

3 Campos de fuerzas, trabajo y energía

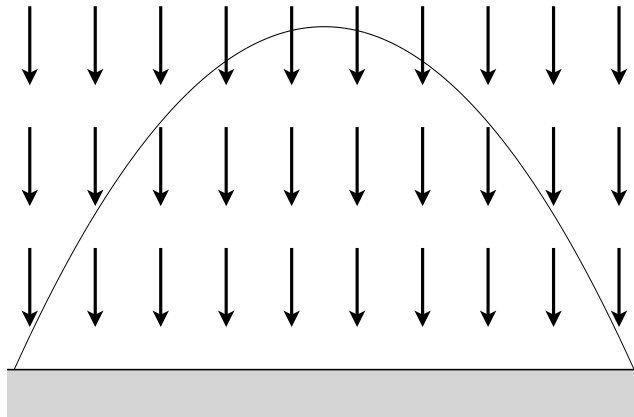
A continuación procederemos a definir nuevas cantidades que nos permitirán un análisis más profundo (y poderoso) del movimiento. Una de estas cantidades será la energía mecánica de un sistema. Como veremos, las fuerzas se dividen en dos grandes clases: Fuerzas conservativas y fuerzas no-conservativas. Las fuerzas conservativas tienen la virtud de mantener inalterable el valor de la energía mecánica. Este hecho, nos permitirá tener una nueva mirada de las leyes de Newton.

3.1 Campos de fuerzas

Hay ciertos tipos de fuerzas cuya acción sobre una partícula depende exclusivamente de la posición de la partícula. Estas fuerzas pueden ser pensadas como una propiedad del espacio. Por ejemplo, la fuerza gravitacional

$$\vec{F}_g = m\vec{g}, \tag{3.1}$$

actuando sobre una partícula en la superficie de la tierra es la misma en todo el espacio (siempre y cuando no nos alejemos mucho de la superficie). Luego, podemos pensar en \vec{F}_g como un campo de fuerzas (ver la siguiente figura):



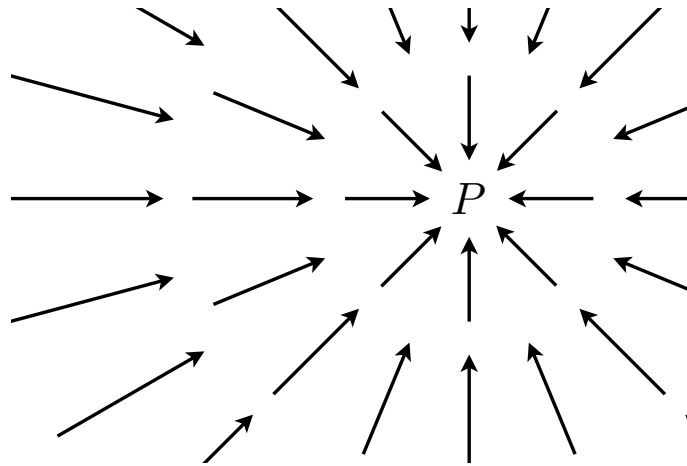
En la figura, se muestra un lanzamiento de proyectil. El proyectil de masa m avanza por un campo de fuerzas cuyo efecto es transmitirle al proyectil la influencia de la tierra mediante una fuerza $\vec{F}_g = m\vec{g}$ en cada posición que el proyectil adopte.

Otro ejemplo sencillo de apreciar es aquel ofrecido por un resorte con un extremo anclado a un punto fijo. Supongamos una partícula de masa m comunicado con un

punto fijo P a través de un resorte de constante elástica k y largo natural $D = 0$. Entonces, de acuerdo a la ecuación (2.199), la fuerza que el punto fijo P ejerce sobre m tiene la forma:

$$\vec{F}_{Pm} = -k(\vec{r} - \vec{r}_P), \quad (3.2)$$

donde \vec{r}_P es la posición del punto fijo. Vemos que \vec{F}_{Pm} es una función de la posición \vec{r} , y por lo tanto puede ser pensado como un campo de fuerzas. La siguiente figura muestra el perfil del campo de fuerzas debido al resorte:

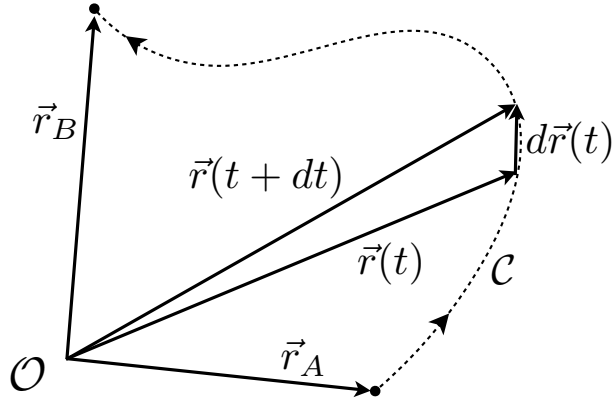


Dado que \vec{F}_{Pm} depende de la distancia linealmente, mientras más nos alejamos de P , la fuerza se vuelve más intensa. Al igual que con el campo gravitacional, podemos pensar en la fuerza debido al resorte como un campo de fuerza que existe en todo el espacio, independiente de la ubicación de la partícula. Notemos que el punto P podría ser la posición de otra partícula (que se conecta a m mediante el resorte). En tal caso, la partícula P genera un campo de fuerzas alrededor suyo. Si la partícula se mueve, entonces el campo de fuerzas se mueve junto a la partícula.

Claramente, no todas las fuerzas que hemos estudiado pueden ser representadas como campos. Por ejemplo, las fuerzas de contacto. Consideremos la fuerza de roce visco, que depende de la velocidad de la partícula. En este caso, no existe un perfil de fuerza que se extienda por todo el espacio independiente de la ubicación de partícula. Por el contrario, la fuerza de roce viscoso solo puede ser expresada una vez conocida la velocidad de la partícula, lo que será posible solamente después de resolver la ecuación de movimiento de la partícula, después de imponer condiciones iniciales.

3.2 Trabajo

A continuación, definiremos el concepto de trabajo. Para ello, consideremos una partícula en movimiento a lo largo de un camino \mathcal{C} dado, con punto de partida A y punto final B , tal como lo muestra la siguiente figura:



Naturalmente, sobre la partícula pueden actuar múltiples fuerzas, de tal forma que el movimiento de la partícula a lo largo del camino \mathcal{C} es la consecuencia de la segunda ley de Newton debido a la fuerza total \vec{F}_{tot} . Digamos que actúan N fuerzas \vec{F}_i sobre la partícula, cada una debido a un agente i , de tal manera que

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.3)$$

Enfoquemos nuestra atención en un momento t particular del trayecto, cuando la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}(t)$. Después de un incremento de tiempo infinitesimal dt , la partícula estará en la posición $\vec{r}(t + dt)$, y por lo tanto, a lo largo del camino \mathcal{C} , habrá avanzado en un paso infinitesimal $d\vec{r}$ dado por

$$d\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t), \quad (3.4)$$

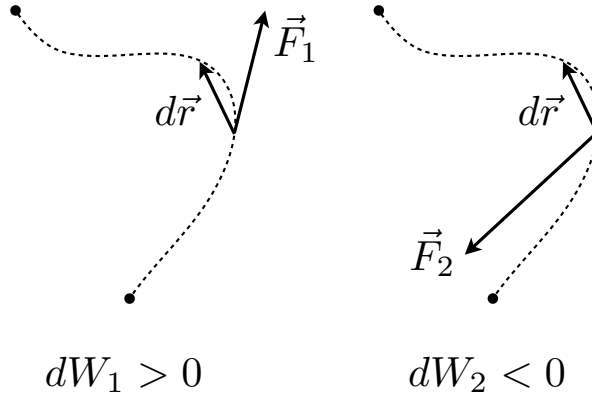
$$= \vec{v}(t)dt. \quad (3.5)$$

A partir de esta situación, definimos el trabajo infinitesimal dW_i ejercido por un agente i sobre la partícula (en el paso $d\vec{r}$) como:

$$dW_i \equiv \vec{F}_i \cdot d\vec{r}. \quad (3.6)$$

Notemos que el trabajo infinitesimal es una cantidad escalar que puede ser positiva o negativa dependiendo de si el producto punto entre \vec{F}_i y $d\vec{r}$ es positivo o negativo.

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestran dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 que, para un mismo paso infinitesimal $d\vec{r}$, implican trabajos dW_1 y dW_2 positivos y negativos respectivamente:



A partir de (3.6) podemos definir el trabajo que ejerce un agente i sobre la partícula a lo largo del camino \mathcal{C} , como la suma de los trabajos infinitesimales de cada porción de \mathcal{C} :

$$W_i(\mathcal{C}) \equiv \int_{\mathcal{C}} dW_i, \quad (3.7)$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}. \quad (3.8)$$

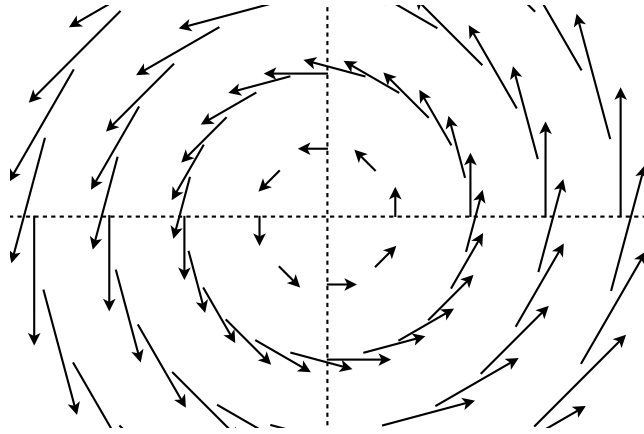
Esta definición depende crucialmente del camino \mathcal{C} . Para una misma fuerza, dos caminos distintos pueden llevar a valores del trabajo. Para adquirir experiencia con esta definición, veamos algunos ejemplos.

3.2.1 Ejemplo 1

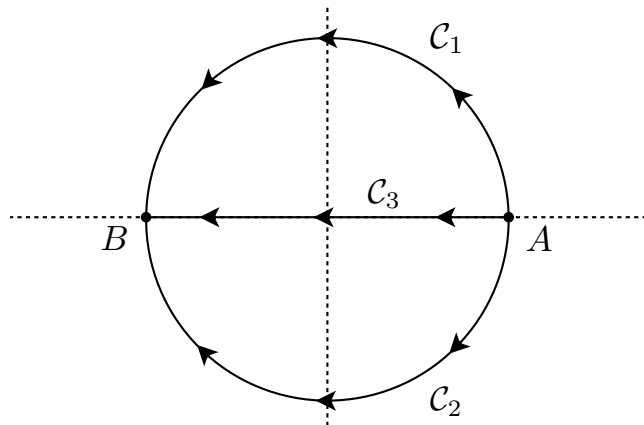
Supongamos la existencia de un campo de fuerzas \vec{F} que, en términos de coordenadas cilíndricas, tiene la siguiente forma

$$\vec{F} = K_0 \rho \hat{\phi}, \quad (3.9)$$

donde K_0 es una constante positiva. Esta es una fuerza cuya magnitud aumenta en la medida que nos alejamos del origen, y que se arremolina en torno al eje z en la dirección \hat{k} (de acuerdo a la regla de la mano derecha), tal como lo muestra la siguiente figura:



Calculemos el trabajo debido a este campo de fuerzas \vec{F} a lo largo de tres caminos diferentes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 , conectando los puntos A y B (ver siguiente figura). El primer camino, \mathcal{C}_1 corresponde a un recorrido de radio R constante en torno al origen \mathcal{O} , en sentido anti-horario. El camino \mathcal{C}_2 corresponde a un recorrido de igual radio en sentido horario. Finalmente, \mathcal{C}_3 corresponde a un camino en línea recta pasando por el origen.



