

## 2 Dinámica de la partícula puntual

En las secciones previas, nos hemos esforzado de describir el movimiento de partículas puntuales, sin preocuparnos por sus causas. A continuación, formularemos las tres leyes de Newton, que nos indicarán cómo un *agente* es capaz de afectar el movimiento de una partícula.

### 2.1 Primera Ley de Newton

Comencemos con una pequeña reflexión: Imaginémonos ante un espacio sin objetos. Solo hay espacio, el cual se extiende hacia el infinito en todas las direcciones. ¿Cuál es nuestra posición? Habitualmente respondemos a esta pregunta ayudándonos de una referencia: estoy sentado 5 metros hacia el Oeste de la entrada del Departamento de Física, etc. Sin embargo, enfrentados a un espacio vacío, no podemos entregar puntos de referencias para indicar nuestra posición. Quizás, esto es indicativo de que simplemente no existen los puntos de referencia *fundamentales* (por ejemplo, el centro del universo), y de que tampoco existen las direcciones privilegiadas (Norte, Sur, etc.). Por lo contrario, nuestra posición es necesariamente relativa a algún otro objeto que habita el espacio (y vice versa, la posición de dicho objeto será relativa a nosotros).

Pensemos ahora en la siguiente pregunta: ¿Cuál es nuestra velocidad? Si hemos aceptado que los puntos de referencia fundamentales y direcciones privilegiadas no existen, será igualmente difícil responder a esta pregunta. De hecho, nos veremos obligados a abandonar la noción de que pueda existir un objeto *fundamentalmente* en reposo. Nuestra velocidad, y la velocidad de cualquier objeto necesariamente debe ser definida con respecto a la ubicación de otros objetos.

Ahora estaremos tentados en preguntarnos por nuestra aceleración. La idea de la primera ley de Newton es que no podamos responder a esta pregunta de la misma manera en que lo hicimos con la posición y la velocidad. Si un objeto está siendo acelerado, sí debe ser posible responder de manera fundamental cuál es la aceleración sufrida por el objeto.

Para proceder, será útil introducir el concepto de *sistema de referencia inercial*. Este consiste en un sistema que no está siendo acelerado. ¿Acelerado con respecto a qué? Eso no importa. Basta con aceptar la existencia de un solo sistema inercial, y automáticamente habrán infinitos sistemas inerciales distintos, cada uno con una velocidad constante con respecto al primer sistema inercial. Dado que la velocidad

y la posición no pueden ser conceptos fundamentales, ningún sistema inercial es más especial que otro. Diremos que un observador es un *observador inercial* si éste está en reposo con respecto a un sistema de referencia inercial. Una vez que nos hayamos puesto de acuerdo en que existe una clase entera de sistemas inerciales, podemos enunciar la primera Ley de Newton:

**Primera Ley de Newton:** Si una partícula puntual no está bajo la influencia de ningún agente, ésta se mantendrá en un movimiento con velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial.

En otras palabras, si no hay agentes actuando sobre una partícula, su movimiento estará caracterizado por

$$\vec{a} = 0. \tag{2.1}$$

Esta ley es consistente con la idea de que no existen ni posiciones ni velocidades fundamentales. Por ejemplo, si un observador inercial constata que una partícula se mantiene un movimiento rectilíneo uniforme con respecto a él, entonces todo observador inercial concluirá lo mismo. De igual forma, si una partícula se acelera con respecto a un sistema inercial, lo hará con respecto a todos.

## 2.2 Segunda Ley de Newton

¿Qué pasa si un agente sí ejerce una influencia sobre una partícula puntual? En tal caso es posible que la partícula sufra una aceleración. Para cuantificar la influencia de un agente, será necesario introducir el concepto de *fuerza*. La fuerza es un vector que nos indicará con qué magnitud, y en qué dirección, un agente afecta el movimiento de una partícula. La idea de introducir dicho vector consiste en modificar la ecuación (2.1), que es válida cuando no hay agentes interviniendo. Para ser concretos, digamos que un agente está afectando el movimiento de una partícula  $P$  dada de tal forma que la aceleración  $\vec{a}$  no es cero. Entonces, podemos aseverar que este agente ejerce una fuerza  $\vec{f}$  tal que

$$\vec{a} = \vec{f}. \tag{2.2}$$

¿Qué pasa si hay más agentes? Acertaremos a que la influencia de cada agente es aditiva. Es decir, si existiesen  $N$  agentes actuando sobre la partícula  $P$ , estos afectarán el movimiento de la partícula de la siguiente manera

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i. \tag{2.3}$$

En realidad, esta relación nos provee de una definición de cómo identificar un agente  $i$  dado: Es quien actúa sobre  $P$  mediante una fuerza  $\vec{f}_i$  a través de (2.3).

Sin embargo, la relación (2.3) adolece de un problema. En el lado izquierdo tenemos información sobre el movimiento (cinemática) de la partícula (con respecto a un sistema inercial), mientras que en el lado derecho tenemos información sobre el agente. ¿Qué hay de las propiedades intrínsecas de la partícula? Un agente dado, actuando de la misma forma sobre dos objetos distintos, podría tener como consecuencia aceleraciones distintas. Por ejemplo, no es lo mismo empujar un refrigerador a que empujar una tostadora, aun cuando ambos estén sobre una pista de patinaje de hielo. Para solucionar este problema, corrijamos (2.3) introduciendo una cantidad escalar  $m$ , que llamaremos *masa inercial*, que sea independiente de la cinemática de la partícula y de las propiedades de los agentes que actúen sobre esta:

$$m \vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.4)$$

Aquí,  $m$  es una propiedad intrínseca de la partícula que, como veremos, nos revela qué tan fácil o difícil es influir en el movimiento de una partícula. Por otro lado,  $\vec{F}_i$  es la fuerza que ejerce el agente  $i$ . La masa de una partícula se mide en unidades de gramos, mientras que la fuerza ejercida por un agente se mide en Newtons (N). Un Newton equivale a un Kg m/s<sup>2</sup>. Ya estamos en condiciones de enunciar la segunda ley de Newton:

**Segunda Ley de Newton:** Las partículas puntuales tienen una propiedad intrínseca  $m$  llamada masa inercial. Un agente  $i$  dado puede afectar el movimiento de una partícula de masa  $m$  mediante la acción de una fuerza  $\vec{F}_i$ . El movimiento de dicha partícula estará determinada por la siguiente ecuación

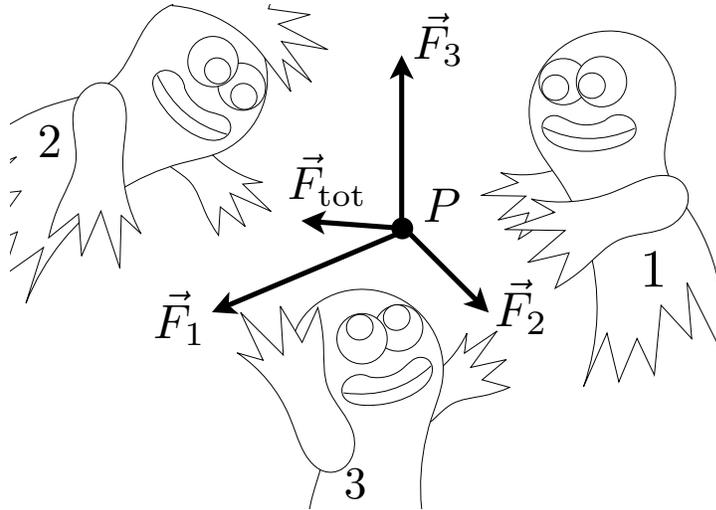
$$m \vec{a} = \vec{F}_{\text{tot}}, \quad (2.5)$$

donde  $\vec{F}_{\text{tot}}$  es la fuerza total, dada por:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.6)$$

Para lidiar con esta ley habitualmente dibujaremos diagramas de fuerza. Estos son diagramas donde representaremos la fuerza que cada agente ejerce sobre la partícula a partir de la posición de ésta. Por ejemplo, en la siguiente figura tenemos tres fuerzas

debido a tres agentes 1, 2 y 3 actuando sobre una partícula puntual:



Gracias a la segunda Ley, sabemos que la partícula  $P$  está siendo acelerada en la dirección  $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ .

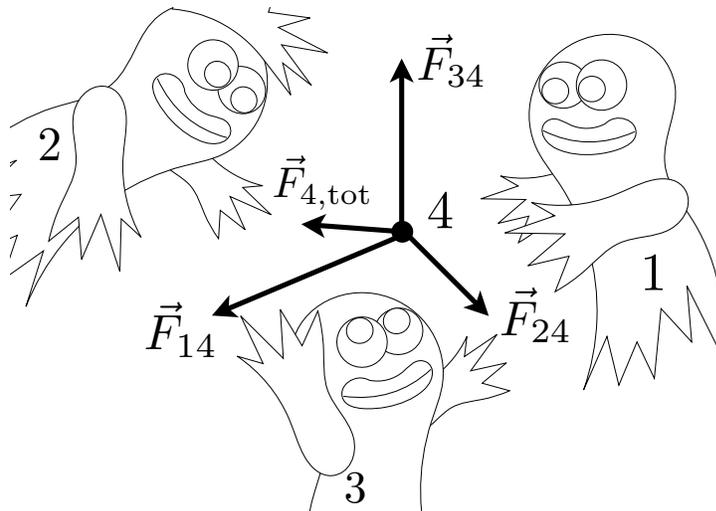
Es posible apreciar que la Primera Ley de Newton es una consecuencia directa de la segunda ley. Si no hay agentes actuando sobre la partícula, entonces la aceleración será cero, y por lo tanto el movimiento deberá ser rectilíneo y uniforme. Por otro lado, también es posible que dos agentes distintos actúen de tal manera que sus influencias se cancelen, dando como resultado  $\vec{F}_{tot} = 0$ . En dicho caso, la primera ley de Newton puede ser re-entendida como el resultado de que no haya una influencia *net*a sobre la partícula.

### 2.3 Tercera Ley de Newton

La segunda ley resulta un poco insatisfactoria. ¿Quiénes son los agentes de los cuáles estamos hablando? Evidentemente, éstos pertenecen al mismo mundo al cual pertenece la partícula puntual de masa  $m$  y, por lo tanto, esperamos que estén constituidos por partículas sobre las cuales también pueden actuar fuerzas. Es decir, los agentes también deben estar sujetos a la Segunda Ley de Newton. La Tercera Ley de Newton se hace cargo de establecer una equivalencia entre los agentes que ejercen una influencia, y las partículas que reciben dicha influencia: Una partícula también es un agente, y puede influenciar a aquellos agentes que ejercen una fuerza sobre ella.

