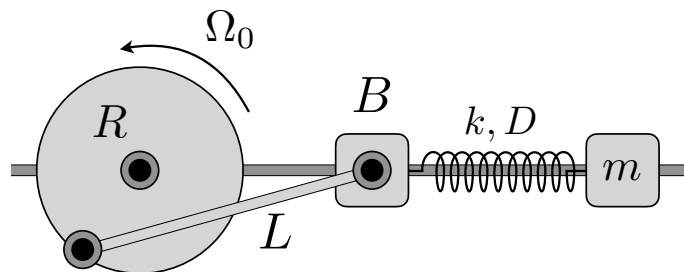
$$\delta x(t) = \delta x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + t \frac{Q_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (4.102)$$

Esta expresión es muy interesante: La amplitud del tercer término tiene un crecimiento lineal con respecto al tiempo t . Sin importar los valores de las condiciones

iniciales, ni la magnitud de la fuerza F_0 , la fuente induce sobre el sistema un comportamiento tal que la amplitud de oscilación de la partícula crezca hasta que las oscilaciones dejen de ser pequeñas (es decir, hasta que la aproximación de pequeñas oscilaciones deja de ser válida). A este fenómeno se le llama resonancia. Recordemos que los sistemas físicos habitualmente son encontrados en sus configuraciones de equilibrio estable (debido, por ejemplo, al roce que tienen con su entorno). Aquí vemos que hay una forma de sacar drásticamente a los sistemas de su equilibrio sin recurrir a fuerzas de gran magnitud. ¡La clave está en la frecuencia!

4.8.2 Ejemplo

Consideremos como ejemplo el siguiente dispositivo, donde una varilla de largo L une a un bloque B a un disco motriz de radio R que gira a una rapidez angular constante Ω_0 . El bloque B puede deslizar a lo largo de otra varilla, sobre el cual también desliza un bloque de masa m , unida al primer bloque mediante un resorte de largo natural D , y constante elástica k (ver figura).



Deduzcamos la ecuación de movimiento del bloque m para el caso $L \gg R$ (de modo que podamos hacer algunas aproximaciones). Para ello, supongamos que en $t = 0$ la varilla se encuentra dispuesta de manera horizontal, hacia la derecha del centro del origen. Si ubicamos al origen en el centro del disco, vemos que la posición del bloque B viene dado por:

$$x_B(t) = \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\Omega_0 t)} + R \cos(\Omega_0 t). \quad (4.103)$$

La fuerza que ejerce el bloque B sobre la masa m por medio del resorte, viene dada por $F = -k(x - x_B(t))$. Luego, usando $L \gg R$, obtenemos

$$F \simeq -k(x - L) + kR \cos(\Omega_0 t). \quad (4.104)$$

Insertando este resultado en la segunda ley de Newton, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - L) = \frac{kR}{m} \cos(\Omega_0 t). \quad (4.105)$$

De esta forma, vemos que la frecuencia natural de oscilación del sistema es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, mientras que la fuente tiene una amplitud $Q_0 = kR/m$ y una frecuencia de oscilación Ω_0 (la rapidez angular del disco). Si $\Omega_0 = \sqrt{k/m}$, el sistema entra en resonancia, y la masa comenzará a oscilar cada vez más con mayor amplitud.

4.9 Oscilador forzado amortiguado

Evidentemente la solución (4.102) no puede ser válida por siempre. Por ejemplo, dado que la amplitud de las oscilaciones crece en el tiempo, en algún momento la aproximación de pequeñas oscilaciones tendrá que dejar de ser válida. Otra razón por la cual la solución (4.102) no es enteramente confiable, es que no considera el efecto del roce sobre el sistema. Cuando el sistema está en resonancia, la fuerza armónica $F_0 \cos(\omega_0 t)$ inyecta energía la sistema de forma eficiente, sin embargo, esta energía se disipará debido al roce. Consideremos qué ocurre cuando incluimos roce viscoso en la descripción. En este caso, la ecuación (4.92) adquiere la forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_e (x - x_e) = F_0 \cos(\Omega_0 t), \quad (4.106)$$

donde c es el coeficiente de roce viscoso. Luego, sustituyendo $\delta x = x - x_e$, $\gamma = c/2m$, $\omega_0^2 = U''(x_e)$, y $Q_0 = F_0/m$, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\ddot{\delta x} + 2\gamma\dot{\delta x} + \omega_0^2\delta x = Q_0 \cos(\Omega_0 t). \quad (4.107)$$