Calculemos primero el trabajo ejercido por el campo de fuerzas a lo largo del camino \mathcal{C}_1 . Dado que este es un camino con radio constante, podemos describir la posición a lo largo del camino \mathcal{C}_1 a través del ángulo ϕ :

$$\vec{r}(\phi) = R \hat{\rho}(\phi), \quad (3.10)$$

donde, recordemos, $\hat{\rho}(\phi) = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$. Luego, de acuerdo a (3.5) el paso infinitesimal $d\vec{r}$ adquiere la siguiente forma

$$d\vec{r} = R\dot{\phi}\hat{\phi}dt. \quad (3.11)$$

Es importante apreciar que no estamos obligados a utilizar el tiempo para escribir el paso infinitesimal $d\vec{r}$. De hecho, en la medida que el tiempo incrementa dt , el ángulo describiendo el avance a lo largo del camino incrementa una cantidad $d\phi = \dot{\phi}dt$. Luego, basta escribir

$$d\vec{r} = R\hat{\phi}d\phi. \quad (3.12)$$

De esta forma, utilizando (3.8) podemos escribir el trabajo a lo largo de \mathcal{C}_1 de la forma:

$$W(\mathcal{C}_1) = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.13)$$

$$= \int_0^\pi (K_0 R \hat{\phi}) \cdot (R \hat{\phi} d\phi), \quad (3.14)$$

$$= K_0 R^2 \int_0^\pi d\phi, \quad (3.15)$$

$$= \pi K_0 R^2. \quad (3.16)$$

Veamos ahora el cálculo del trabajo a lo largo del camino \mathcal{C}_2 . En este caso podemos seguir los mismos pasos anteriores. La diferencia, sin embargo, es que en este caso el incremento $d\phi$ a lo largo de \mathcal{C}_2 es negativo (puesto que el trayecto es en sentido horario), lo que modifica los límites de integración:

$$W(\mathcal{C}_2) = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.17)$$

$$= \int_0^{-\pi} (K_0 R \hat{\phi}) \cdot (R \hat{\phi} d\phi), \quad (3.18)$$

$$= K_0 R^2 \int_0^{-\pi} d\phi, \quad (3.19)$$

$$= -\pi K_0 R^2. \quad (3.20)$$

Finalmente, en el caso de \mathcal{C}_3 , el camino transcurre para el ángulo fijo $\phi = 0$, de tal manera que la posición a lo largo trayecto puede ser descrito mediante la coordenada cartesiana x :

$$\vec{r}(x) = x \hat{i}. \quad (3.21)$$

Luego, vemos que

$$d\vec{r} = \hat{x} \hat{i} dt, \quad (3.22)$$

$$= \hat{i} dx. \quad (3.23)$$

Dado que el camino va desde $\vec{r}_A = R\hat{i}$ a $\vec{r}_B = -R\hat{i}$, el incremento dx es negativo. Por otro lado, notemos que la fuerza a lo largo de \mathcal{C}_3 puede ser escrita como

$$\vec{F} = K_0 x \hat{j}. \quad (3.24)$$

Luego, es directo ver que el trabajo infinitesimal en cualquier parte del trayecto es cero:

$$dW = (K_0 x \hat{j}) \cdot (\hat{i} dx) = 0, \quad (3.25)$$

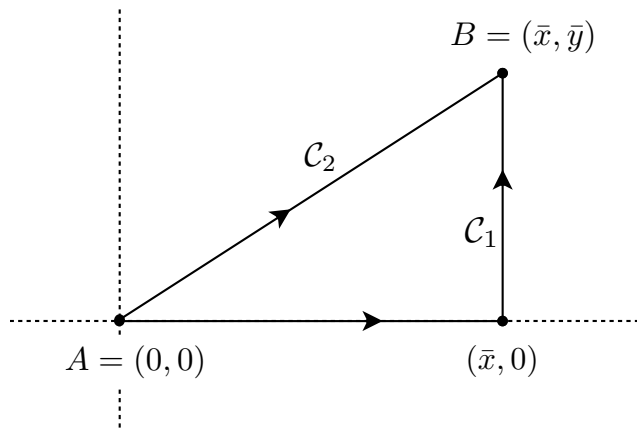
con lo cual $W(\mathcal{C}_3) = 0$. En definitiva, obtenemos tres resultados distintos dependiendo del camino escogido.

3.2.2 Ejemplo 2

Consideremos ahora el siguiente campo de fuerzas expresado en términos de coordenadas cartesianas:

$$\vec{F} = \frac{1}{5} \alpha x^2 y^5 \hat{i} + \frac{1}{3} \beta x^3 y^4 \hat{j}, \quad (3.26)$$

donde α y β son constantes arbitrarias. Calculemos el trabajo debido a la fuerza a lo largo de dos caminos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 ilustrados en la siguiente figura:



El primer camino, \mathcal{C}_1 , consiste en dos segmentos, primero una línea recta a lo largo del eje x desde $A = (0, 0)$ hasta $(\bar{x}, 0)$, y luego una línea recta a lo largo del eje y desde $(\bar{x}, 0)$ hasta $B = (\bar{x}, \bar{y})$. El segundo camino consiste en una línea recta desde A hasta B . Naturalmente, resulta conveniente separar el cálculo del trabajo $W(\mathcal{C}_1)$ en dos integrales, cada una para cada segmento. Es decir:

$$W(\mathcal{C}_1) = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.27)$$

$$= \int_0^{\bar{x}} \vec{F} \cdot (\hat{i}dx) + \int_{\bar{y}}^0 \vec{F} \cdot (\hat{j}dy), \quad (3.28)$$

donde usamos $d\vec{r} = \hat{i}dx$ para el primer segmento, y $d\vec{r} = \hat{j}dy$ para el segundo segmento. Luego, reemplazando $\vec{F} = 0$ a lo largo del primer segmento, y $\vec{F} = \frac{1}{5}\alpha\bar{x}^2y^5\hat{i} + \frac{1}{3}\beta\bar{x}^3y^4\hat{j}$ a lo largo del segundo, obtenemos

$$W(\mathcal{C}_1) = \int_{\bar{y}}^0 \left(\frac{1}{5}\alpha\bar{x}^2y^5\hat{i} + \frac{1}{3}\beta\bar{x}^3y^4\hat{j} \right) \cdot (\hat{j}dy), \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{3}\beta\bar{x}^3 \int_{\bar{y}}^0 y^4 dy, \quad (3.30)$$

$$= \frac{1}{15}\beta\bar{x}^3\bar{y}^5. \quad (3.31)$$

Veamos ahora el cálculo correspondiente al camino \mathcal{C}_2 . Notemos que el camino \mathcal{C}_2 consiste en la recta

$$y(x) = x \frac{\bar{y}}{\bar{x}}. \quad (3.32)$$

Esto quiere decir que podemos escoger la variable x para describir el avance a través de la trayectoria. Para ser precisos, a lo largo de \mathcal{C}_2 el vector posición puede ser escrito:

$$\vec{r}(x) = \left(\hat{i} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\hat{j} \right) x. \quad (3.33)$$

Luego, podemos escribir un paso infinitesimal a lo largo del camino como

$$d\vec{r}(x) = \left(\hat{i} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\hat{j} \right) dx. \quad (3.34)$$

Por otro lado, gracias a (3.32), podemos escribir la fuerza a lo largo de \mathcal{C}_2 como

$$\vec{F} = \frac{1}{5}\alpha x^7 \frac{\bar{y}^5}{\bar{x}^5} \hat{i} + \frac{1}{3}\beta x^7 \frac{\bar{y}^4}{\bar{x}^4} \hat{j}, \quad (3.35)$$

Utilizando estos resultados para calcular $W(\mathcal{C}_2)$, vemos que

$$W(\mathcal{C}_2) = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.36)$$

$$= \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{1}{5} \alpha x^7 \frac{\bar{y}^5}{\bar{x}^5} \hat{i} + \frac{1}{3} \beta x^7 \frac{\bar{y}^4}{\bar{x}^4} \hat{j} \right) \cdot \left(\hat{i} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \hat{j} \right) dx, \quad (3.37)$$

$$= \frac{\bar{y}^5}{\bar{x}^5} \left(\frac{1}{5} \alpha + \frac{1}{3} \beta \right) \int_0^{\bar{x}} x^7 dx, \quad (3.38)$$

$$= \frac{\bar{y}^5 \bar{x}^3}{120} (3\alpha + 5\beta). \quad (3.39)$$

En consecuencia, para valores arbitrarios de α y β , los trabajos calculados a lo largo de $W(\mathcal{C}_1)$ y $W(\mathcal{C}_2)$ son distintos. Sin embargo, notemos que si $\beta = \alpha$, ambos caminos tienen el mismo trabajo asociado, independiente de los valores de \bar{x} e \bar{y} . En primera instancia, esto parece anecdótico. Sin embargo, como veremos pronto, hay fuerzas para las cuales el trabajo entre dos puntos A y B es independiente del camino \mathcal{C} escogido.

3.3 Energía Cinética

Consideremos el desafío de calcular el trabajo $W_{\text{tot}}(\mathcal{C})$ a lo largo de un camino \mathcal{C} entre puntos A y B , debido a la fuerza total $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$. En este caso vemos que

$$W_{\text{tot}}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{\text{tot}} \cdot d\vec{r}. \quad (3.40)$$

Sin embargo, debido a la segunda ley de Newton podemos reemplazar $\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$, de donde sigue que:

$$W_{\text{tot}}(\mathcal{C}) = m \int_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad (3.41)$$

$$= m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt, \quad (3.42)$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{v}^2}{dt} dt, \quad (3.43)$$

$$= \frac{m}{2} \int_{\vec{v}_A^2}^{\vec{v}_B^2} \vec{v}^2, \quad (3.44)$$

$$= \frac{m}{2} (\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2). \quad (3.45)$$

Es decir, el trabajo total $W_{\text{tot}}(\mathcal{C})$ puede ser escrito en términos de información cinemática de la masa m en el punto inicial A y final B . Este es un resultado importante, por lo que es conveniente definir el concepto de energía cinética de una partícula de masa m , que denotaremos K :

$$K \equiv \frac{m}{2} \vec{v}^2. \quad (3.46)$$

Luego, podemos expresar nuestro resultado anterior como

$$W_{\text{tot}}(\mathcal{C}) = K_B - K_A. \quad (3.47)$$

3.4 Fuerzas conservativas

Diremos que una fuerza es conservativa si el trabajo calculado a partir de ella, entre dos puntos arbitrarios A y B , es independiente del camino \mathcal{C} . Si tales fuerzas existen, al calcular $W(\mathcal{C})$, no necesitamos especificar el camino escogido en la integral (3.8), y por lo tanto podemos simplemente escribir:

$$W(\mathcal{C}) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.48)$$

En el lado derecho de esta expresión podemos integrar desde \vec{r}_A hasta \vec{r}_B por el camino que deseemos, sin cambiar su resultado. Para lidiar con fuerzas conservativas, es conveniente introducir el concepto de energía potencial U del sistema:

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.49)$$

donde \vec{r}_0 es la posición de un punto arbitrario de nuestra elección. Es inmediato verificar que

$$U(\vec{r}_0, \vec{r}_0) = 0. \quad (3.50)$$

Dado que no estamos especificando el camino de integración desde \vec{r}_0 y \vec{r} , esta definición solo tiene sentido si \vec{F} es conservativa. Habitualmente, para escribir U omitimos \vec{r}_0 y simplemente escribimos

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.51)$$

Aún así, siempre es importante estar al tanto de la elección de \vec{r}_0 . Notemos que a partir de la definición (3.51) es directo constatar que

$$W(\mathcal{C}) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B). \quad (3.52)$$

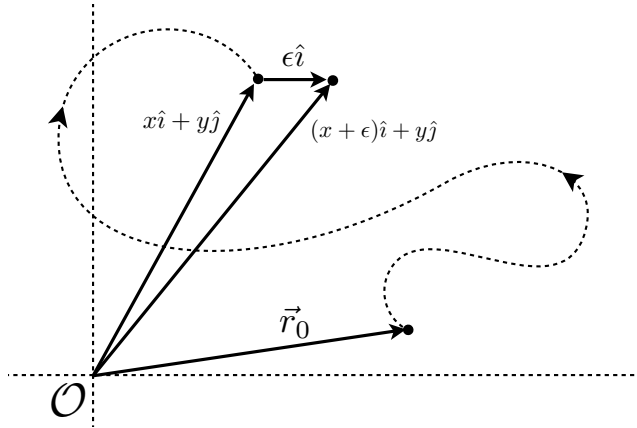
Es decir, el trabajo debido a una fuerza conservativa es la diferencia del potencial inicial y final.

La idea de la definición (3.51) es que $U(\vec{r})$ es una función de la posición \vec{r} . Esto quiere decir que podemos diferenciar U con respecto a las coordenadas de \vec{r} . Por ejemplo, consideremos ahora la derivada de U con respecto a la coordenada cartesiana x (manteniendo fijas las coordenadas y y z). Escribiendo $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}U(\vec{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (U(x + \epsilon, y, z) - U(x, y, z)), \quad (3.53)$$

$$= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\vec{r}_0}^{(x+\epsilon)\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right). \quad (3.54)$$

Notemos que la primera integral en la diferencia anterior va desde \vec{r}_0 hasta $(x + \epsilon)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Pero este camino puede ser separado realizado en dos pasos: primero desde \vec{r}_0 hasta $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, y luego desde $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ hasta $(x + \epsilon)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Esto puede ser apreciado en la siguiente figura, donde mostramos la situación confinada al plano x - y :



Luego, podemos escribir

$$\int_{\vec{r}_0}^{(x+\epsilon)\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}^{(x+\epsilon)\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.55)$$

Usando este resultado, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}U(\vec{r}) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}^{(x+\epsilon)\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot \hat{i} dx. \quad (3.56)$$

Notemos que la integral de la expresión anterior es a lo largo de un camino de extensión infinitesimal ϵ (ver figura previa). Luego, podemos usar $d\vec{r} = \hat{i}dx$ y escribir la integral como una suma de Riemann de un solo paso ϵ :

$$\int_{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}^{(x+\epsilon)\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}} \vec{F} \cdot \hat{i}dx = \epsilon \hat{i} \cdot \vec{F}(\vec{r}). \quad (3.57)$$

Notemos que $\hat{i} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ es la componente x de $\vec{F}(\vec{r})$, que podemos denotar $F_x(\vec{r})$. De esta forma, finalmente obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}U(\vec{r}) = -F_x(\vec{r}). \quad (3.58)$$

Este resultado lo podemos repetir para obtener expresiones de las derivadas de U con respecto a y y z :

$$\frac{\partial}{\partial y}U(\vec{r}) = -F_y(\vec{r}), \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U(\vec{r}) = -F_z(\vec{r}). \quad (3.60)$$

Debido a este resultado, es conveniente introducir el concepto de gradiente ∇U de un potencial U , mediante el símbolo nabra:

$$\nabla \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.61)$$

Con este símbolo, podemos, podemos reunir los tres resultados anteriores en una única expresión $\nabla U(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r})$. En definitiva, si una fuerza es conservativa $\vec{F}(\vec{r})$, a partir de ella podemos definir un energía potencial $U(\vec{r})$, cuyo gradiente es $-\vec{F}(\vec{r})$. Dicho de otra forma, si una fuerza es conservativa, entonces debe existir un potencial U tal que

$$\vec{F} = -\nabla U. \quad (3.62)$$

3.5 Identificando fuerzas conservativas

¿Cómo podemos saber si una fuerza es conservativa? A continuación demostraremos un teorema muy poderoso que permite identificar fuerzas conservativas. Primero, enunciemos el teorema:

Teorema: Una fuerza es conservativa si, y solo si, su rotor es nulo. Es decir:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \iff \quad \nabla \times \vec{F} = 0. \quad (3.63)$$

El rotor de una fuerza, $\nabla \times \vec{F}$, es simplemente un producto cruz entre ∇ , el símbolo definido en (3.61), y la fuerza \vec{F} . En forma explícita, el rotor de un vector \vec{A} corresponde al siguiente vector:

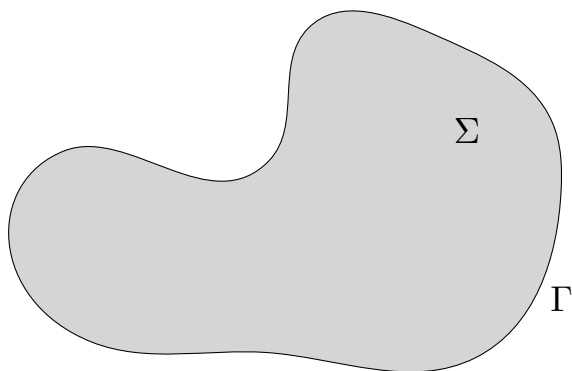
$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (3.64)$$

3.5.1 Demostración

Para demostrar la equivalencia entre $\vec{F} = -\nabla U$ y $\nabla \times \vec{F} = 0$, comencemos por la parte más fácil. Notemos que si $\vec{F} = -\nabla U$, entonces

$$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times (\nabla U). \quad (3.65)$$

Sin embargo, es directo ver que el rotor de un gradiente es idénticamente cero, de donde concluimos que $\nabla \times \vec{F} = 0$. Ahora debemos demostrar que si el rotor de una fuerza es cero, ésta es conservativa. Para proceder, consideremos una superficie Σ rodeada por un camino cerrado Γ tal como lo muestra la siguiente figura:



Para que la discusión se mantenga simple, supongamos que esta superficie está restringida al plano x - y . Luego, hagamos un producto punto entre $\nabla \times \vec{F}$ y \hat{k} e integremos el escalar resultante $\hat{k} \cdot (\nabla \times \vec{F})$ por toda la superficie:

$$I = \int_{\Sigma} \hat{k} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \, dx dy. \quad (3.66)$$

Evidentemente, dado que $\nabla \times \vec{F} = 0$ se tiene que $I = 0$. A continuación dividamos la superficie en N pequeñas celdas de lado infinitesimal ϵ . Esto quiere decir que

$$I = \sum_{i=1}^N I_i, \quad I_i \equiv \int_{\Sigma_i} \hat{k} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \, dx dy, \quad (3.67)$$

donde Σ_i es la superficie encerrada en cada cuadrado infinitesimal. Enfoquemonos ahora que pasa con la integración I_i en un cuadrado dado. Usando (3.64), vemos que

$$I_i = \int_{\Sigma_i} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \, dx dy, \quad (3.68)$$

Pero dado que las celdas son pequeñas, podemos escribir

$$I_i = \epsilon^2 \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}(x_i, y_i) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(x_i, y_i) \right), \quad (3.69)$$

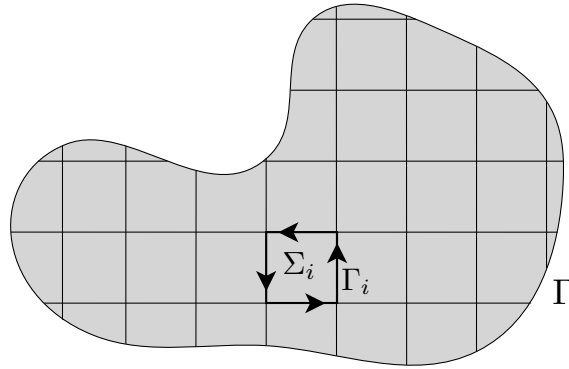
donde x_i e y_i denotan la posición de la celda. Además, también podemos escribir $\frac{\partial F_y}{\partial x} = (F_y(x + \epsilon) - F_y(x))/\epsilon$ y $\frac{\partial F_x}{\partial y} = (F_x(y + \epsilon) - F_x(y))/\epsilon$. De esta forma, vemos que

$$I_i = \epsilon [F_y(x_i + \epsilon, y_i) - F_y(x_i, y_i) - F_x(x_i, y_i + \epsilon) + F_x(x_i, y_i)]. \quad (3.70)$$

Una forma elegante de expresar este resultado es

$$I_i = \oint_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.71)$$

donde el símbolo \oint nos informa que estamos integrando por un camino cerrado Γ_i alrededor de la celda Σ_i (ver siguiente figura).