Veamos esto en detalle: Si una partícula es un agente, entonces podemos referirnos

a ella con la misma etiqueta  $i$  que estamos utilizando para referirnos a los agentes. Por ejemplo, en la figura anterior, realmente hay cuatro agentes, siendo la partícula el cuarto agente. Luego, diremos que las fuerzas que ejercen los agente 1, 2 y 3 sobre la partícula (agente 4) son  $\vec{F}_{14}$ ,  $\vec{F}_{24}$  y  $\vec{F}_{34}$ . La siguiente figura muestra la nueva notación:



En este momento, debiéramos sospechar que la partícula 4 también puede afectar a los agentes 1, 2 y 3. Es decir, también deben existir fuerzas  $\vec{F}_{41}$ ,  $\vec{F}_{42}$  y  $\vec{F}_{43}$ . ¿Pero qué valores tienen estas fuerzas? La Tercera Ley de Newton nos entrega la siguiente respuesta:

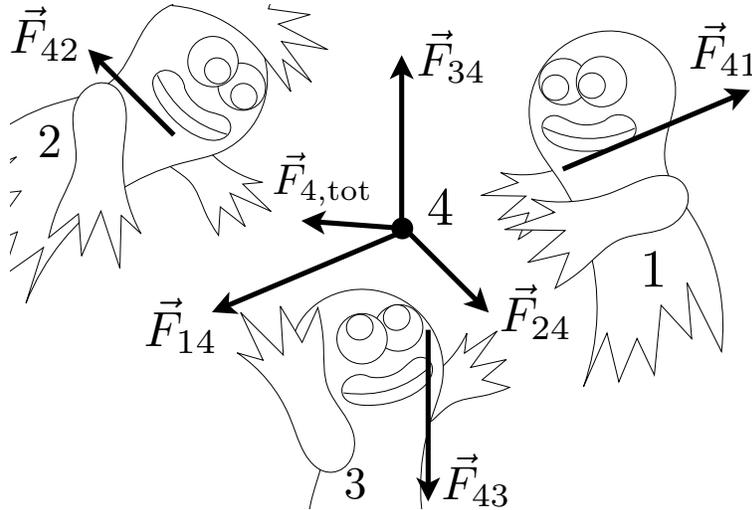
**Tercera Ley de Newton:** Las partículas puntuales también son agentes que pueden influenciar el movimiento de otras partículas y/o agentes. Además, si un agente  $i$  ejerce una fuerza  $\vec{F}_{ij}$  sobre otro agente  $j$ , entonces el agente  $j$  simultáneamente ejerce una fuerza  $\vec{F}_{ji}$  sobre  $i$  dada por

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}. \quad (2.7)$$

Notemos que la magnitud de la fuerza  $\vec{F}_{ji}$  es idéntica a la de  $\vec{F}_{ij}$ . La única diferencia entre ambos vectores es la dirección, que es opuesta. Es decir, todos los agentes tienen el mismo estatus. Muchas veces se caracteriza a la tercera ley mediante la siguiente afirmación: “toda acción tiene una reacción igual en magnitud, pero opuesta en dirección”. Pero esta afirmación es engañosa, dado que da la falsa impresión de que una de las fuerzas (aquella relacionada con la acción) es la causa de la segunda fuerza

(aquella asociada a la reacción). Sin embargo la tercera ley no distingue entre ambas fuerzas.

Volviendo a la situación de la figura anterior, ahora podemos complementar el diagrama de fuerzas dibujando las fuerzas que la partícula ejerce sobre los agentes 1, 2 y 3:



Evidentemente, dado que los agentes deben estar constituido por partículas, estarán afectos a la segunda ley de Newton, y podrán sufrir aceleraciones. Sin embargo, para saber cómo se aceleran, debemos conocer todas las otras fuerzas que actúan sobre éstos.

## 2.4 La segunda ley de Newton como ecuación de movimiento

Como veremos a lo largo del resto de este curso, típicamente las fuerzas  $\vec{F}_i$  son funciones de la posición  $\vec{r}$  y la velocidad  $\vec{v}$  de la partícula. Es decir:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}, \vec{v}). \quad (2.8)$$

Luego, la segunda ley de newton puede escribirse como:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i \left( \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0, \quad (2.9)$$

la que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que llamaremos ecuación de movimiento. Si contamos con condiciones iniciales, por ejemplo la posición  $\vec{r}(t_{ini})$

y la velocidad  $\vec{v}(t_{\text{ini}})$  en cierto instante inicial, entonces seremos capaces de integrar la ecuación (2.9), y obtener como solución la posición  $\vec{r}(t)$  para todo tiempo. Esto constituye una predicción de lo que hará la partícula descrita por la segunda ley de Newton.

Veamos un primer ejemplo básico de esto. Supongamos una partícula  $P$  que en  $t = t_0$  se encuentra en una posición conocida  $\vec{r}_0$  y tiene velocidad conocida  $\vec{v}_0$ . Además, supongamos que la fuerza total que actúa sobre ella viene dada por  $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_0$ , donde  $\vec{F}_0$  es un vector constante. Luego, la segunda ley de Newton nos entrega la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{\vec{F}_0}{m} = 0. \quad (2.10)$$

Esta ecuación puede ser resuelta primero para la velocidad. Notemos que la velocidad satisface:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_0}{m}. \quad (2.11)$$

Si integramos ambos lados con respecto al tiempo, desde  $t = t_0$  hasta un tiempo arbitrario  $t$ , vemos que:

$$\int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt'} dt' = \int_0^t \frac{\vec{F}_0}{m} dt'. \quad (2.12)$$

Noten que le hemos puesto una etiqueta ( $'$ ) a la variable de integración, para que no se confunda con el tiempo  $t$  que aparece en el límite de la integral. Ahora podemos desarrollar ambos lados. En el lado izquierdo, podemos integrar de la siguiente manera:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{dt'} dt' = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0. \quad (2.13)$$

En el primer paso, simplemente usamos  $(d\vec{v}/dt')dt' = d\vec{v}$ . Pero este paso significa que la nueva variable de integración es ni más ni menos que la velocidad, por lo que ahora tenemos que procurar que los límites de integración también sean velocidades. El límite inferior tendrá que ser la velocidad evaluada en  $t = t_0$ , que es  $\vec{v}_0$ , mientras que el límite superior tendrá que ser la velocidad evaluada en  $t$ , que es  $\vec{v}(t)$ . En el segundo paso, simplemente completamos la integral. Por otro lado, en el lado derecho de (2.12) podemos proceder de la siguiente forma

$$\int_0^t \frac{\vec{F}_0}{m} dt' = \frac{\vec{F}_0}{m} \int_0^t dt' = (t - t_0) \frac{\vec{F}_0}{m}, \quad (2.14)$$

donde, dado que  $\vec{F}_0$  es un vector constante, hemos sacado  $\vec{F}_0/m$  del integrando. Juntando los dos resultados previos, obtenemos:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + (t - t_0) \frac{\vec{F}_0}{m}. \quad (2.15)$$

Este resultado es consistente con la condición de que en  $t = t_0$  la velocidad es  $\vec{v}_0$ . Ahora, la ecuación para  $\vec{r}$  viene dada por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + (t - t_0) \frac{\vec{F}_0}{m}. \quad (2.16)$$

Procediendo de la misma forma a como lo hicimos con la velocidad, es directo comprobar que la solución viene dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0)\vec{v}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \frac{\vec{F}_0}{m}. \quad (2.17)$$

Por cierto, si la fuerza total es tal que  $\vec{F}_0 = 0$ , entonces  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0)\vec{v}_0$ , que corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme, en concordancia con la primera ley.

Un caso particular de una fuerza (aproximadamente) constante es aquella que resulta de la atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre las partículas masivas, sobre su superficie. En dicho caso, la fuerza gravitacional adquiere la forma

$$\vec{F}_g = -mg\hat{k}, \quad (2.18)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula afectada por la atracción de la tierra, y  $g$  es la constante de aceleración gravitacional dada por  $g \simeq 9.8$ . La combinación  $-\hat{k}$  indica que esta fuerza apunta hacia abajo. Luego, la posición de una partícula libre, sometida únicamente a la atracción gravitacional (sobre la superficie de la tierra), viene dada por

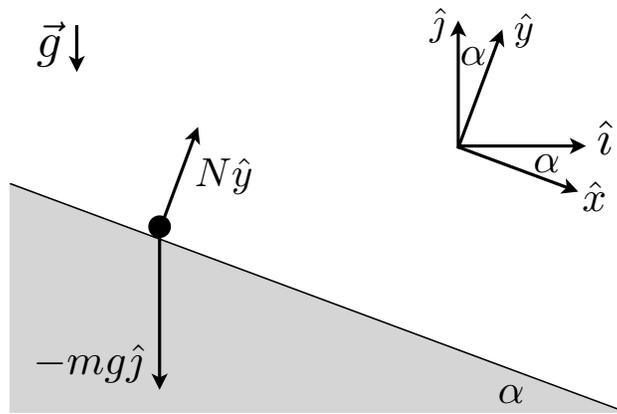
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0)\vec{v}_0 - \frac{1}{2}(t - t_0)^2 g\hat{k}, \quad (2.19)$$

que corresponde a un movimiento parabólico.

A partir de ahora, nos dedicaremos a estudiar los efectos de distintos tipos de fuerzas sobre el movimiento de una o varias partículas. Esto quiere decir, que nos dedicaremos a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con condiciones iniciales conocidas. Como primer paso, investigaremos una clase básica de fuerzas, conocidas como fuerzas de contacto, que son el resultado del contacto entre la partícula y otros agentes.