Para proceder, restrinjámonos al caso en que $\omega_0 > \gamma$ (los otros casos pueden ser tratados de forma similar). Al igual que con el caso examinado en la Sección 4.8, la solución de esta ecuación consistirá en la suma de la solución homogénea δx_h y la solución particular δx_p . Gracias a la discusión de la Sección 2.9.2, ya conocemos la solución homogénea, que puede ser escrita como:

$$\delta x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\Omega t) + Be^{-\gamma t} \sin(\Omega t), \quad (4.108)$$

donde $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Las constantes A y B son constantes de integración. Para encontrar la solución particular, partamos notando que la adivinanza de la ecuación (4.95) no podrá funcionar en este caso, debido a que $\dot{\delta x}$ en (4.107) implica la aparición de la función $\sin(\omega_0 t)$. Esto puede ser compensado al modificar la adivinanza (4.95) de la siguiente forma

$$\delta x_p(t) = X_0 \cos(\Omega_0 t) + Y_0 \sin(\Omega_0 t). \quad (4.109)$$

Insertando esta expresión en (4.107), obtenemos

$$\begin{aligned} & 2\gamma\Omega_0 [-X_0 \sin(\Omega_0 t) + Y_0 \cos(\Omega_0 t)] \\ & + (\omega_0^2 - \Omega_0^2) [X_0 \cos(\Omega_0 t) + Y_0 \sin(\Omega_0 t)] = Q_0 \cos(\Omega_0 t). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Igualando los todos coeficientes multiplicando multiplicando $\cos(\Omega_0 t)$ y $\sin(\Omega_0 t)$ respectivamente, obtenemos las siguientes dos ecuaciones algebraicas para X_0 e Y_0 :

$$(\omega_0^2 - \Omega_0^2) X_0 + 2\gamma\Omega_0 Y_0 = Q_0, \quad (4.111)$$

$$(\omega_0^2 - \Omega_0^2) Y_0 - 2\gamma\Omega_0 X_0 = 0. \quad (4.112)$$

Las soluciones a estas ecuaciones son:

$$X_0 = \frac{Q_0 (\omega_0^2 - \Omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_0^2}, \quad (4.113)$$

$$Y_0 = \frac{2\gamma\Omega_0 Q_0}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_0^2}. \quad (4.114)$$

De este modo, la solución general a la ecuación (4.107) viene dada por:

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & A e^{-\gamma t} \cos(\Omega t) + B e^{-\gamma t} \sin(\Omega t) + \frac{Q_0 (\omega_0^2 - \Omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_0^2} \cos(\Omega_0 t) \\ & + \frac{2\gamma\Omega_0 Q_0}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_0^2} \sin(\Omega_0 t). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Se puede apreciar que en esta oportunidad, ya no hay términos con denominador $\omega_0^2 - \Omega_0^2$. En este caso, hay términos con denominador $(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_0^2$, pero dicho denominador nunca puede anularse. Para imponer condiciones de borde, asumamos que en tiempo $t = 0$ la partícula tiene posición y velocidad dados por δx_0 y v_0

respectivamente. Luego, es posible encontrar

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & \delta x_0 e^{-\gamma t} \cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega} [v_0 + \gamma \delta x_0] e^{-\gamma t} \sin(\Omega t) \\ & + \frac{Q_0}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega_0^2} \left[(\omega_0^2 - \Omega_0^2) [\cos(\Omega_0 t) - e^{-\gamma t} \cos(\Omega t)] \right. \\ & \left. + 2\gamma \Omega_0 \sin(\Omega_0 t) - \frac{\gamma}{\Omega} (\omega_0^2 + \Omega_0^2) e^{-\gamma t} \sin(\Omega t) \right]. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Esta expresión no es fácil de leer, sin embargo, tiene un comportamiento asintótico sencillo. Para tiempos $t \gg \gamma^{-1}$, vemos que la solución tiende a

$$\delta x(t) \rightarrow \frac{Q_0}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega_0^2} \left[(\omega_0^2 - \Omega_0^2) \cos(\Omega_0 t) + 2\gamma \Omega_0 \sin(\Omega_0 t) \right]. \quad (4.117)$$

Es decir, toda información sobre las condiciones iniciales se pierde, dominando la solución particular. Este resultado también es obtenido para el caso en que $\gamma > \omega_0$. Si tuviéramos la libertad de ajustar ω_0 , vemos que la máxima amplitud de oscilación ocurrirá para el caso $\omega_0 = \Omega_0$, que corresponde al caso resonante, en cuyo caso, se obtiene $\delta x(t) \rightarrow \frac{Q_0}{2\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.