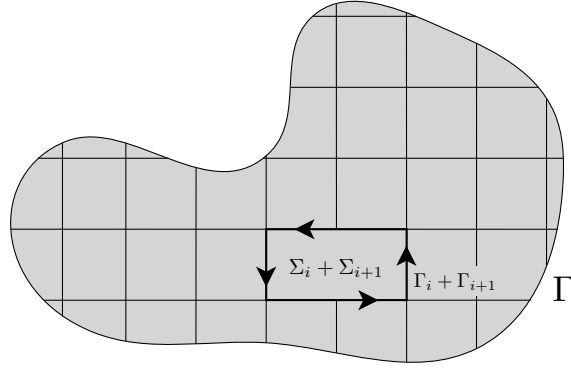


En efecto, el camino Γ_i consta de cuatro segmentos, cada uno aportando con un término proporcional a ϵ en la integral de (3.70). En definitiva, hemos sido capaces de re-escribir la integral de área (3.68) en términos de la integral de camino (3.70). Esto lo podemos repetir para cada celda. Sin embargo, cuando sumemos cada contribución de I_i en (3.67), los aportes de cada segmento del camino cerrado a lo largo de Γ_i se cancelará con los segmentos de las celdas contiguas, que tienen el sentido contrario. Por ejemplo, si sumamos I_i con I_{i+1} , donde $i + 1$ se refiere a una celda contigua a lo

largo de x , entonces $x_{i+1} = x_i + \epsilon$ y $y_{i+1} = y_i$, es directo ver que

$$\begin{aligned}
 I_i + I_{i+1} &= \epsilon \left[-F_y(x_i, y_i) - F_x(x_i, y_i + \epsilon) + F_x(x_i, y_i) \right. \\
 &\quad \left. + F_y(x_i + 2\epsilon, y_i) - F_x(x_i + \epsilon, y_i + \epsilon) + F_x(x_i + \epsilon, y_i) \right], \\
 &= \oint_{\Gamma_i + \Gamma_{i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

donde $\Gamma_i + \Gamma_{i+1}$ es el camino cerrado que rodea a las dos celdas $\Sigma_i + \Sigma_{i+1}$, tal como lo muestra la siguiente figura:



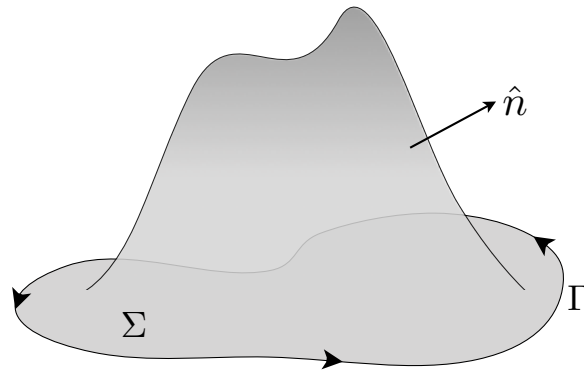
Al repetir este paso con cada celda, finalmente obtendremos que todos los segmentos de celdas contiguas se cancelan, excepto por aquellos que colindan con el camino Γ que rodea a toda la superficie Σ . Esto finalmente nos entrega el resultado

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{3.73}$$

Esta es una instancia del teorema de Stokes, que establece que la integral de área sobre una superficie arbitraria Σ con vector unitario \hat{n} , puede ser re-expresada en términos de una integral de camino a lo largo del camino cerrado Γ que bordea a Σ . Más precisamente:

$$\int_{\Sigma} \hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}) d\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{3.74}$$

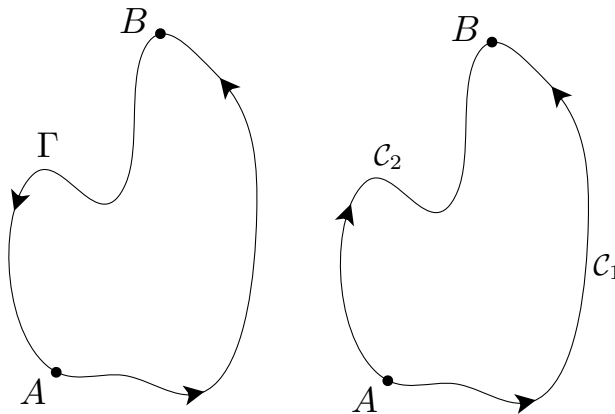
donde $d\sigma$ es la medida de integración sobre el área (en el caso particular que acabamos de examinar, donde la superficie se restringe sobre el plano x - y , tenemos $d\sigma = dxdy$). La siguiente figura ilustra la situación:



Notablemente, el teorema de Stokes (3.74) es válida para cualquier superficie encerrada por Γ . Para concluir la demostración, notemos que la integral (3.73) puede ser re-escrita en términos de dos integrales de la forma

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.75)$$

donde \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son dos caminos que van desde puntos arbitrarios A y B ubicados sobre Γ , de tal forma que el \mathcal{C}_2 vaya en el sentido opuesto a Γ (ver figura):



En otras palabras, dado que $I = 0$, hemos demostrado que si $\nabla \times \vec{F} = 0$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.76)$$

Pero puesto que Γ arbitrario, entonces los caminos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 también son arbitrarios, de donde sigue que la fuerza \vec{F} debe ser conservativa.

3.5.2 Utilidad del teorema

¿De qué nos sirve contar con dicho teorema? Con él, podemos determinar fácilmente si una fuerza es o no es conservativa. De concluir que una fuerza es conservativa, podemos proponernos buscar su potencial asociado, y si tenemos la suerte de encontrarlo, podemos utilizarla para estudiar la dinámica de un sistema a través de nuevos métodos, que estudiaremos durante el resto de este curso. Por ahora, enfoquemos nuestra atención sobre la determinación de qué fuerzas son o no son conservativas.

3.5.3 Ejemplo

Recordemos el ejemplo de la Sección 3.2.2, donde calculamos el trabajo debido a la fuerza

$$\vec{F} = \frac{1}{5}\alpha x^2 y^5 \hat{i} + \frac{1}{3}\beta x^3 y^4 \hat{j}, \quad (3.77)$$

a lo largo de dos caminos diferentes \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 . En dicho calculo, encontramos que el trabajo calculado para dichos caminos coincide si $\beta = \alpha$. Esto sugiere que la fuerza podría ser conservativa para dicha combinación. En efecto, utilizando la ecuación (3.64) es directo encontrar que el rotor de \vec{F} es:

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3}\beta x^3 y^4 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{5}\alpha x^2 y^5 \right) \right] \hat{k}, \quad (3.78)$$

$$= (\beta - \alpha) x^2 y^4 \hat{k}, \quad (3.79)$$

de donde vemos que si $\beta = \alpha$, el rotor se desvanece, y podemos concluir que la fuerza es conservativa.

¿Cuál es el potencial asociado? Lamentablemente no hay una regla única para encontrar potenciales. La forma más común es simplemente adivinar la forma del potencial. Si tenemos suerte, podemos realizar la integral de camino que define al potencial (3.51). En el caso de este ejemplo, ya tenemos esa labor hecha, donde \vec{r}_0 corresponde al origen ($\vec{r}_0 = 0$). El resultado, a partir de la ecuación (3.39) viene a ser (usando $\beta = \alpha$):

$$U(x, y) = -\frac{\alpha}{15} y^5 x^3. \quad (3.80)$$

3.5.4 Cambiando el punto de referencia de un potencial

Supongamos que, para una fuerza conservativa \vec{F} dada, contamos con dos potenciales con posiciones de referencias dadas por \vec{r}_0 y \vec{r}'_0 . Explícitamente, estos potenciales vienen dados por

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (3.81)$$

$$U(\vec{r}, \vec{r}'_0) = - \int_{\vec{r}'_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.82)$$

A partir de estas expresiones vemos que

$$U(\vec{r}, \vec{r}'_0) = U(\vec{r}, \vec{r}_0) + U(\vec{r}_0, \vec{r}'_0). \quad (3.83)$$

Es decir, ambos potenciales $U(\vec{r}, \vec{r}_0)$ y $U(\vec{r}, \vec{r}'_0)$ difieren en una constante $U(\vec{r}_0, \vec{r}'_0)$. En el ejemplo de la Sección 3.5.3, el potencial (3.80) está definido con respecto a la posición de referencia $\vec{r}_0 = 0$. Luego, el potencial U para la misma fuerza conservativa, pero con un punto de referencia arbitrario \vec{r}_0 tendrá la misma forma (3.80) más una constante:

$$U(x, y) = -\frac{\alpha}{15}y^5x^3 + C. \quad (3.84)$$

Dicha constante depende de \vec{r}_0 , y deberá ser tal que $U(x_0, y_0) = 0$. Luego, deducimos que $C = \frac{\alpha}{15}y_0^5x_0^3$.

Muchas veces, es conveniente no hacer referencia explícita a la posición \vec{r}_0 . En tal caso, podemos escribir

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) = - \int^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + C, \quad (3.85)$$

donde la primera integral es una integral indefinida (cuyo límite inferior no definimos). De esta forma, en lugar de especificar \vec{r}_0 , simplemente especificamos la constante C . Al final del día, la constante C es irrelevante al momento de calcular la divergencia del potencial, y por lo tanto no afecta el valor de la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$.

3.6 Potencial gravitacional

Consideremos el campo de fuerza gravitacional $\vec{F}_g = -mg\hat{k}$. Dado que es un campo de fuerzas constante, es directo ver que

$$\nabla \times \vec{F}_g = 0, \quad (3.86)$$

de donde sigue que debe existir un potencial gravitacional U_g , tal que

$$\vec{F}_g = -\nabla U_g. \quad (3.87)$$

No es difícil verificar que el siguiente potencial cumple con esta exigencia:

$$U_g(\vec{r}) = mg\vec{r} \cdot \hat{k} + C. \quad (3.88)$$

Si lo deseamos, podemos determinar C mediante la condición $U(\vec{r}_0) = 0$, requerida por (3.50). En tal caso, obtenemos $U_g(\vec{r}) = mg(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{k}$. Luego, si usamos $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ vemos que, alternativamente, podemos escribir el potencial como

$$U_g(\vec{r}) = mg(z - z_0). \quad (3.89)$$

Recordemos que la posición \vec{r}_0 (o la altura z_0) es arbitraria. Podemos elegirla convenientemente para simplificar la forma del potencial en un problema dado. Por ejemplo, si lidiamos con problemas donde hay suelo, podemos elegir z_0 para que coincida con la altura del suelo.

3.7 Potencial de un resorte

Supongamos un resorte de constante elástica k y largo natural D con uno de sus extremos atados a un punto fijo \vec{r}_P , tal como vimos en el segundo ejemplo de la Sección 3.1. Luego, la fuerza que P ejerce sobre una partícula atada al extremo libre del resorte será:

$$\vec{F}_k(\vec{r}) = -k(\|\vec{r} - \vec{r}_P\| - D) \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|}. \quad (3.90)$$

Calculemos el rotor de este campo de fuerzas. Para ello, primero reescribamos la fuerza como:

$$\vec{F}_k(\vec{r}) = -k(\vec{r} - \vec{r}_P) + kD \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|}. \quad (3.91)$$

A partir de (3.64), vemos que el rotor de $\vec{r} - \vec{r}_P$, es idénticamente cero

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{r} - \vec{r}_P) &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \hat{k}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

De forma similar, es posible verificar que

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} &= \hat{i} \left[(z - z_P) \frac{\partial}{\partial y} - (y - y_P) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} \\ &\quad + \hat{j} \left[(x - x_P) \frac{\partial}{\partial z} - (z - z_P) \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} \\ &\quad + \hat{k} \left[(y - y_P) \frac{\partial}{\partial x} - (x - x_P) \frac{\partial}{\partial y} \right] \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|}.\end{aligned}\quad (3.93)$$

Sin embargo, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = -\frac{x - x_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|^3}, \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = -\frac{y - y_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|^3}, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = -\frac{z - z_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|^3}. \quad (3.96)$$

Luego, utilizando estas expresiones de regreso en (3.93), obtenemos

$$\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = 0. \quad (3.97)$$

Con todos estos resultados, vemos que el rotor de la fuerza debido a un resorte es:

$$\nabla \times \vec{F}_k(\vec{r}) = 0. \quad (3.98)$$

En consecuencia, debe existir un potencial U_k tal que $\vec{F}_k(\vec{r}) = -\nabla U_k$. No es difícil verificar que el siguiente potencial satisface este requisito:

$$U_k(\vec{r}) = \frac{k}{2} (\|\vec{r} - \vec{r}_P\| - D)^2 + C, \quad (3.99)$$

donde C es una constante. Si deseamos especificar C , podemos determinar su valor con la ayuda de la condición $U_k(\vec{r}_0) = 0$, lo que arroja $C = -\frac{k}{2} (\|\vec{r}_0 - \vec{r}_P\| - D)^2$.