## 2.5 Fuerzas normales

La fuerza normal, usualmente escrita como  $\vec{N}$ , es una fuerza que surge como resultado del contacto entre la partícula estudiada y una superficie o una curva. La idea es que una partícula, al estar en contacto con una superficie (o curva), no puede atravesarla. De esta forma,  $\vec{N}$  debe ser tal que la partícula respete la condición de no atravesar la superficie (o curva). Veamos un ejemplo básico: Una partícula de masa  $m$  sobre una superficie inclinada en un ángulo  $\alpha$  con respecto al horizonte, tal como lo muestra la siguiente figura:



Para lidiar con este ejemplo, es conveniente introducir dos bases cartesianas: La base  $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ , donde  $\hat{i}$  apunta hacia la derecha, y  $\hat{j}$  apunta hacia arriba, y la base  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ , donde  $\hat{x}$  apunta a lo largo del plano inclinado (en descenso), e  $\hat{y}$  es normal al plano. La relación entre ambas bases es

$$\hat{i} = \cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y}, \quad (2.20)$$

$$\hat{j} = -\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{y}. \quad (2.21)$$

Hay dos agentes ejerciendo influencias sobre la partícula: La Tierra, que ejerce una atracción gravitacional sobre la partícula hacia abajo, y la superficie, que evita que la partícula la atraviese. Ambas ejercen sus influencias a través de fuerzas. La primera lo hace mediante la fuerza

$$\vec{F}_g = -mg\hat{y}. \quad (2.22)$$

El segundo agente lo hace mediante una fuerza normal  $\vec{N}$ , que debemos determinar. Algo debiera ser claro: la superficie sólo es capaz de ejercer una influencia sobre la partícula en la dirección normal a sí misma. Es decir, la fuerza normal  $\vec{N}$  debe ser

paralela a  $\hat{y}$ :

$$\vec{N} = N\hat{y}. \quad (2.23)$$

Aquí  $N$  es la magnitud de  $\vec{N}$ , cuyo valor aun no conocemos. En principio puede ser positivo o negativo, por lo que debemos permanecer agnósticos a su valor hasta que la segunda ley de Newton nos entregue un veredicto. Veamos cómo funciona esto. Tomando en cuenta los dos agentes, la segunda ley de Newton tiene la forma:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{j} + \hat{y}N. \quad (2.24)$$

Para desarrollar esta ecuación, escribamos el vector posición en términos de la base  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ :

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}. \quad (2.25)$$

Notemos que  $y$  debe ser constante, ya que la partícula descansa sobre la superficie. En consecuencia, la velocidad y aceleración vienen dadas por

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x}, \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{x}. \quad (2.26)$$

Luego, la segunda ley de Newton se puede escribir como

$$m\ddot{x}\hat{x} = -mg(-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}) + \hat{y}N, \quad (2.27)$$

donde usamos (2.21) para expresar  $\hat{j}$  en términos de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Dado que los elementos de la base cartesiana son linealmente independientes, podemos re-escribir la ecuación anterior (que es una relación vectorial) como una colección de dos ecuaciones escalares:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha, \quad (2.28)$$

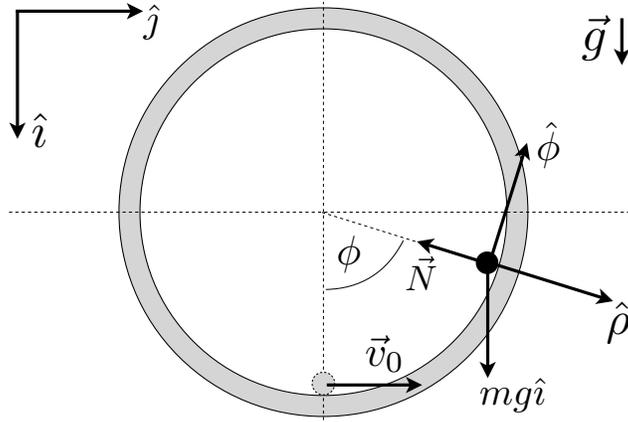
$$0 = -mg\cos\alpha + N. \quad (2.29)$$

La segunda ecuación nos informa que  $N = mg\cos\alpha$ , con lo que hemos aprendido que la fuerza normal viene dada por  $\vec{N} = mg\cos\alpha\hat{y}$ . Por añadidura, la ecuación restante es una ecuación diferencial de segundo orden que nos informa cómo se desliza la partícula a lo largo de la superficie. Al integrarla, podemos obtener una expresión para  $x(t)$  como función del tiempo.

Como hemos visto, en el ejemplo anterior la fuerza normal viene determinada por una *restricción cinemática*: No conocemos el valor a priori de la fuerza normal, pero sí sabemos que debe actuar en la dirección normal a la superficie (dado que la superficie evita que la partícula la atraviese). Lo que finalmente determinó el valor de  $\vec{N}$  fue el

hecho de que impusimos la condición de que  $y$  fuese constante, lo que hicimos a través de una relación cinemática (la velocidad y aceleración en (2.26)). Esto nos permite avizorar cómo lidiar con fuerzas normales en general. Estas deben apuntar siempre en direcciones normales a las superficies o curvas que restringen el movimiento de la partícula estudiada, y sus valores finales vendrán determinados por la segunda ley de Newton, a través de restricciones cinemáticas.

Veamos un segundo ejemplo: Una partícula confinada al interior de un cilindro hueco de radio  $R$ . Supongamos que en  $t = 0$  la partícula se encuentra en el punto más bajo del cilindro, y determinemos la velocidad inicial  $\vec{v}_0$  mínima que debe tener (hacia la derecha) para que la partícula pueda llegar al punto más alto (ver figura):



Para describir el movimiento de la partícula, será útil trabajar con coordenadas cilíndricas, de tal forma que el ángulo  $\phi$  describa el ángulo de la partícula con respecto a la vertical. Dado que la partícula está confinada al interior del cilindro, ésta siempre estará a una distancia  $R$  del centro. Luego, la posición de la partícula vendrá dada por

$$\vec{r} = R\hat{\rho}. \quad (2.30)$$

Notemos que al determinar que la distancia de la partícula al centro es  $R$ , ya estamos imponiendo una restricción cinemática ( $\rho = R$ ). De aquí sigue que la velocidad y aceleración vienen dadas por

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (2.31)$$

$$\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}. \quad (2.32)$$

Lo que resta, es identificar a los agentes, y escribir sus fuerzas asociadas. Estos son la atracción gravitacional, con una fuerza  $\vec{F}_g = mg\hat{i}$ , y la superficie, con una normal

$\vec{N} = -N\hat{\rho}$ . Notemos que hemos insertado un signo negativo para escribir  $\vec{N}$  con la expectativa de que la fuerza normal apunte hacia el centro del cilindro. No estamos obligados en forzar este signo, ya que la segunda ley de Newton determinará el valor de  $N$ , el que podría ser positivo o negativo. De cualquier forma, mantengamos el signo negativo, y esperemos a ver dónde nos lleva el desarrollo. La segunda ley de Newton tiene la forma:

$$m(R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}) = mg\hat{i} - N\hat{\rho}. \quad (2.33)$$

Para proseguir, notemos que  $\hat{i} = \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$ . Insertando esta relación en la segunda ley de Newton, podemos deducir dos ecuaciones escalares, una para las componentes multiplicando  $\hat{\rho}$ , y otra para las componentes multiplicando  $\hat{\phi}$ :

$$-mR\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi - N, \quad (2.34)$$

$$mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi. \quad (2.35)$$

La primera ecuación, nos entrega la fuerza normal en términos de cantidades cinemáticas  $N = mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi$ . Mientras tanto, la segunda ecuación es una ecuación de movimiento (corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden) para el ángulo:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\sin\phi = 0. \quad (2.36)$$

Para conocer  $N$ , debemos conocer  $\dot{\phi}$ . Esto es posible a partir de (2.36). Si multiplicamos la ecuación de movimiento por  $\dot{\phi}$  obtenemos

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\sin\phi\dot{\phi} = 0. \quad (2.37)$$

Notemos ahora que, gracias a la regla de la cadena, el primer término se puede re-escribir como

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}^2). \quad (2.38)$$

Similarmente, el segundo término puede ser re-escrito como

$$\frac{g}{R}\sin\phi\dot{\phi} = -\frac{g}{R}\frac{d}{dt}\cos\phi. \quad (2.39)$$

Insertando estos resultados de regreso en (2.37), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{R}\cos\phi\right) = 0. \quad (2.40)$$

Esto quiere decir que el paréntesis es una constante:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{R}\cos\phi = C. \quad (2.41)$$

Dado que  $C$  es una constante, para determinar su valor basta con evaluarla en cualquier tiempo. Por ejemplo, sabemos que en  $t = 0$ , se cumplen  $\phi = 0$  y  $R\dot{\phi} = v_0$ . Luego, sigue que

$$C = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{g}{R}. \quad (2.42)$$

Reemplazando este resultado de vuelta en (2.41) obtenemos la dependencia de  $\dot{\phi}^2$  en  $\phi$ :

$$\dot{\phi}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + 2\frac{g}{R}(\cos\phi - 1). \quad (2.43)$$

Recordemos que habíamos obtenido  $N = mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi$ , por lo que ahora podemos escribir una expresión para  $N$  como función de  $\phi$ :

$$N(\phi) = m\frac{v_0^2}{R} + mg(3\cos\phi - 2). \quad (2.44)$$

Este resultado nos revela la fuerza que ejerce la superficie sobre la partícula para que se mantenga pegada al cilindro (para que no lo atraviese). Cuando  $N = 0$ , la superficie interna deja de ejercer una fuerza, lo que significa que la partícula comienza a volar libremente (y las ecuaciones anteriores dejan de ser válidas, ya que  $\rho$  dejará de ser  $R$ ). Lo que deseamos conocer es el valor de  $v_0$  mínimo para que la partícula pueda llegar hasta el punto más alto del cilindro. Esto requiere que  $N \geq 0$  desde  $\phi = 0$  hasta  $\phi = \pi$ . Aplicando esta condición sobre  $N(\phi)$  encontramos que la rapidez mínima es

$$v_0 = \sqrt{5Rg}. \quad (2.45)$$

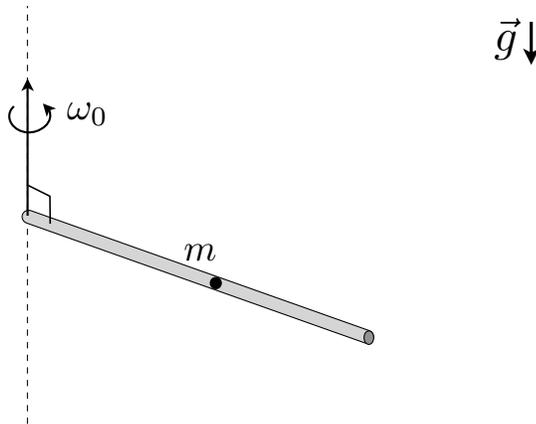
## 2.6 Estrategia general para resolver problemas de dinámica

Habiendo introducido la fuerza normal, ya estamos en condiciones de delinear un esquema general para resolver problemas de dinámica. La clave está en comenzar por la cinemática. Dado un problema donde el objetivo es determinar las ecuaciones de movimiento de una partícula, los pasos a seguir son:

1. Elegir el sistema de coordenadas y las bases para describir la posición de la partícula involucrados en el problema.

2. Determinar las restricciones cinemáticas, y calcular la velocidad y aceleración de la partícula.
3. Identificar los agentes que afectan el movimiento de la partícula, y escribir las fuerzas.
4. Escribir la segunda ley de Newton, y descomponer la ecuación vectorial en las ecuaciones escalares correspondientes a las componentes de la base elegida.
5. Si es posible, resolver las ecuaciones.

Como ejemplo, consideremos el siguiente problema: Considere una partícula de masa  $m$  confinada a moverse a lo largo del interior de un tubo horizontal delgado, el cual gira alrededor de un eje vertical con rapidez angular constante  $\omega_0$  (ver figura). Si en  $t = 0$  la partícula se encuentra en reposo con respecto al tubo, y a una distancia  $R_0$  del eje, determine su posición para todo  $t > 0$ .

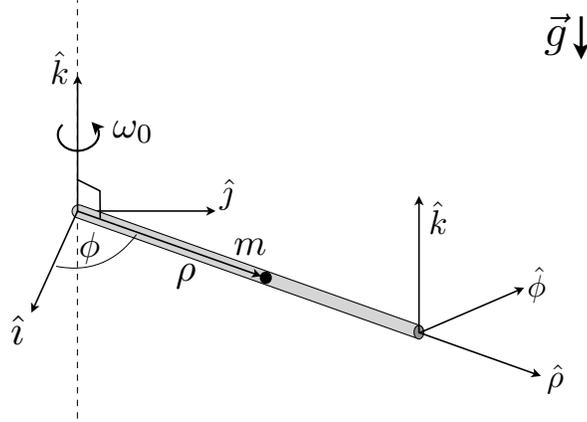


Resolvamos el problema paso por paso:

**Paso 1:** Dado que la partícula solo puede desplazarse a lo largo de un tubo que gira en torno a un eje fijo, es natural elegir el origen del sistema en el extremo fijo del tubo, y utilizar coordenadas (y la base) cilíndricas para describir la posición de la partícula. Luego, la posición de la partícula viene dada por

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho}. \quad (2.46)$$

Dado que la altura de la partícula no cambia, estamos usando  $z = 0$  por simplicidad. La siguiente figura describe el uso de las coordenadas cilíndricas para describir la configuración del sistema:



**Paso 2:** A partir de la expresión (2.46), vemos que la velocidad y la aceleración vienen dadas por

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (2.47)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}. \quad (2.48)$$

Sin embargo, notemos que el ángulo  $\phi$  crece de tal forma que  $\dot{\phi} = \omega_0$ . Esto significa que  $\ddot{\phi} = 0$ . Luego, la velocidad y aceleración pueden ser re-escritas como

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\omega_0\hat{\phi}, \quad (2.49)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2)\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\omega_0\hat{\phi}. \quad (2.50)$$

Incidentalmente, si usamos la definición de velocidad angular, es directo constatar que  $\vec{\omega} = \omega_0\hat{k}$ .

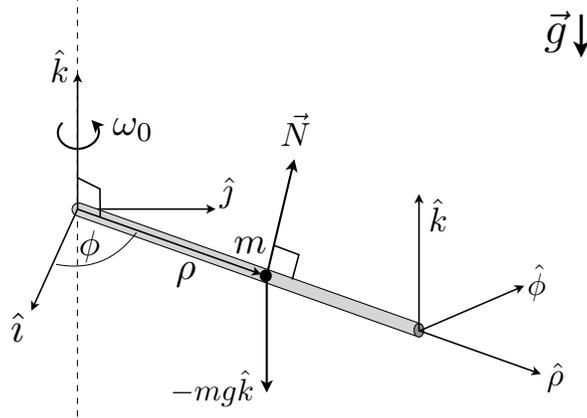
**Paso 3:** Identifiquemos los agentes afectando el movimiento de la partícula. En primer lugar, tenemos la fuerza gravitacional, que apunta en la dirección  $-\hat{k}$ . Por lo tanto, ésta tiene la forma

$$\vec{F}_g = -mg\hat{k}. \quad (2.51)$$

El segundo agente es el tubo, que mantiene a la partícula confinada sobre una línea recta (aunque girando). En consecuencia, la fuerza normal debe ser un vector normal a la recta, lo cual es equivalente a que  $\vec{N}$  sea perpendicular a  $\hat{\rho}$ . ¿Pero en qué dirección? Eso no lo sabremos hasta escribir la segunda ley de Newton, lo que haremos en el paso 4. Por ahora, a lo único que podemos acertar es que  $\vec{N}$  es perpendicular a  $\hat{\rho}$ , y por lo tanto debe tener la forma

$$\vec{N} = N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k}. \quad (2.52)$$

Por ahora, las componentes  $N_\phi$  y  $N_z$  son incógnitas que parametrizan nuestra ignorancia. La siguiente figura muestra a las fuerzas actuando sobre la partícula puntual:



**Paso 4:** Ya estamos listos para escribir la segunda ley de Newton. Juntando la aceleración (2.50) con la fuerza de atracción gravitacional y la fuerza normal escrita del paso anterior, encontramos:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2)\hat{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega_0\hat{\phi} = -mg\hat{k} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k}. \quad (2.53)$$

Luego, dado que los elementos de las bases  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  y  $\hat{k}$  son linealmente independientes, podemos deducir las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2) = 0, \quad (2.54)$$

$$2m\dot{\rho}\omega_0 = N_\phi, \quad (2.55)$$

$$0 = -mg + N_z. \quad (2.56)$$

Estas son las ecuaciones resultantes de la segunda ley. Una de ellas, la primera, es una ecuación de movimiento consistente en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, y homogénea. Las otras dos son ecuaciones que revelan el valor de la fuerza normal, cuyas componentes eran, hasta ahora, incógnitas:

$$N_\phi = 2m\dot{\rho}\omega_0, \quad (2.57)$$

$$N_z = mg. \quad (2.58)$$

Por cierto, para conocer exactamente  $N_\phi$ , debemos conocer la rapidez  $\dot{\rho}$  a lo largo del tubo. Para ello, debemos resolver la ecuación restante, lo que haremos en el paso 5.

**Paso 5:** No siempre es posible resolver una ecuación de movimiento de forma analítica. En este caso, tenemos la fortuna de contar con una ecuación bastante sencilla:

$$\ddot{\rho} - \omega_0^2 \rho = 0. \quad (2.59)$$

Además, contamos con las condiciones iniciales  $\rho = R_0$  y  $\dot{\rho} = 0$  (en  $t = 0$  la partícula está en reposo con respecto al tubo). Una regla básica para resolver ecuaciones diferenciales, es que el número de soluciones linealmente independientes debe ser igual al orden de la ecuación. Por ejemplo, supongamos que contamos con dos soluciones de (2.59), denotadas como  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ . Entonces, dado que es una ecuación lineal, podemos escribir la solución general como una combinación lineal de ambas soluciones

$$\rho(t) = Au_1(t) + Bu_2(t), \quad (2.60)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración, que vendrán determinadas por las condiciones iniciales. Para encontrar  $u_1$  y  $u_2$ , podemos simplemente adivinarlas. Cuando los coeficientes de una ecuación diferencial ordinaria (y lineal) son constantes, entonces podemos utilizar la siguiente adivinanza:

$$u(t) = e^{\beta t}, \quad (2.61)$$

donde  $\beta$  es una constante. Veamos qué pasa si reemplazamos esta adivinanza en (2.59). Dado que  $\dot{u} = \beta u$  y  $\ddot{u} = \beta^2 u$ , es directo constatar que

$$\beta^2 = \omega_0^2. \quad (2.62)$$

Esto significa que tenemos dos soluciones para el parámetro  $\beta$ :

$$\beta_1 = +\omega_0, \quad \beta_2 = -\omega_0. \quad (2.63)$$

En consecuencia, tenemos dos soluciones distintas para  $u(t)$ :

$$u_1(t) = e^{+\omega_0 t}, \quad u_2(t) = e^{-\omega_0 t}. \quad (2.64)$$

Ya no necesitamos buscar más soluciones, dado que sabemos que el número de soluciones linealmente independientes debe ser 2. Luego, la solución general de (2.59) viene dada por:

$$\rho(t) = Ae^{+\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}. \quad (2.65)$$

Como paso final, impongamos las condiciones iniciales. Para ello, debemos conocer la rapidez  $\dot{\rho}$ , la cual, de acuerdo a (2.65), viene dada por

$$\dot{\rho}(t) = \omega_0 Ae^{+\omega_0 t} - \omega_0 Be^{-\omega_0 t}. \quad (2.66)$$

En  $t = 0$  tenemos  $\dot{\rho} = 0$ . Por lo tanto, es directo ver que  $B = A$ . Usando este resultado en (2.65), vemos que

$$\rho(t) = 2A \cosh \omega_0 t. \quad (2.67)$$

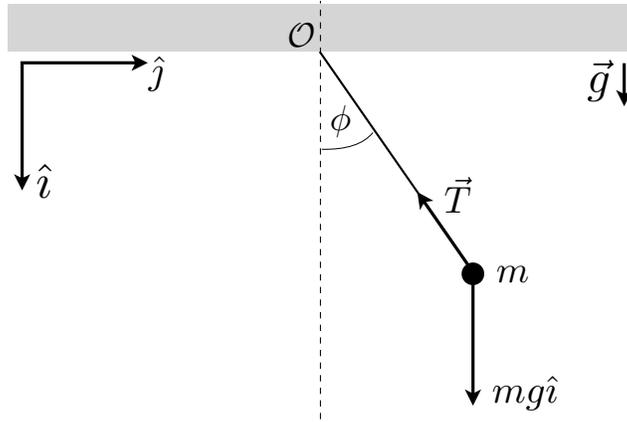
Finalmente, dado que  $\rho = R_0$  en  $t = 0$ , vemos que  $2A = R_0$ , de donde sigue que

$$\rho(t) = R_0 \cosh \omega_0 t, \quad (2.68)$$

lo que revela que la partícula continuará moviéndose a lo largo del tubo con una rapidez cada vez mayor, hasta alcanzar el extremo del tubo. Este resultado, a su vez, nos permite conocer el valor de  $N_\phi$  como función del tiempo.

## 2.7 Tensión

La tensión (usualmente designada con  $\vec{T}$ ) es otro tipo de fuerza de contacto, pero que se ejerce a distancia, a través de cuerdas, varillas, u otros dispositivos similares. En este caso, la cuerda o varilla es solo el medio a través del cual la influencia de un agente se transmite. La regla básica, es que  $\vec{T}$  debe apuntar a lo largo del medio (cuerda o varilla). Revisemos el siguiente ejemplo clásico: el péndulo.