3.8 Fuerzas radiales

La fuerza (3.90) es un ejemplo particular de una fuerza radial. Las fuerzas radiales son fuerzas que apuntan radialmente desde (o hacia) un punto fijo \vec{r}_P , y cuya magnitud

depende de la distancia hasta \vec{r}_P (es decir $\|\vec{r} - \vec{r}_P\|$). En otras palabras, una fuerza radial tiene la forma general

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}, \quad (3.100)$$

donde r y \hat{r} son definidos como

$$r \equiv \|\vec{r} - \vec{r}_P\|, \quad (3.101)$$

$$\hat{r} \equiv \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|}. \quad (3.102)$$

En primer lugar, verifiquemos que una fuerza radial es conservativa. Para ello, notemos que

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times (f(r)\hat{r}), \quad (3.103)$$

$$= [\nabla f(r)] \times \hat{r} + f(r) \nabla \times \hat{r}, \quad (3.104)$$

donde simplemente utilizamos la definición de rotor junto con la regla de Leibniz. A partir de la discusión en la Sección 3.7, ya sabemos que $\nabla \times \hat{r} = 0$. Luego, solo debemos calcular $[\nabla f(r)] \times \hat{r}$. Usando la regla de la cadena, vemos que $\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r$. Sin embargo, es directo verificar que

$$\nabla r = \nabla \|\vec{r} - \vec{r}_P\| = \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} = \hat{r}, \quad (3.105)$$

de donde, finalmente obtenemos

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} \times \hat{r} = 0. \quad (3.106)$$

Para determinar el potencial, podemos escribir

$$U(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + U(\vec{r}_P, \vec{r}_0), \quad (3.107)$$

donde \mathcal{C} es un camino que se extiende en línea recta desde \vec{r}_P hasta \vec{r} . El término $U(\vec{r}_P, \vec{r}_0)$ es una constante que representa la contribución de la integral desde \vec{r}_0 hasta \vec{r}_P , y cuyo valor podemos determinar mediante la condición $U(\vec{r}_0, \vec{r}_0) = 0$. Notemos que a lo largo del camino \mathcal{C} se tiene $d\vec{r} = \hat{r} dr$, y por lo tanto

$$U(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} [f(r)\hat{r}] \cdot [\hat{r} dr] + U(\vec{r}_P, \vec{r}_0) = \int_0^r f(r') dr' + U(\vec{r}_P, \vec{r}_0). \quad (3.108)$$

Esto quiere decir que $U(\vec{r})$ sólo depende de r . Además, basta conocer $f(r)$ para determinar el potencial. Si $f(r)$ se indefine en $r = 0$, como suele ocurrir, entonces simplemente podemos escribir

$$U(r) = \int^r f(r') dr' + C. \quad (3.109)$$

Ejemplos notables de fuerzas radiales son la fuerza eléctrica debido a una carga puntual, o la fuerza gravitacional generada por una masa puntual. En ambos casos se cumple

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (3.110)$$

donde α es una constante. Luego, el potencial asociado a dichas fuerzas es

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + C. \quad (3.111)$$

Si lo deseamos, la constante C puede ser expresada como $C = \alpha/r_0$. Habitualmente, se escoge la posición de \vec{r}_0 tal que $r_0 \rightarrow \infty$.

3.9 Suma de fuerzas conservativas

Es directo constatar que la suma de dos o más fuerzas conservativas darán como resultado una fuerza conservativa. Basta examinar el caso de dos fuerzas conservativas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . La suma de estas corresponde a una fuerza \vec{F} tal que

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (3.112)$$

$$= -\nabla U_1 - \nabla U_2, \quad (3.113)$$

$$= -\nabla(U_1 + U_2). \quad (3.114)$$

Luego, la fuerza \vec{F} será una fuerza conservativa $\vec{F} = -\nabla U$ cuyo potencial U corresponde a la suma

$$U = U_1 + U_2. \quad (3.115)$$

3.10 Energía mecánica

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m sobre la cual actúa una fuerza total \vec{F}_{tot} . De acuerdo a la discusión de la sección 3.3, donde se introdujo

energía cinética, el trabajo total puede ser escrito como la diferencia entre las energías cinéticas final e inicial K_B y K_A :

$$W_{\text{tot}}(\mathcal{C}) = K_B - K_A. \quad (3.116)$$

Por otro lado, ahora sabemos sobre la existencia de fuerzas conservativas. Esto nos asegura que, en general, podemos separar la fuerza total en la suma de fuerzas pertenecientes a dos categorías: fuerzas conservativas y fuerzas no-conservativas. Es decir, podemos escribir

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{C}} + F_{\text{tot}}^{\text{NC}}, \quad (3.117)$$

donde $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{C}}$ y $F_{\text{tot}}^{\text{NC}}$ corresponden a la suma de todas las fuerzas conservativas y no conservativas actuando sobre m . Luego, el trabajo total puede ser escrito como $W_{\text{tot}}(\mathcal{C}) = W_{\text{tot}}^{\text{C}}(\mathcal{C}) + W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C})$, y la ecuación (3.116) adquiere la forma

$$W_{\text{tot}}^{\text{C}}(\mathcal{C}) + W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}) = K_B - K_A. \quad (3.118)$$

Recordemos que $W_{\text{tot}}^{\text{C}}(\mathcal{C})$ no depende del camino \mathcal{C} . De hecho, dado que $\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{C}}$ es la suma de todas las fuerzas conservativas actuando sobre m , esta podrá ser escrita como

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{C}} = -\nabla U, \quad U = \sum_i U_i \quad (3.119)$$

donde los U_i denotan los potenciales tras cada fuerza conservativa \vec{F}_i^{C} . Luego, gracias a (3.52), el trabajo $W_{\text{tot}}^{\text{C}}(\mathcal{C})$ puede ser escrito en términos de U como:

$$W_{\text{tot}}^{\text{C}}(\mathcal{C}) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B). \quad (3.120)$$

Usando este resultado de vuelta en la ecuación (3.118), vemos que

$$[K_B + U(\vec{r}_B)] - [K_A + U(\vec{r}_A)] = W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}). \quad (3.121)$$

En consecuencia, el trabajo debido a las fuerzas no-conservativas corresponde a la diferencia de la combinación $K + U$ evaluado al inicio y al final del camino. La combinación $K + U$ es una cantidad importante que denominaremos energía mecánica:

$$E \equiv K + U. \quad (3.122)$$

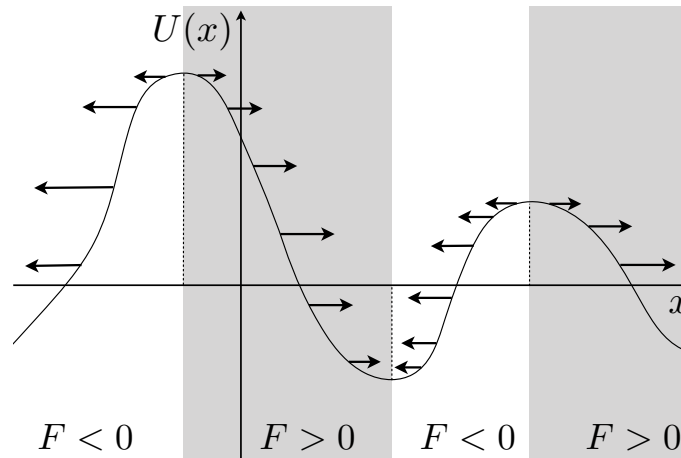
De manera crucial, cuando no hay fuerzas no-conservativas actuando sobre la partícula, la energía mecánica al final del camino E_B coincide con el valor inicial E_A . De hecho, dado que los puntos A y B podrían ser cualquier par a lo largo de un camino, debemos concluir que la energía mecánica E se conserva a lo largo de todo el camino: E es una constante durante todo el movimiento.

3.11 Visualizando fuerzas conservativas

Los potenciales son muy útiles para visualizar fuerzas. Pensemos primero en el caso de un sistema cuyo movimiento está confinado a una dimensión, descrita por la variable cartesiana x . De haber una fuerza conservativa, ésta tendrá asociada un potencial $U(x)$ tal que

$$\vec{F}(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x}. \quad (3.123)$$

Luego, si la pendiente del potencial es positiva, la fuerza actúa en el sentido $-\hat{x}$, mientras que si la pendiente es negativa, la fuerza actúa en el sentido $+\hat{x}$. La siguiente figura muestra la situación:

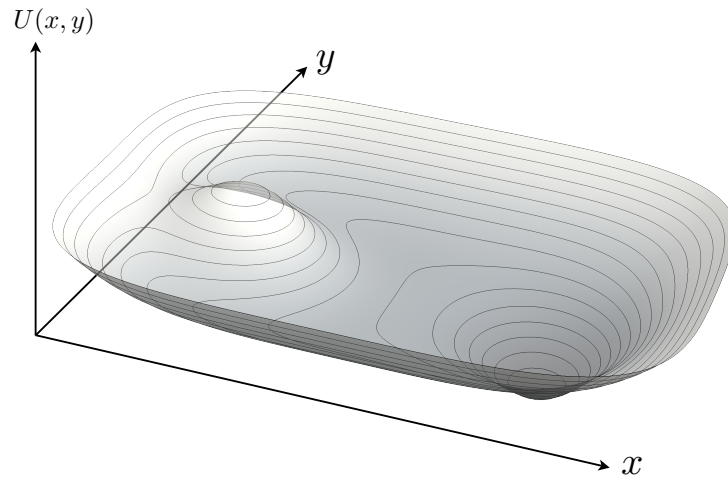


Se puede apreciar que la fuerza siempre apunta en la dirección contraria a la dirección hacia la cual el potencial crece. Más aun, la magnitud es mayor o menor dependiente de si la pendiente del potencial es mayor o menor. En los máximos y mínimos del potencial, la pendiente es cero, por lo que la fuerza se anula. De esta forma, es posible visualizar al potencial como un paisaje montañoso, donde la fuerza se opone al ascenso por el potencial, siempre empujando a la partícula para que descienda por la ladera del potencial. Una partícula puede estar en reposo ya sea sobre la cima o el fondo del potencial (máximos o mínimos).