En este ejemplo, los agentes afectando el movimiento de  $m$  son la Tierra (a través de su atracción gravitacional) y el techo, que lo hace a través de la cuerda. En efecto, hay una cuerda que une el techo, a partir del origen  $\mathcal{O}$ , con la cuerda. La cuerda transmite una fuerza, debida al techo, que llamaremos tensión ( $\vec{T}$ ). Si trabajamos con coordenadas cilíndricas, entonces la posición de la masa es (paso 1)

$$\vec{r} = L\hat{\rho}, \quad (2.69)$$

donde  $L$  es el largo de la cuerda. Luego, la velocidad y la aceleración serán (paso 2)

$$\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (2.70)$$

$$\vec{a} = L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{\rho}. \quad (2.71)$$

Veamos ahora las fuerzas (paso 3). La fuerza gravitacional es  $\vec{F}_g = mg\hat{i}$ . Por su parte, la fuerza que ejerce el techo sobre  $m$  es transmitida por la cuerda en forma de tensión  $\vec{T}$ , que debe ser paralela a  $\hat{\rho}$ :

$$\vec{T} = T\hat{\rho}. \quad (2.72)$$

Notemos que la expresión anterior parece estar en contradicción con la figura, donde la tensión apunta desde la masa hacia el origen del sistema (en la dirección  $-\hat{\rho}$ ). Pero esto no es así: la cantidad  $T$  es una incógnita, y su signo aún debe ser revelado por la segunda ley de Newton. Escribamos ahora la segunda ley de Newton (paso 4):

$$m(L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{\rho}) = mg(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}) + T\hat{\rho}, \quad (2.73)$$

donde reemplazamos  $\hat{i} = \cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}$  en la fuerza de gravedad. Ahora vemos que las dos ecuaciones escalares son:

$$-mL\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi + T, \quad (2.74)$$

$$mL\ddot{\phi} = -mg\sin\phi. \quad (2.75)$$

Notemos que estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (2.34) y (2.35) obtenidas para una partícula al interior de un cilindro. En el presente problema, la tensión cumple el mismo rol de la normal. En esta oportunidad, la ecuación (2.74) revela que la incógnita  $T$  viene dada por

$$T = -mL\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi, \quad (2.76)$$

de donde se aprecia que, si  $\phi < \pi/2$ , entonces necesariamente  $T$  es negativo, y  $\vec{T}$  apunta en el sentido contrario a  $\hat{\rho}$  (tal como en la figura). Para finalizar, notemos que la ecuación (2.75) puede ser re-escrita como la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0. \quad (2.77)$$

## 2.8 Del péndulo al oscilador armónico

En nuestro análisis del péndulo, visto en la sección anterior, llegamos a la ecuación de movimiento (2.77) que describe la evolución temporal del ángulo  $\phi$ . Consideremos

el caso en que el péndulo oscila de tal forma que el ángulo  $\phi$  nunca se aleja mucho de  $\phi = 0$ . Es decir, examinemos la situación  $\phi \ll \pi$ . En tal caso, podemos aproximar  $\sin \phi \simeq \phi$ , y la ecuación adquiere la forma

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \quad (2.78)$$

donde definimos  $\omega_0 \equiv \sqrt{g/L}$ . Ya veremos qué rol cumple  $\omega_0$ . Esta es la ecuación de un oscilador armónico. Salvo un signo, ésta se parece mucho a la ecuación (2.59). Para resolver esta ecuación, sigamos la misma estrategia empleada en dicha ocasión: Busquemos soluciones  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  simplemente adivinándolas. Si las encontramos, la solución general para  $\phi$  será:

$$\phi(t) = Au_1(t) + Bu_2(t), \quad (2.79)$$

Al igual que con (2.59), utilicemos la siguiente adivinanza:

$$u(t) = e^{\beta t}, \quad (2.80)$$

donde  $\beta$  es una constante. Reemplazando esta expresión en (2.78), obtenemos

$$\beta^2 = -\omega_0^2. \quad (2.81)$$

Dado que  $\omega_0$  es una constante real, vemos que la ecuación algebraica anterior implica dos posibles valores para el parámetro  $\beta$ :

$$\beta_1 = +i\omega_0, \quad \beta_2 = -i\omega_0. \quad (2.82)$$

Esto, a su vez, implica dos soluciones distintas para  $u(t)$

$$u_1(t) = e^{+i\omega_0 t}, \quad u_2(t) = e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.83)$$

Luego, la solución general para el ángulo será:

$$\phi(t) = Ae^{+i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \quad (2.84)$$

Aquí podría incomodarnos la presencia del número imaginario  $i$ . Sabemos que el ángulo  $\phi(t)$  debe ser una función real. Sin embargo, aún no hemos determinado los valores de  $A$  y  $B$ , que dependen de las condiciones iniciales. Supongamos que en tiempo  $t = t_0$ , el péndulo tiene una configuración tal que el ángulo es  $\phi_0$ , y su derivada temporal es  $\dot{\phi}_0$ . Derivando (2.84) con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{\phi}(t) = i\omega_0 Ae^{+i\omega_0 t} - i\omega_0 Be^{-i\omega_0 t}. \quad (2.85)$$

Luego, imponiendo  $\phi(t_0) = \phi_0$  y  $\dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}_0$ , obtenemos las siguientes dos ecuaciones algebraicas:

$$Ae^{+i\omega_0 t_0} + Be^{-i\omega_0 t_0} = \phi_0, \quad (2.86)$$

$$i\omega_0 Ae^{+i\omega_0 t_0} - i\omega_0 Be^{-i\omega_0 t_0} = \dot{\phi}_0. \quad (2.87)$$

Estas ecuaciones nos permiten concluir que

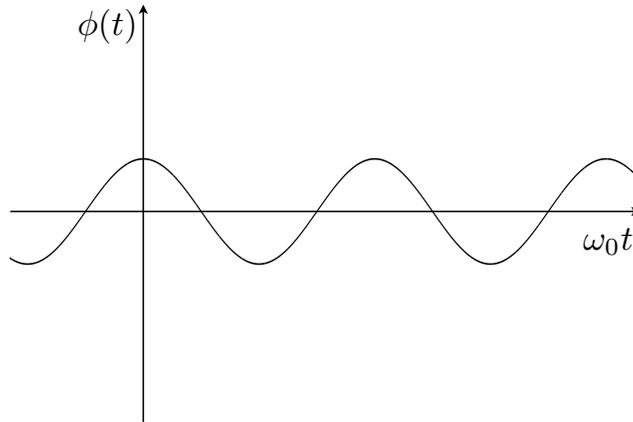
$$A = \frac{1}{2} \left( \phi_0 + \frac{1}{i\omega_0} \dot{\phi}_0 \right) e^{-i\omega_0 t_0}, \quad (2.88)$$

$$B = \frac{1}{2} \left( \phi_0 - \frac{1}{i\omega_0} \dot{\phi}_0 \right) e^{+i\omega_0 t_0}. \quad (2.89)$$

Para finalizar, si insertemos estas expresiones de vuelta en (2.84), obtenemos:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{1}{\omega_0} \dot{\phi}_0 \sin(\omega_0(t - t_0)). \quad (2.90)$$

Ahora sí, podemos estar satisfechos. La solución final satisface las condiciones iniciales, y es real, tal como debe ser. Notemos que la solución consiste en la combinación lineal de un seno y un coseno. Esto implica que la solución es oscilatoria, tal como lo muestra la siguiente figura (donde  $\dot{\phi}_0 = 0$ ):



## 2.9 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Para reforzar nuestra experiencia con ecuaciones diferenciales, veamos ahora el caso de la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \sigma x = f_0, \quad (2.91)$$

donde  $\gamma$ ,  $\sigma$  y  $f_0$  son constantes reales. El oscilador armónico visto en la sección anterior es un caso particular de esta ecuación, con  $\gamma = 0$  y  $f_0 = 0$ . A la configuración estática en la cual  $\ddot{x} = 0$  y  $\dot{x} = 0$  se le llama configuración de equilibrio estático, la cual corresponde a

$$x_e \equiv \frac{f_0}{\sigma}. \quad (2.92)$$

Supongamos que sabemos que en  $t = t_0$  se cumple

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0. \quad (2.93)$$

Para resolver la ecuación (2.91) con condiciones iniciales (2.93), primero eliminemos el término inhomogéneo  $f_0$ , que aparece en el lado derecho. Para ello, escribamos  $x(t) = x_e + y(t)$ , donde  $x_e$  es la coordenada que satisface el equilibrio estático. En tal caso, es directo ver que la siguiente ecuación es satisfecha por la coordenada  $y$ :

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \sigma y = 0. \quad (2.94)$$

Esta es una ecuación homogénea, lo que significa que puede ser satisfecha por la solución trivial  $y = 0$ . Lo importante es que esta ecuación es levemente más sencilla que la anterior. Ahora podemos intentar resolverla mediante una adivinanza de la forma:

$$u(t) = e^{\beta t}. \quad (2.95)$$

Esta adivinanza nos entrega la siguiente ecuación algebraica:

$$\beta^2 + 2\gamma\beta + \sigma = 0, \quad (2.96)$$

la que tiene las siguientes dos soluciones:

$$\beta_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \sigma}, \quad \beta_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \sigma}. \quad (2.97)$$

De esta forma, las dos soluciones buscadas para la ecuación (2.94), son

$$u_1(t) = e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \sigma} t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \sigma} t}, \quad (2.98)$$

lo que da la siguiente solución general para (2.94):

$$y(t) = A e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \sigma} t} + B e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \sigma} t}, \quad (2.99)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración. En consecuencia, recordando que  $x(t) = y(t) + c_0$ , con  $c_0 = f_0/\sigma$ , vemos que la solución general para la ecuación inicial (2.91) viene dada por

$$x(t) = \frac{f_0}{\sigma} + A e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \sigma} t} + B e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \sigma} t}. \quad (2.100)$$

Como veremos más adelante, en situaciones relevantes para la mecánica, encontraremos que  $\gamma > 0$ . Por otro lado, como ya hemos visto,  $\sigma$  puede ser positivo o negativo. Sin embargo, lo crucial para determinar la dependencia temporal de  $x(t)$  es conocer el signo de la combinación  $\gamma^2 - \sigma$ . Veamos a continuación los dos casos relevantes.

### 2.9.1 Caso $\gamma^2 > \sigma$

En este caso tenemos  $\gamma^2 - \sigma > 0$ , y por lo tanto  $e^{\sqrt{\gamma^2 - \sigma}t}$  y  $e^{-\sqrt{\gamma^2 - \sigma}t}$  son funciones reales. Para simplificar la notación, definamos

$$\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \sigma}. \quad (2.101)$$

Luego, la solución general del sistema es

$$x(t) = x_e + Ae^{-(\gamma - \Omega)t} + Be^{-(\gamma + \Omega)t}. \quad (2.102)$$

Además, la primera derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{x}(t) = -(\gamma - \Omega)Ae^{-(\gamma - \Omega)t} - (\gamma + \Omega)Be^{-(\gamma + \Omega)t}. \quad (2.103)$$

Entonces, las condiciones iniciales (2.93) implican:

$$x_e + Ae^{-(\gamma - \Omega)t_0} + Be^{-(\gamma + \Omega)t_0} = x_0, \quad (2.104)$$

$$-(\gamma - \Omega)Ae^{-(\gamma - \Omega)t_0} - (\gamma + \Omega)Be^{-(\gamma + \Omega)t_0} = \dot{x}_0. \quad (2.105)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas, para encontrar:

$$A = \frac{1}{2\Omega} [\dot{x}_0 + (\gamma + \Omega)(x_0 - x_e)] e^{+(\gamma - \Omega)t_0}, \quad (2.106)$$

$$B = -\frac{1}{2\Omega} [\dot{x}_0 + (\gamma - \Omega)(x_0 - x_e)] e^{+(\gamma + \Omega)t_0}. \quad (2.107)$$

De esta forma, finalmente encontramos:

$$\begin{aligned} x(t) = & x_e + e^{-\gamma(t-t_0)} (x_0 - x_e) \cosh [\Omega(t - t_0)] \\ & + \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t_0)} [\dot{x}_0 + \gamma(x_0 - x_e)] \sinh [\Omega(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (2.108)$$

### 2.9.2 Caso $\gamma^2 < \sigma$

En este caso tenemos  $\gamma^2 - \sigma < 0$ , y por lo tanto  $e^{\sqrt{\gamma^2 - \sigma}t}$  y  $e^{-\sqrt{\gamma^2 - \sigma}t}$  son funciones complejas. Para simplificar la notación, definamos

$$\Omega \equiv \sqrt{\sigma - \gamma^2}. \quad (2.109)$$

Luego, la solución general del sistema, y su primera derivada temporal, son

$$x(t) = x_e + Ae^{-(\gamma - i\Omega)t} + Be^{-(\gamma + i\Omega)t}, \quad (2.110)$$

$$\dot{x}(t) = -(\gamma - \Omega)Ae^{-(\gamma - i\Omega)t} - (\gamma + \Omega)Be^{-(\gamma + i\Omega)t}. \quad (2.111)$$

Repitiendo los mismos pasos para el caso anterior, en esta oportunidad las condiciones iniciales (2.93) implican:

$$x_e + Ae^{-(\gamma - i\Omega)t_0} + Be^{-(\gamma + i\Omega)t_0} = x_0, \quad (2.112)$$

$$-(\gamma - i\Omega)Ae^{-(\gamma - i\Omega)t_0} - (\gamma + i\Omega)Be^{-(\gamma + i\Omega)t_0} = \dot{x}_0. \quad (2.113)$$

De esta manera, podemos determinar que las constantes de integración  $A$  y  $B$  son

$$A = \frac{1}{2i\Omega} [\dot{x}_0 + (\gamma + i\Omega)(x_0 - x_e)] e^{+(\gamma - i\Omega)t_0}, \quad (2.114)$$

$$B = -\frac{1}{2i\Omega} [\dot{x}_0 + (\gamma - i\Omega)(x_0 - x_e)] e^{+(\gamma + i\Omega)t_0}, \quad (2.115)$$

de donde la solución general es

$$\begin{aligned} x(t) = & x_e + e^{-\gamma(t-t_0)} (x_0 - x_e) \cos [\Omega(t - t_0)] \\ & + \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t_0)} [\dot{x}_0 + \gamma(x_0 - x_e)] \sin [\Omega(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Más adelante, volveremos a las soluciones (2.108) y (2.116) para analizar sistemas concretos.

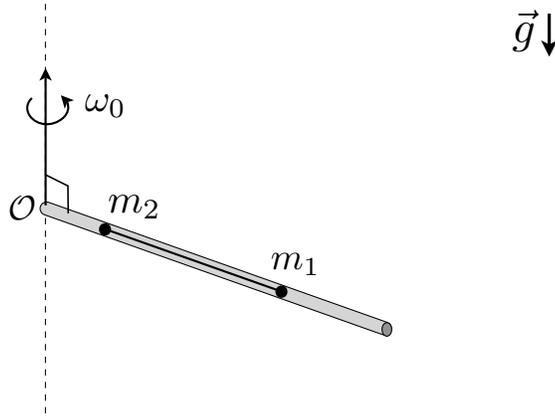
### 2.9.3 Caso $\gamma^2 = \sigma$

Para analiza este caso, podemos tomar el límite  $\Omega \rightarrow 0$  de cualquiera de los dos casos anteriores. Por ejemplo, en el límite  $\Omega \rightarrow 0$ , la ecuación (2.116) nos brinda

$$x(t) = x_e + e^{-\gamma(t-t_0)} (x_0 - x_e) + e^{-\gamma(t-t_0)} [\dot{x}_0 + \gamma(x_0 - x_e)] (t - t_0). \quad (2.117)$$

## 2.10 Problemas con dos partículas

Como veremos, la estrategia descrita en la Sección 2.6 puede ser usada con cualquier tipo de problema que involucre la segunda ley de Newton, incluso en situaciones donde participan más de una partícula. Para apreciar esto, veamos la siguiente variante del problema analizado en la Sección 2.6, en donde ahora hay dos partículas confinadas al tubo, atadas por una cuerda inextensible de largo  $L$  (ver siguiente figura):



Determinemos las ecuaciones de movimiento para las masas siguiendo los mismos pasos. **Paso 1:** En esta oportunidad, tenemos dos masas que considerar. Podemos utilizar coordenadas cilíndricas para los vectores posición de ambas masas:

$$\vec{r}_1 = \rho_1 \hat{\rho}, \quad (2.118)$$

$$\vec{r}_2 = \rho_2 \hat{\rho}. \quad (2.119)$$

**Paso 2:** Dado que las masas están conectadas mediante una cuerda inextensible, debemos considerar la siguiente restricción cinemática:

$$\rho_1 - \rho_2 = L. \quad (2.120)$$

Luego, necesariamente se cumplen  $\dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_1$  y  $\ddot{\rho}_2 = \ddot{\rho}_1$ , de donde las velocidades y aceleraciones de ambas masas son

$$\vec{v}_1 = \dot{\rho}_1 \hat{\rho} + \rho_1 \omega_0 \hat{\phi}, \quad (2.121)$$

$$\vec{a}_1 = (\ddot{\rho}_1 - \rho_1 \omega_0^2) \hat{\rho} + 2\dot{\rho}_1 \omega_0 \hat{\phi}, \quad (2.122)$$

$$\vec{v}_2 = \dot{\rho}_1 \hat{\rho} + (\rho_1 - L) \omega_0 \hat{\phi}, \quad (2.123)$$

$$\vec{a}_2 = (\ddot{\rho}_1 - (\rho_1 - L) \omega_0^2) \hat{\rho} + 2\dot{\rho}_1 \omega_0 \hat{\phi}. \quad (2.124)$$

Es decir, todas las cantidades cinemáticas relevantes pueden ser escritas en términos de  $\rho_1$  y sus derivadas. **Paso 3:** Ya estamos familiarizados con dos de los tres agentes actuando sobre  $m_1$ : la Tierra, con una fuerza  $\vec{F}_{g1} = -m_1g\hat{k}$ , el tubo, con una fuerza normal  $\vec{N}_1 = N_{\phi,1}\hat{\phi} + N_{z,1}\hat{k}$ . El tercer agente es  $m_2$ , quien lo hace a través de la cuerda, en forma de tensión. Es decir, la fuerza que ejerce  $m_2$  sobre  $m_1$  tiene la forma:

$$\vec{F}_{21} = -T\hat{\rho}, \quad (2.125)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda, que por ahora permanecerá como una incógnita. Por otro lado, sobre la masa  $m_2$  actúan la fuerza de gravitacional  $\vec{F}_{g2} = -m_2g\hat{k}$ , la normal ejercida por el tubo  $\vec{N}_2 = N_{\phi,2}\hat{\phi} + N_{z,2}\hat{k}$ , y la fuerza  $\vec{F}_{12}$  ejercida por  $m_1$ , transmitida por la cuerda. Gracias a la tercera ley de Newton, sabemos que  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  y, por lo tanto, podemos escribir

$$\vec{F}_{12} = +T\hat{\rho}. \quad (2.126)$$

**Paso 4:** Ahora debemos escribir la ley de Newton válida para cada masa. Reuniendo los resultados de los pasos 2 y 3, vemos que las ecuaciones de movimiento para ambas masas son

$$m_1(\ddot{\rho}_1 - \rho_1\omega_0^2)\hat{\rho} + 2m_1\dot{\rho}_1\omega_0\hat{\phi} = -m_1g\hat{k} + N_{\phi,1}\hat{\phi} + N_{z,1}\hat{k} - T\hat{\rho}, \quad (2.127)$$

$$m_2(\ddot{\rho}_1 - (\rho_1 - L)\omega_0^2)\hat{\rho} + 2m_2\dot{\rho}_1\omega_0\hat{\phi} = -m_2g\hat{k} + N_{\phi,2}\hat{\phi} + N_{z,2}\hat{k} + T\hat{\rho}. \quad (2.128)$$