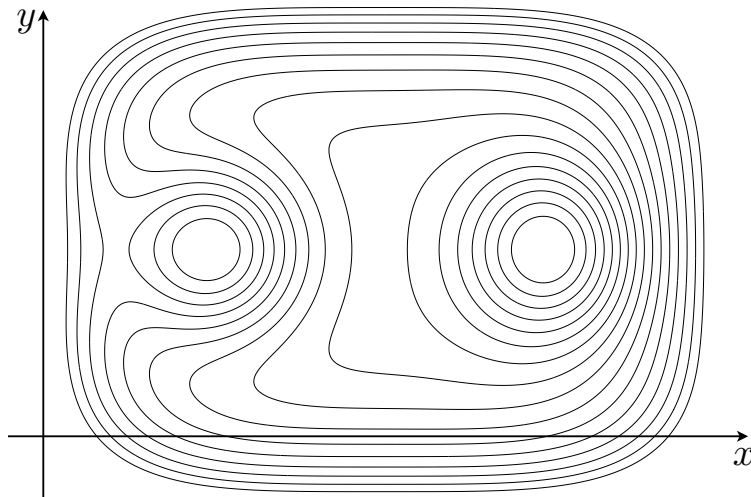
Esta forma de visualizar una fuerza conservativa a partir de un potencial puede extenderse a más dimensiones. Pensemos el caso de un sistema cuyo movimiento está confinado a dos dimensiones, descritas por variables cartesianas x e y . En este caso una fuerza conservativa tendrá asociado un potencial $U(x, y)$, de tal forma que

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y}. \quad (3.124)$$

Ahora la fuerza apunta en una dirección determinada por una combinación lineal de las derivadas parciales $\partial U/\partial x$ y $\partial U/\partial y$. Para visualizar la fuerza, es útil introducir el concepto de equipotencial (o curvas de nivel de un potencial). Una equipotencial es una curva en el plano x - y que satisface la ecuación $U(x, y) = U_c$, para una constante U_c dada. A lo largo de dichas curvas el valor del potencial no cambia. Por ejemplo, consideremos el potencial de la siguiente figura:



En la figura destacan curvas que indican la *altura* del potencial. Estas curvas pueden proyectarse sobre el plano x - y para entregarnos un mapa de las equipotenciales de U , tal como lo muestra la siguiente figura



El siguiente paso consiste en reconocer que la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ es necesariamente perpendicular a las curvas equipotenciales. Para apreciar esto, calculemos el vector tangente \hat{t} de una equipotencial en el plano x - y . Una equipotencial puede ser pensada como una curva $y = f(x)$ en el plano x - y . Luego, reconociendo que $f'(x)$ es la pendiente de la curva, es directo ver que el vector tangente unitario a lo largo de dicha curva es:

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} (\hat{x} + f'(x)\hat{y}). \quad (3.125)$$

Por otro lado, la función $f(x)$ viene definida por el potencial U a través de la ecuación

$$U(x, f(x)) = U_c. \quad (3.126)$$

Si diferenciamos esta función con respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} f'(x) = 0, \quad (3.127)$$

lo que implica que $f'(x)$ viene dada por

$$f'(x) = - \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3.128)$$

Reemplazando esta expresión en (3.125), obtenemos

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial x} \hat{y} \right). \quad (3.129)$$

A partir de este resultado, es directo ver que

$$\vec{F} \cdot \hat{t} = 0, \quad (3.130)$$

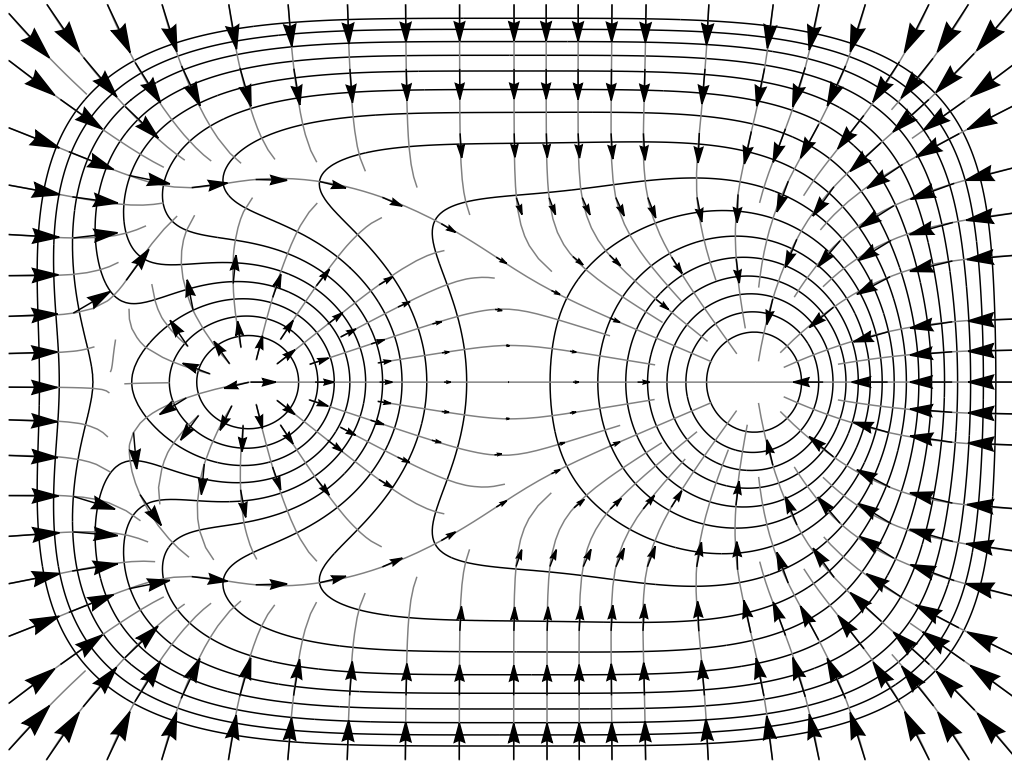
lo que demuestra que \vec{F} es efectivamente perpendicular a las curvas equipotenciales. De hecho, este resultado revela que si pensamos en el potencial como un paisaje montañoso, \vec{F} corresponde a la dirección de mayor descenso por las faldas de la montaña (es decir, la dirección con pendiente más negativa). La magnitud de \vec{F} es

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}, \quad (3.131)$$

lo que muestra que a mayor pendiente, mayor fuerza.

Todo lo anterior nos revela que para visualizar el campo de fuerzas asociado a un potencial dado, primero debemos visualizar sus equipotenciales. Las fuerzas corresponderán a flujos de vectores (denominados flujos de gradientes) que se mantienen perpendiculares a estas equipotenciales, apuntando en la dirección de descenso.

Por ejemplo, la siguiente figura muestra el flujo de fuerzas debido a las equipotenciales mostradas en la figura anterior:



El tamaño de las flechas revela la magnitud de la fuerza. Al comparar esta figura con las del potencial, es posible apreciar que la magnitud de la fuerza es mayor cuando la ladera del potencial tiene mayor inclinación. También es posible apreciar que en el máximo del potencial, las flechas emergen hacia todas las direcciones (algo así como una fuente de flujo de fuerzas), mientras que en el mínimo del potencial, las flechas confluyen (un sumidero del flujo de fuerzas). Es decir, los flujos de fuerzas pueden ser visualizados como ríos descendiendo por una montaña (el potencial).

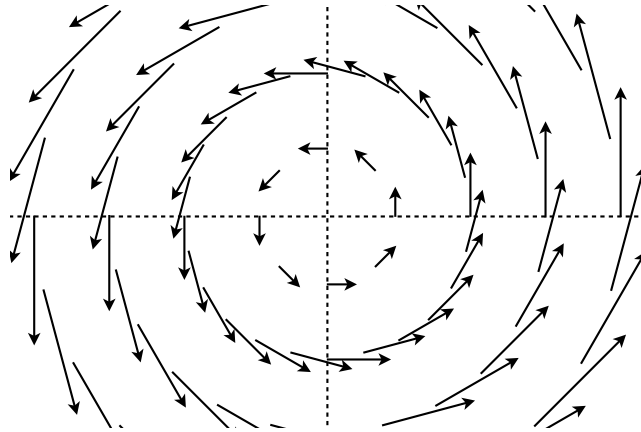
La situación no es muy distinta en sistemas donde el movimiento es posible a lo largo de todas las direcciones. En dicho caso, las equipotenciales son superficies, y las fuerzas son vectores normales a dichas superficies, que apuntan en la dirección donde el potencial disminuye su valor. No podemos dibujar dichas situaciones de la misma forma en que lo hacemos para potenciales que dependan solo de x e y , pero aun así podemos visualizar el campo de fuerza extendido por todo el espacio.

3.12 Campos de fuerzas con rotor no nulo

¿Qué esconde la condición de que una fuerza no tenga rotor? Vimos que si una fuerza \vec{F} dada tiene rotor nulo, entonces debe existir un potencial $U(\vec{r})$ tal que su gradiente determina el flujo de fuerzas extendido por todo el espacio. Para entender mejor la naturaleza de este resultado, sería útil conocer ejemplos de campos de fuerzas para los cuales el rotor no es nulo. Un ejemplo sencillo corresponde al campo de fuerzas (3.9), que en coordenadas cartesianas tiene la forma:

$$\vec{F} = -K_0y\hat{i} + K_0x\hat{j}. \quad (3.132)$$

Recordemos que este campo de fuerzas puede ser visualizado de la siguiente manera:



Es decir, el campo de fuerzas se arremolina alrededor del origen. A partir de (3.132), es directo ver que el rotor de esta fuerza es no nulo, y viene dado por

$$\nabla \times \vec{F} = 2K_0\hat{k}. \quad (3.133)$$

Luego, debemos concluir que no existe un potencial U para el cual $\vec{F} = -\nabla U$. No es difícil notar qué falla en este caso para impedir que U exista. Notemos que si seguimos el flujo de fuerzas a partir de un punto cualquiera, siempre retornaremos al punto de partida. Es decir, los flujos se cierran sobre sí mismos, formando un lazo. Sin embargo, en la sección anterior vimos que los flujos de fuerzas conservativas (que provenientes de gradientes) pueden ser visualizados como ríos descendiendo por el potencial. Pero en el caso de (3.132) el río se está alimentando a sí mismo, lo que

no es posible. Por supuesto, ríos alimentándose a si mismos son posibles en imágenes imposibles, como la ofrecida por la cascada de Escher:



Pero no son posibles como consecuencia de flujos de gradiente. Para concluir esta discusión, consideremos el siguiente ejemplo instructivo de potencial:

$$U(x, y) = -\alpha \arctan \frac{y}{x}. \quad (3.134)$$

Es posible ver que el campo de fuerza proveniente de este potencial es:

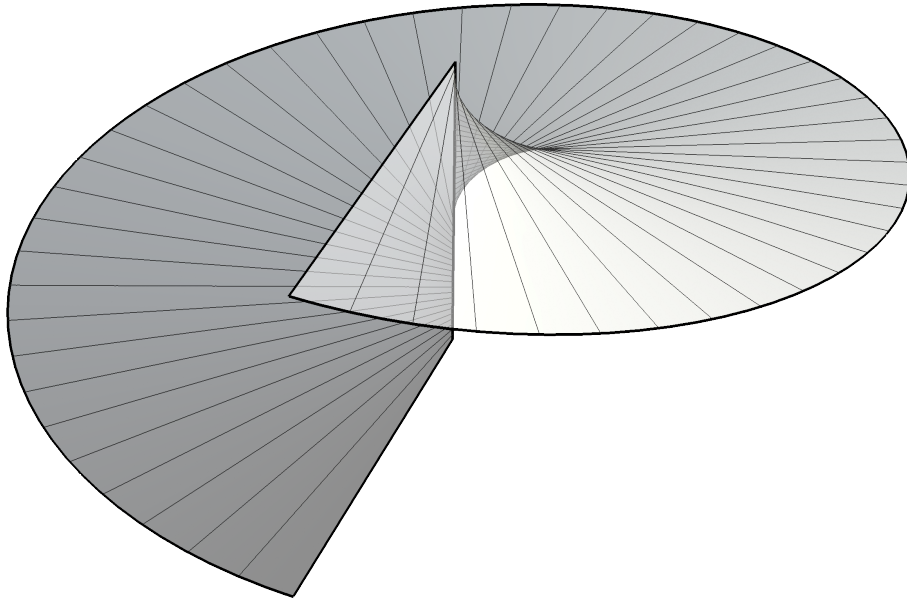
$$\vec{F} = -\alpha \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \alpha \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}. \quad (3.135)$$

No es difícil verificar que esta fuerza tiene rotor nulo, lo cual es directo del hecho de que proviene de un potencial. Sin embargo, en coordenadas cilíndricas, esta fuerza tiene la forma

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{\rho} \hat{\phi}. \quad (3.136)$$

Por lo tanto, esta fuerza, al igual que la del ejemplo (3.132), tiene flujos que se cierran sobre sí mismos, formando lazos. Sin embargo, en este ejemplo hay una sutileza importante: El gradiente de U está bien definido en todas partes excepto en el origen y, en consecuencia, la afirmación de que el rotor de la fuerza es nulo es válida en todas

partes excepto en el origen, donde el cálculo del rotor se indefine. Para apreciar esto, no hace falta calcular el rotor. En lugar de ello, podemos simplemente dibujar el potencial. Para dibujarlo, notemos que en coordenadas cilíndricas el potencial tiene la forma $U = -\alpha\phi$. Luego, dibujando el potencial para el rango de ϕ entre 0 y 2π , obtenemos:



A partir de esta ilustración vemos que, en efecto, los flujos de gradiente se cierran sobre sí mismos, pero el costo es que el potencial está "roto", gracias a que en el origen el rotor se indefine.