Estas ecuaciones pueden ser descompuestas en 3 ecuaciones escalares cada una, dando origen a la siguiente lista de ecuaciones:

$$m_1(\ddot{\rho}_1 - \rho_1\omega_0^2) = -T, \quad (2.129)$$

$$2m_1\dot{\rho}_1\omega_0 = N_{\phi,1}, \quad (2.130)$$

$$0 = -m_1g + N_{z,1}, \quad (2.131)$$

$$m_2(\ddot{\rho}_1 - (\rho_1 - L)\omega_0^2) = +T, \quad (2.132)$$

$$2m_2\dot{\rho}_1\omega_0 = N_{\phi,2}, \quad (2.133)$$

$$0 = -m_2g + N_{z,2}. \quad (2.134)$$

Las ecuaciones (2.130), (2.131), (2.133) y (2.134) nos entregan los valores de las incógnitas  $N_{\phi,1}$ ,  $N_{z,1}$ ,  $N_{\phi,2}$  y  $N_{z,2}$ . Mientras tanto, las ecuaciones (2.129) y (2.132) pueden combinadas, dando como resultado las siguientes dos ecuaciones:

$$\ddot{\rho}_1 - \rho_1\omega_0^2 = -\frac{m_2L}{m_1 + m_2}\omega_0^2, \quad (2.135)$$

$$T = L\omega_0^2\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.136)$$

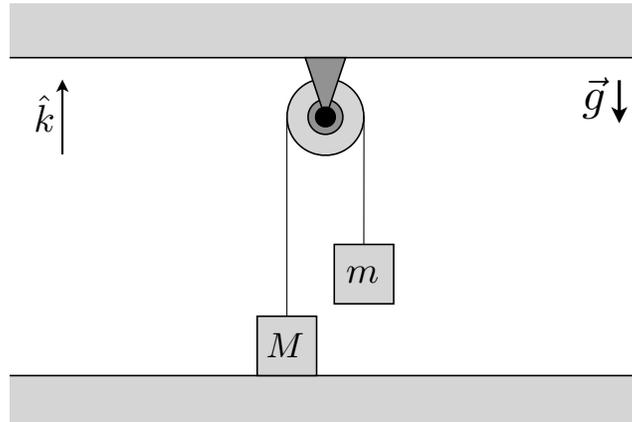
La primera ecuación, es una ecuación de movimiento para  $\rho_1$ , mientras que la segunda ecuación, determina el valor de la tensión  $T$  de la cuerda, la que permanece constante en el tiempo. **Paso 5:** Finalmente, debemos intentar resolver la ecuación de movimiento (2.135). Para proceder, supongamos que en  $t = t_0$  las partículas están en reposo con respecto al tubo, y  $m_1$  está a una distancia  $\rho_0$  del origen. Notemos que (2.135) es un caso particular de la ecuación (2.91), con  $x = \rho_1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\sigma = -\omega_0^2$  y  $f_0 = -m_2 L \omega_0^2 / (m_1 + m_2)$ . Luego, dado que  $\sigma = -\omega_0^2 < 0$ , debemos usar la solución (2.108) con  $x_0 = \rho_0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  y  $\Omega = \omega_0$ , la cual adquiere la forma

$$\rho(t) = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} + \left( \rho_0 - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \right) \cosh [\omega_0(t - t_0)]. \quad (2.137)$$

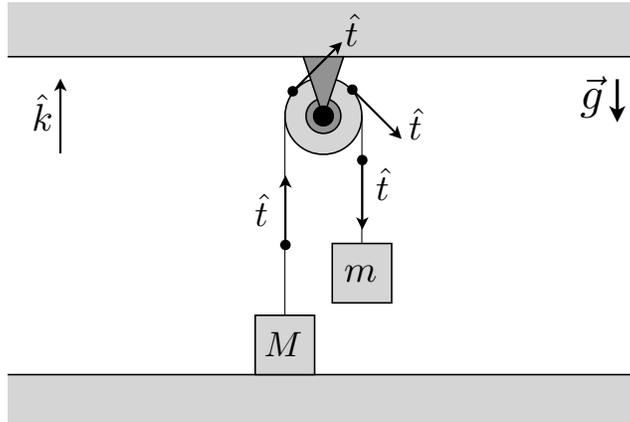
Vemos que, efectivamente, se cumple  $\rho(t_0) = \rho_0$ .

## 2.11 Cuerdas dobladas (poleas)

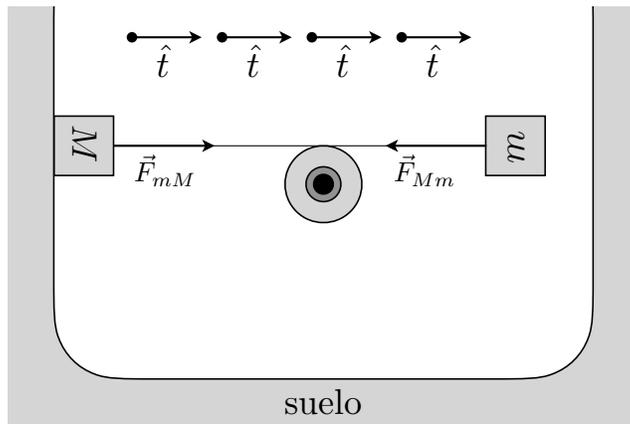
En el ejemplo de la sección anterior la cuerda permanece extendida de forma recta. Esto permitió utilizar la tercera ley de Newton  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  para determinar la influencia mutua de las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Pero, ¿qué pasa si una cuerda se encuentra torcida? Para responder a esta pregunta, consideremos el ejemplo de la siguiente figura, donde se muestra un sistema estático compuesto por dos masas  $M > m$ , unidas por una cuerda doblada mediante una polea:



Aquí, la cuerda continúa siendo el medio a través del cual las masas se influyen mutuamente, y la polea cumple el rol de redireccionar la transmisión de la fuerza (en forma de tensión). Una forma de expresar la tercera ley de Newton con cierta claridad es introduciendo un vector unitario  $\hat{t}$  tangente a la cuerda en cada punto de ésta, tal como lo muestra la siguiente figura



Más aún, si solo nos enfocamos en la cuerda, y nos abstraemos de todo el resto, podemos dibujar la situación anterior de tal forma que la cuerda aparezca estirada, y el suelo, y todo el espacio alrededor de la cuerda aparece deformado:



En esta figura, la cuerda aparece recta, y el vector tangente siempre apunta en la misma dirección (a lo largo de la cuerda). Ahora, la fuerza  $\vec{F}_{Mm}$  que ejerce  $M$  sobre  $m$ , a través de la cuerda es:

$$\vec{F}_{Mm} = -\hat{t}T, \quad (2.138)$$

La tercera ley de Newton, nos dice que la fuerza que ejerce  $m$  sobre la masa  $M$  debe tener la misma magnitud, pero el sentido inverso. Pero como el medio a través del cual se transmite la fuerza es la cuerda, la tercera ley de Newton debe ser escrita en

relación a este medio. Es decir:

$$\vec{F}_{mM} = \hat{t}T. \quad (2.139)$$

Luego, dado que en el lado izquierdo de la polea, el vector  $\hat{t}$  es igual a  $\hat{t}_{\text{izq}} = \hat{k}$ , mientras que en el lado derecho se cumple  $\hat{t}_{\text{der}} = -\hat{k}$ , entonces vemos que

$$\vec{F}_{Mm} = \vec{F}_{mM} = +\hat{k}T. \quad (2.140)$$

Pareciera que la tercera ley de Newton no se cumple, sin embargo, sí lo hace a través de la cuerda. Dado que el sistema es estático, vemos que la segunda ley de Newton para la masa  $M$  es:

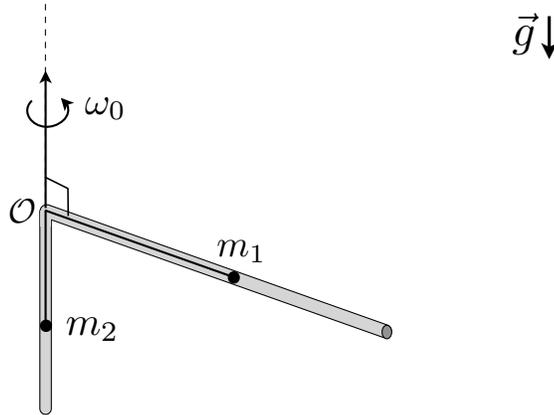
$$0 = \hat{k}N - \hat{k}Mg + \hat{k}T, \quad (2.141)$$

donde  $\hat{k}N$  es la normal que el suelo ejerce sobre  $M$ . Por otro lado, la segunda ley de Newton para la masa  $m$  es:

$$0 = -\hat{k}mg + \hat{k}T. \quad (2.142)$$

Luego, se deduce que la tensión de la cuerda es  $T = mg$  y, por lo tanto, la normal que el suelo ejerce sobre  $M$  es  $N = (M - m)g$ . A partir de este resultado, es posible ver que  $M > m$  es necesario para que el sistema permanezca estático.

Veamos ahora un problema más interesante involucrando una cuerda doblada: Volvamos a considerar el problema de la Sección 2.10, pero esta vez, añadamos un tubo vertical, conectado al tubo horizontal en el origen, y por el cual puede deslizarse la segunda masa  $m_2$  que permanece conectada a  $m_1$  mediante una cuerda inextensible de largo  $L$  (ver siguiente figura).



Determinemos la ecuación de movimiento para la posición de  $m_1$ . **Paso 1:** Para la masa  $m_1$ , sigamos utilizando coordenadas cilíndricas para escribir su vector posición:

$$\vec{r}_1 = \rho \hat{\rho}. \quad (2.143)$$

Para la masa  $m_2$ , utilicemos un vector posición expresado con la ayuda de la coordenada cartesiana  $z$ :

$$\vec{r}_2 = z \hat{k}. \quad (2.144)$$

**Paso 2:** Dado que las masas están conectadas mediante una cuerda inextensible, si  $m_1$  se aleja del origen, entonces  $m_2$  debe subir, y por el contrario, si  $m_1$  se acerca del origen, entonces  $m_2$  debe bajar. Esto es capturado por la siguiente relación (recordemos que  $z$  es negativo):

$$\rho - z = L. \quad (2.145)$$

Luego, necesariamente se cumple que  $\dot{z} = \dot{\rho}$ , de donde las velocidades y aceleraciones de ambas masas son

$$\vec{v}_1 = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \omega_0 \hat{\phi}, \quad (2.146)$$

$$\vec{a}_1 = (\ddot{\rho} - \rho \omega_0^2) \hat{\rho} + 2\dot{\rho} \omega_0 \hat{\phi}, \quad (2.147)$$

$$\vec{v}_2 = \dot{\rho} \hat{k}, \quad (2.148)$$

$$\vec{a}_2 = \ddot{\rho} \hat{k}. \quad (2.149)$$

**Paso 3:** Ahora debemos escribir la segunda ley de Newton válida para cada masa. Comencemos con la masa  $m_1$ . Ya sabemos que sobre  $m_1$  actúan la fuerza normal ejercida por el tubo, que tiene la forma  $\vec{N} = N_\phi \hat{\phi} + N_k \hat{k}$  y la fuerza gravitacional  $\vec{F}_{g1} = -m_1 g \hat{k}$ . Adicionalmente, está la fuerza que  $m_2$  ejerce sobre  $m_1$  a través de la cuerda, en forma de tensión. Esta tiene la forma:

$$\vec{F}_{21} = -T \hat{\rho}, \quad (2.150)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda, que por ahora permanecerá como una incógnita. Por otro lado, sobre la masa  $m_2$  hay dos agentes actuando: La Tierra, a través de la fuerza  $\vec{F}_{g2} = -m_2 g \hat{k}$ , y la masa  $m_1$ , que lo hace a través de la cuerda. De acuerdo a la tercera ley de Newton, ésta debe tener la forma

$$\vec{F}_{12} = T \hat{k}. \quad (2.151)$$

(Efectivamente, si introducimos un vector tangencial  $\hat{t}$  a la cuerda, cuya dirección va desde  $m_2$  a  $m_1$ , entonces a lo largo del tubo vertical se cumple  $\hat{t} = \hat{k}$ , mientras que

a lo largo del tubo horizontal  $\hat{t} = \hat{r}ho$ . De esta forma, vemos que la tercera ley de Newton, a lo largo de la cuerda, corresponde a  $\vec{F}_{21} = -T\hat{t}$  y  $\vec{F}_{12} = T\hat{t}$ .