3.13 Movimientos permitidos (1-D)

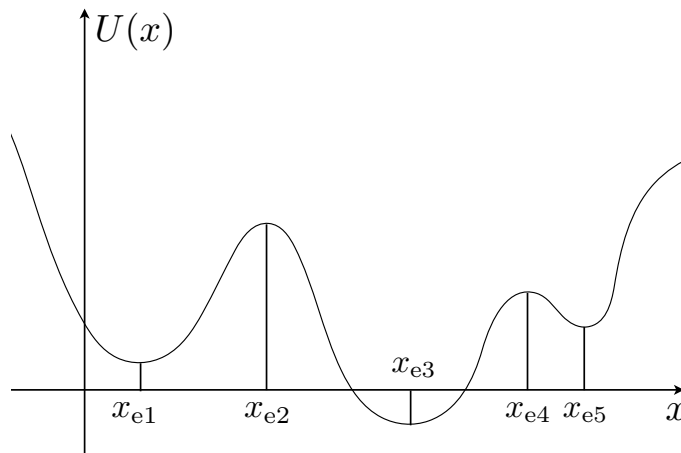
Recordemos que si sobre una partícula de masa m actúan solo fuerzas conservativas, entonces la energía mecánica $E = K + U$ permanecerá constante. El valor de E dependerá de las condiciones iniciales del sistema. En particular, si el movimiento de la partícula está confinado a una dirección cartesiana, digamos x , entonces podemos escribir:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x). \quad (3.137)$$

Esta ecuación nos permite inferir la velocidad de la partícula como función de su posición. En efecto, a partir de la ecuación anterior, podemos deducir que

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}, \quad (3.138)$$

donde el signo nos indica si la partícula se mueve hacia la derecha o izquierda. A partir de (3.138) podemos concluir que el movimiento puede ocurrir siempre y cuando $E > U$, y que la rapidez será mayor o menor dependiendo de si la diferencia entre E y U es mayor o menor. Para visualizar movimientos a partir de (3.138), es conveniente recordar que la fuerza a lo largo de x viene dada por $F_x = -\partial U/\partial x$, y por lo tanto, en los máximos y mínimos del potencial, donde se cumple $\partial U/\partial x = 0$, la fuerza es nula. Esto quiere decir que la ecuación algebraica $\partial U/\partial x = 0$ permite identificar puntos especiales, que llamaremos puntos de equilibrio, donde una partícula puede permanecer en reposo. La siguiente figura muestra un potencial arbitrario donde es posible identificar 5 puntos de equilibrio:



En el ejemplo, algunos puntos (x_{e1} , x_{e2} y x_{e3}) minimizan al potencial, mientras que otros (x_{e2} y x_{e4}) lo maximizan. Aquellos puntos que determinan la posición de un mínimo del potencial se denominan puntos de equilibrio estables, y satisfacen la condición:

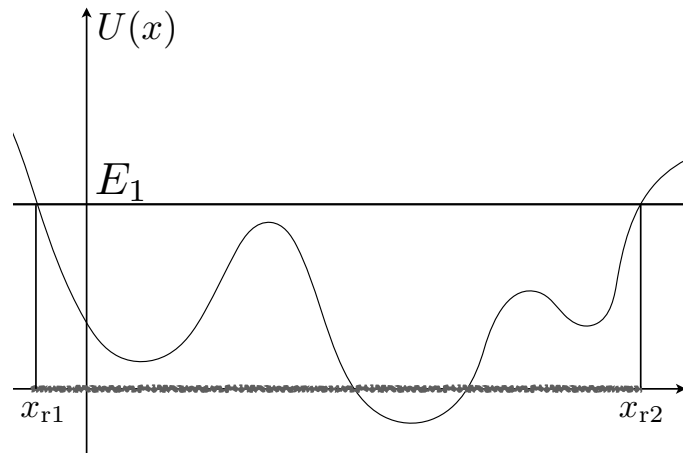
$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_e} > 0. \quad (3.139)$$

Por otro lado, los puntos que maximizan el potencial son puntos de equilibrio inestables, y satisfacen la condición

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_e} < 0. \quad (3.140)$$

La razón de estos nombres es sencilla: Tal como vimos en la Sección 3.11, el campo de fuerzas alrededor de un punto de equilibrio estable es tal que las fuerzas siempre apuntan hacia éste, y por lo tanto la partícula siempre es acelerada hacia el punto de equilibrio. Por el contrario, en el caso de un punto de equilibrio inestable, las fuerzas apuntan desde el punto de equilibrio hacia fuera, de modo que la partícula siempre es empujada fuera de este.

Supongamos ahora que el sistema descrito por el potencial de la figura tiene condiciones iniciales tales que la energía mecánica E tiene un cierto valor E_1 , tal como lo muestra la siguiente ilustración

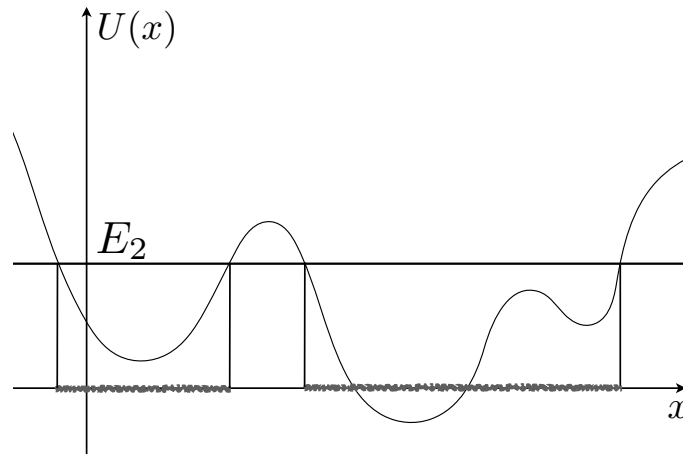


Tal como ya fuera aseverado, el movimiento ocurre solo si $E > U$. Luego, vemos que el movimiento es permitido en una región del espacio en la cual se cumple la condición $E > U$. La región de movimiento permitido está limitada por puntos de retorno x_r , que satisfacen la ecuación algebraica

$$E = U(x_r). \quad (3.141)$$

En el caso de la figura, los puntos de retorno son x_{r1} y x_{r2} . Un simple vistazo a la figura, permite inferir cómo será el movimiento cualitativamente. A mayor diferencia entre E y U , mayor será la rapidez de la partícula, y en los puntos de retorno la partícula necesariamente se detendrá. Sin embargo, en los puntos de retorno la fuerza no es nula, y por lo tanto la partícula está siendo acelerada para retornar a la región de movimiento permitida. En el caso de la figura, la partícula oscila continuamente entre x_{r1} y x_{r2} , adquiriendo su mayor rapidez en el punto x_{e3} . El momento de menor rapidez (excluyendo a los puntos de retorno) se da cuando la partícula pasa por el punto x_{e2} .

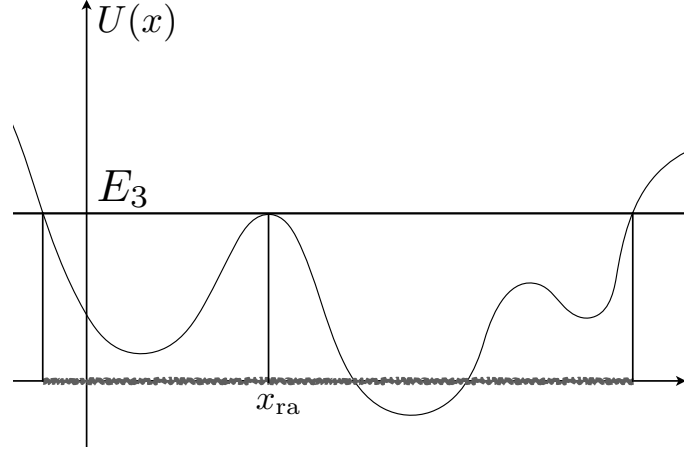
Veamos qué pasa si las condiciones iniciales son tales que la energía mecánica E es menor a E_1 . La siguiente figura muestra una situación en la cual la energía tiene un valor E_2 donde el potencial evaluado en x_{e2} es mayor que la energía ($U(x_{e2}) > E$)



Aquí aparecen dos regiones de movimiento permitidas, cada una delimitada por sus respectivos puntos de retorno determinados por la ecuación (3.141). Si las condiciones iniciales son tales que la partícula estaba dentro de la región de la izquierda, entonces ésta permanecerá oscilando en dicha región a perpetuidad, sin poder acceder a la región de la derecha. Las regiones complementarias a las regiones de movimiento permitidas están prohibidas, solo pueden ser accedidas si se le inyecta energía al sistema, de modo que el valor de E sea tal que aumente el rango de movimiento. Por otro lado, si la energía disminuye, entonces al rango de movimiento disminuye. En el caso del potencial de la figura, es posible apreciar que si E disminuye, entonces podemos tener una situación en la cual hay tres regiones de movimiento permitidas. Y si la energía disminuye aún más, volveremos a tener dos regiones permitidas, pero de menor rango. Finalmente, si la energía disminuye aún más, tendremos una sola

región de movimiento permitida, en torno al punto de equilibrio estable x_{e3} .

Veamos por último el caso en que el sistema tiene condiciones iniciales tales que la energía mecánica E adquiere un valor E_3 tal que $U(x_{e2}) = E_3$. La siguiente figura muestra esta situación



Aquí el punto de equilibrio inestable x_{e2} coincide con los puntos de retorno que separan a las dos regiones de la figura del caso $E = E_2$. Llamemos a este punto, punto de retorno asintótico x_{ra} . ¿Cómo es el movimiento en la vecindad de x_{ra} ? Supongamos que la partícula se acerca a este punto de izquierda a derecha. Entonces, de acuerdo a la ecuación (3.138), su velocidad vendrá dada por $\dot{x} = \sqrt{2[E - U(x)]/m}$. Sin embargo, dado que estamos considerando el movimiento en las cercanías de x_{ra} , podemos expandir el potencial U de la forma

$$U(x) = E_3 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{ra}} (x - x_{ra})^2 + \dots, \quad (3.142)$$

donde usamos $U(x_{ra}) = E_3$ y $U'(x_{ra}) = 0$. Luego, la velocidad de la partícula cerca de x_{ra} viene dada por

$$\dot{x} = \Omega_0(x_{ra} - x), \quad \Omega_0 \equiv \sqrt{-\frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{ra}}}. \quad (3.143)$$

Esta ecuación nos da como resultado la siguiente solución para $x(t)$:

$$x_{ra} - x(t) = (x_{ra} - x_i) e^{-\Omega_0(t-t_i)}, \quad (3.144)$$

donde x_i es la posición de $x(t)$ en un tiempo inicial t_i . A partir de este resultado, es posible ver que la partícula llega a x_{ra} en tiempo infinito ($t \rightarrow \infty$). En consecuencia,

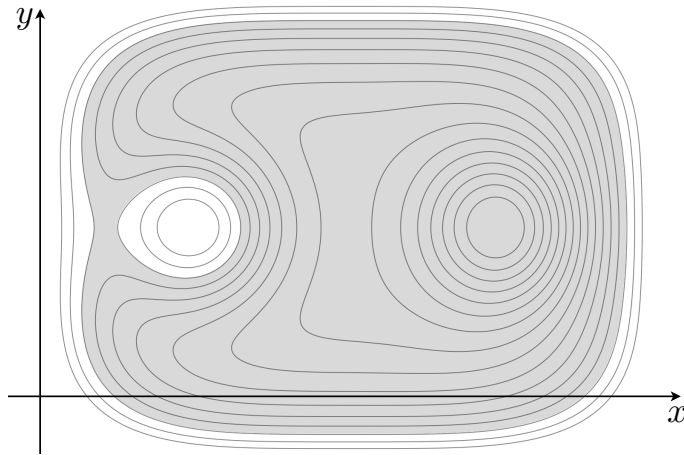
el punto de retorno asintótico que separa las dos regiones nunca es alcanzado, y por lo tanto la partícula no retorna a la región desde la cual proviene. Dicho de otra forma, la partícula alcanza el equilibrio inestable asintoticamente.

3.14 Movimientos permitidos en más de una dimensión

En el caso en que una partícula pueda moverse en más dimensiones, también podemos anticipar regiones de movimiento permitido. Al igual que en el caso unidimensional, dada una cantidad de energía mecánica E , la rapidez de la partícula podrá ser expresada como función de la posición \vec{r} que ésta tenga en el espacio:

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(\vec{r})]}. \quad (3.145)$$

Luego, el movimiento será posible en aquellas regiones donde se cumpla $E > U(\vec{r})$. Veamos un ejemplo con la ayuda del potencial $U(x, y)$ visto en la Sección 3.11. La siguiente figura muestra, en gris, la región permitida (determinada por $E > U(\vec{r})$) para una elección de la energía:



Para determinar los límites de la región de movimiento permitida, basta con resolver la siguiente ecuación algebraica, que corresponde a la curva de nivel de altura E :

$$U(\vec{r}) = E. \quad (3.146)$$

Por otro lado, para determinar el movimiento específico, será necesario resolver las ecuaciones de movimiento. Aún así, el presente análisis ya nos permite anticipar la extensión del movimiento permitido.

3.15 Interacciones entre pares de partículas

Para finalizar, consideremos un sistema de dos partículas 1 y 2 interactuando. La partícula 2 afecta el movimiento de la primera partícula mediante la fuerza \vec{F}_{21} , mientras que la partícula 1 afecta a la segunda partícula mediante la fuerza \vec{F}_{12} . Recordemos que debido a la tercera ley de Newton, tenemos $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Supongamos ahora que la fuerza \vec{F}_{21} tiene la forma:

$$\vec{F}_{21} = f(\Delta r) \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}, \quad (3.147)$$

donde hemos definido:

$$\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (3.148)$$

$$\Delta r \equiv \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|. \quad (3.149)$$

Apreciemos que esta forma para \vec{F}_{21} tiene sentido. La única información que tiene la partícula 2 acerca de la partícula 1 consiste en qué tan lejos está (Δr), y en qué dirección se encuentra ($\Delta \vec{r}/\Delta r$). Cualquier otra información tendrá que hacer referencia a algún agente adicional. Luego, la única forma de escribir una fuerza con estas dos piezas de información es mediante (3.147). Esta forma de \vec{F}_{21} puede ser comparada con la forma de una fuerza radial, definida en (3.100). Si repetimos los razonamientos de nuestro análisis de fuerzas radiales, llegaremos a la conclusión de que para una fuerza de la forma (3.147), debe existir un potencial $U(\Delta r)$ tal que

$$\vec{F}_{21} = -\nabla_1 U(\Delta r), \quad (3.150)$$

donde ∇_1 es el operador nabla cuyas derivadas parciales son con respecto a las coordenadas cartesianas que determinan la posición $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$ de la primera partícula. Esto es:

$$\nabla_1 = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z_1}. \quad (3.151)$$

Dicho potencial es de la forma

$$U(\Delta r) = \int^{\Delta r} f(\Delta r') d\Delta r' + C. \quad (3.152)$$

La forma precisa del potencial no nos importa por ahora. Lo importante es que U existe, y que es función de Δr . Ahora viene un resultado importante. Consideremos el

operador ∇_2 cuyas derivadas parciales son con respecto a las coordenadas cartesianas que determinan la posición $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ de la segunda partícula:

$$\nabla_2 = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y_2} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z_2}. \quad (3.153)$$

Usando la regla de la cadena, es directo ver que:

$$\nabla_2 U = \frac{\partial U}{\partial \Delta r} \nabla_2 \Delta r. \quad (3.154)$$

Sin embargo, $\nabla_2 \Delta r = -\nabla_1 \Delta r$. Esto quiere decir que $\nabla_2 U = -\nabla_1 U$, de donde sigue que

$$\vec{F}_{12} = -\nabla_2 U(\Delta r). \quad (3.155)$$

Luego, el potencial $U(\Delta r)$ es un potencial común para ambas fuerzas. No necesitamos dos potenciales independientes para cada fuerza. De hecho, la definición de $\Delta \vec{r}$ en (3.148) fue completamente arbitraria, por lo que si hubiésemos usado la definición alternativa $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ habríamos llegado a la misma conclusión. En definitiva, las fuerzas entre pares de partículas son conservativas, y admiten un potencial común U que depende solo de la distancia $\Delta r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$ entre ambas. Más aún, todo lo anterior implica que la fuerza \vec{F}_{12} es proporcional a $\Delta \vec{r}$:

$$\vec{F}_{12} \propto \Delta \vec{r}. \quad (3.156)$$

Es decir, una partícula solo puede atraer a repeler a otra partícula a lo largo de la recta que une a ambas partículas.

3.15.1 Ejemplo: resortes

Un ejemplo a la mano es el caso de un resorte. A partir de nuestro análisis de la Sección 3.7, es posible ver que las fuerzas debido a un resorte de largo natural D y constante elástica k , conectando a dos partículas 1 y 2, admiten un único potencial U_k de la forma:

$$U_k = \frac{k}{2}(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| - D)^2 + C. \quad (3.157)$$

La constante C puede ser elegida de tal forma que $U_k(\Delta r_0) = 0$, para algún valor escogido de $\Delta r_0 \equiv \|\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{2,0}\|$. En conclusión, el potencial está asociado al resorte, y podemos decir que el resorte es capaz de almacenar energía potencial.

3.16 Energía mecánica para sistemas con dos partículas

Si la interacción mediante fuerzas entre dos partículas admite la definición de un potencial común, ¿Cómo se define la energía mecánica para un sistema con dos partículas interactuando? Supongamos que tenemos un sistema con solo dos partículas capaces de interactuar mutuamente mediante fuerzas del tipo (3.147). Supongamos además que sobre cada partícula actúan fuerzas conservativas externas $\vec{F}_1^{\text{ext}} = -\nabla_1 U_1^{\text{ext}}$ y $\vec{F}_2^{\text{ext}} = -\nabla_2 U_2^{\text{ext}}$ debido a agentes externos. Entonces la energía mecánica del sistema se define como

$$E = K + U, \quad (3.158)$$

donde K es la suma de las energías cinéticas individuales de cada partícula K_1 y K_2

$$K = K_1 + K_2, \quad (3.159)$$

y U es la energía potencial total, definida como la suma

$$U = U_1^{\text{ext}} + U_2^{\text{ext}} + U_{12}, \quad (3.160)$$

donde U_{12} es el potencial común tal que $\vec{F}_{21} = -\nabla_1 U_{12}$ y $\vec{F}_{12} = -\nabla_2 U_{12}$. Notemos que el sistema completo tiene un solo potencial, y tanto la fuerza conservativa total \vec{F}_1^{C} actuando sobre 1 como la fuerza conservativa total \vec{F}_2^{C} actuando sobre 2 se pueden expresar como

$$\vec{F}_1^{\text{C}} = -\nabla_1 U, \quad (3.161)$$

$$\vec{F}_2^{\text{C}} = -\nabla_2 U, \quad (3.162)$$

lo que se debe a que $\nabla_1 U_2 = \nabla_2 U_1 = 0$. Este es un resultado formidable, puesto que para determinar las fuerzas conservativas actuando sobre cualquier componente del sistema necesitamos un solo potencial U , que consiste en la suma de todos los sub-potenciales. Para continuar, notemos que utilizando la regla de la cadena, es directo verificar que

$$\frac{d}{dt}E = \vec{v}_1 \cdot [m_1 \vec{a}_1 - \vec{F}_1^{\text{ext}} - \vec{F}_{21}] + \vec{v}_2 \cdot [m_2 \vec{a}_2 - \vec{F}_2^{\text{ext}} - \vec{F}_{12}]. \quad (3.163)$$

Luego, si sobre las partículas actúan solo fuerzas conservativas, entonces la segunda ley de Newton implica las ecuaciones de movimiento $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{21}$ y $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{12}$, con lo cual obtenemos $\dot{E} = 0$, y la energía del sistema es conservada. Por otro lado, si existiesen fuerzas no conservativas actuando sobre 1 y 2, las ecuaciones

de movimiento son $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{\text{NC}}$ y $m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{\text{NC}}$, y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}E = \vec{v}_1 \cdot \vec{F}_1^{\text{NC}} + \vec{v}_2 \cdot \vec{F}_2^{\text{NC}}, \quad (3.164)$$

de donde vemos que la energía cambia en el tiempo. A partir de este resultado, es directo derivar $E_B - E_A = W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C})$ obtenido en la Sección 3.10, donde en esta oportunidad $W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C})$ es la suma de los trabajos no-conservativos calculados para el camino seguido por cada partícula:

$$W_{\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}) = W_{1,\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}_1) + W_{2,\text{tot}}^{\text{NC}}(\mathcal{C}_2), \quad (3.165)$$

donde \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son los caminos seguidos por cada partícula desde una configuración A hasta una configuración B .