**Paso 4:** Juntando todas las expresiones del paso anterior, vemos que las ecuaciones de movimiento para  $m_1$  y  $m_2$  son:

$$m_1(\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2)\hat{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega_0\hat{\phi} = -m_1g\hat{k} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k} - T\hat{\rho}, \quad (2.152)$$

$$m_2\ddot{\rho}\hat{k} = -m_2g\hat{k} + T\hat{k}. \quad (2.153)$$

Luego, las ecuaciones escalares son

$$m_1(\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2) = -T, \quad (2.154)$$

$$2m\dot{\rho}\omega_0 = N_\phi, \quad (2.155)$$

$$0 = -m_1g + N_z, \quad (2.156)$$

$$m_2\ddot{\rho} = -m_2g + T. \quad (2.157)$$

A partir de estas ecuaciones, es inmediato ver que  $N_z = m_1g$  y  $N_\phi = 2m\dot{\rho}\omega_0$  (aunque necesitamos determinar  $\dot{\rho}$  para conocer  $N_\phi$ ). Juntando (2.154) y (2.157), es posible deducir que:

$$\ddot{\rho} - \frac{m_1\omega_0^2}{m_1 + m_2}\rho = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}g, \quad (2.158)$$

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\omega_0^2\rho + g). \quad (2.159)$$

Notemos que dado que  $m_1\omega_0^2/(m_1 + m_2) > 0$ , la solución de la ecuación (2.158) necesariamente consistirá en una combinación lineal de senos y cosenos hiperbólicos. Luego, si el sistema parte del reposo  $\dot{\rho} = 0$ , entonces la segunda masa inevitablemente golpeará el origen.

## 2.12 Momento angular y torque

Es el momento de introducir dos herramientas nuevas: momento angular y torque. Estos conceptos serán particularmente útiles para analizar el movimiento de sistemas con muchas partículas sin atender los detalles debido a las interacciones internas entre los constituyentes del sistema. Por ahora, nos enfocaremos en sistemas simples.

El momento angular de una partícula de masa  $m$ , con respecto a un punto  $P$  fijo, se define como

$$\vec{L}_P \equiv m(\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{v}. \quad (2.160)$$

Es inmediato ver que el momento angular con respecto al origen es  $\vec{L}_O \equiv m\vec{r} \times \vec{v}$ . Por otro lado, el torque  $\vec{\tau}_{P,a}$  debido a una fuerza  $\vec{F}_a$ , con respecto al punto  $P$  fijo, se define como

$$\vec{\tau}_{P,a} \equiv (\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{F}_a. \quad (2.161)$$

Por otra parte, el torque total  $\vec{\tau}_P$  con respecto a un punto  $P$  fijo es simplemente el torque debido a la fuerza total  $\vec{F}_{\text{tot}}$ , y por lo tanto puede ser expresado como la suma de todos los torques individuales:

$$\vec{\tau}_P = \sum_a \vec{\tau}_{P,a}. \quad (2.162)$$

Es importante enfatizar que tanto el momento angular como el torque siempre se definen con respecto a algún punto  $P$ , y por lo tanto debemos aclarar de qué punto estamos hablando. Utilizando la regla de Leibniz, vemos que la derivada del momento angular con respecto al tiempo viene dada por:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_P = m \left( \frac{d}{dt} \vec{r} \right) \times \vec{v} + m(\vec{r} - \vec{r}_P) \times \frac{d}{dt} \vec{v}. \quad (2.163)$$

Luego, dado que  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , el primer término es nulo (debido a que  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ ), y por lo tanto obtenemos

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_P = m(\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{a}. \quad (2.164)$$

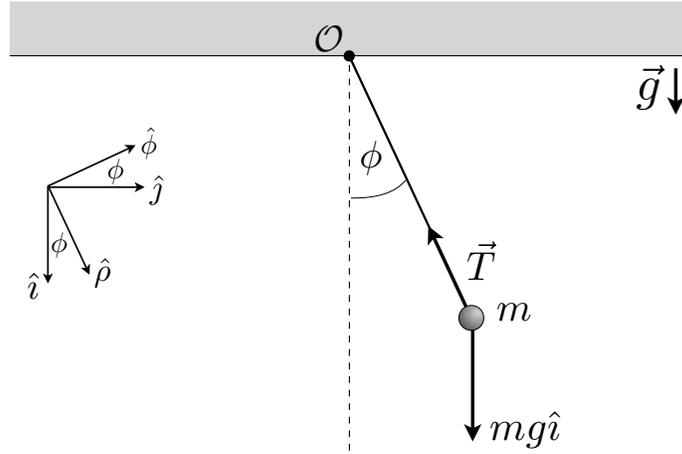
Pero gracias a la segunda ley de Newton podemos reemplazar  $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{tot}}$ , de donde obtenemos la siguiente relación entre momento angular y torque total:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_P = \vec{\tau}_P. \quad (2.165)$$

Debemos reconocer que esta es una relación obtenida gracias a la segunda ley de Newton. De hecho, puede ser pensada como una versión restringida de la segunda ley de Newton, donde el producto cruz elimina cantidades perpendiculares a  $\vec{r} - \vec{r}_P$ .

### 2.12.1 Ejemplo

Veamos un ejemplo sencillo de la utilidad de haber introducido momento angular y torque. Consideremos un péndulo ideal de largo  $L$  y masa  $m$  (ver siguiente figura).



La posición y velocidad de la masa  $m$  en coordenadas cilíndricas vienen dadas por  $\vec{r} = L\hat{\rho}$  y  $\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi}$ . Luego, el momento angular del péndulo con respecto al origen es:

$$\vec{L}_O = m(L\hat{\rho}) \times (L\dot{\phi}\hat{\phi}) = mL^2\dot{\phi}\hat{k}. \quad (2.166)$$

Por otro lado, las fuerzas actuando sobre la masa son la tensión  $\vec{T} = -T\hat{\rho}$  y la fuerza de gravedad  $mg\hat{i}$ . Luego, vemos que el torque debido a la tensión es nulo

$$\vec{\tau}_{O,T} = (L\hat{\rho}) \times (-T\hat{\rho}) = 0, \quad (2.167)$$

y solo debemos preocuparnos por el torque debido a la fuerza de gravedad, que viene dado por:

$$\vec{\tau}_{O,g} = (L\hat{\rho}) \times (mg\hat{i}) = -mgL \sin \phi \hat{k}. \quad (2.168)$$

Luego, utilizando la fórmula (2.165), obtenemos:

$$mL^2\ddot{\phi}\hat{k} = -mgL \sin \phi \hat{k}, \quad (2.169)$$

lo que nos conduce directamente a la ecuación de movimiento  $\ddot{\phi} + (g/L) \sin \phi = 0$ . Lo notable de este ejemplo es que no tuvimos que lidiar con la tensión. Al escoger el origen como punto fijo a partir del cual calcular el momento angular y el torque, decidimos, inadvertidamente, dejar fuera de nuestro análisis a la tensión

$\vec{T}$ . Debiera quedar claro que al contener un producto cruz, la ecuación (2.165) tiene menos información que la segunda ley de Newton, pero en este caso fue la información relevante para deducir la ecuación de movimiento del péndulo. Sin embargo, si nos interesa conocer la tensión de la cuerda, más nos vale utilizar la segunda ley de Newton en su versión original.

### 2.12.2 Momento angular y torque en sistemas con dos o más partículas

Notemos que podemos definir el momento angular y torque para sistemas con dos o más partículas. El momento angular (con respecto a un punto  $P$ ) para un sistema con dos partículas de masas  $m_1, m_2$ , etc... se define como

$$\vec{L}_P \equiv \vec{L}_P^1 + \vec{L}_P^2 + \dots \quad (2.170)$$

$$= m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \times \vec{v}_1 + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{v}_2 + \dots \quad (2.171)$$

De igual forma, el torque para (con respecto a un punto  $P$ ) para un sistema con dos partículas se define como

$$\vec{\tau}_P \equiv \vec{\tau}_P^1 + \vec{\tau}_P^2 + \dots \quad (2.172)$$

$$= \sum_a \vec{\tau}_{P,a}^1 + \sum_a \vec{\tau}_{P,a}^2 + \dots \quad (2.173)$$

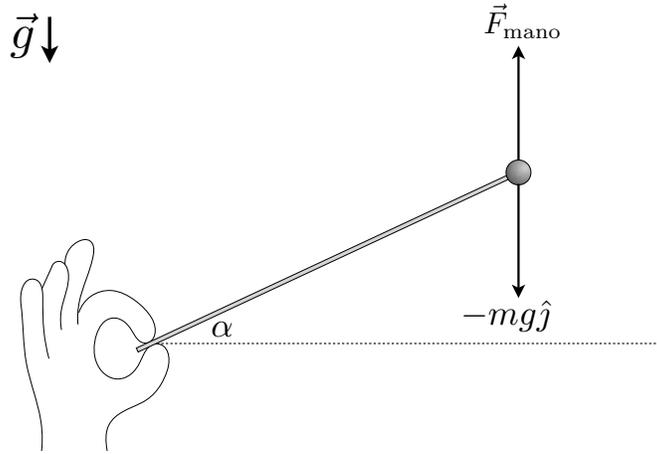
$$= \sum_a (\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_a^1 + \sum_a (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_a^2 + \dots \quad (2.174)$$

Dado que el momento angular y torque para cada partícula  $a$  satisfacen  $d\vec{L}_P^a/dt = \vec{\tau}_P^a$ , sigue que el momento angular y torque del sistema completo satisface

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_P = \vec{\tau}_P. \quad (2.175)$$

## 2.13 Varillas rígidas y torque

Una particularidad de las cuerdas es que estas están obligadas a doblarse, y por lo tanto no son capaces de resistirse al movimiento en torno al eje que sostiene uno de sus extremos. Las varillas rígidas, en cambio, pueden sostenerse rígidamente a partir de sus extremos. Por ejemplo, la siguiente figura muestra una situación estática en la cual una masa  $m$  es sostenida con la ayuda de una varilla de largo  $L$  y masa despreciable inclinada en un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje horizontal:



Las varillas, al contrario de las cuerdas (que están obligadas a doblarse), pueden transmitir fuerzas perpendiculares a la línea de la varilla. Por supuesto, las varillas están compuestas por una infinidad de partículas que se comunican entre sí para lograr esta proeza. Pero para entender esto en detalle, tendremos que esperar hasta la Sección 7.

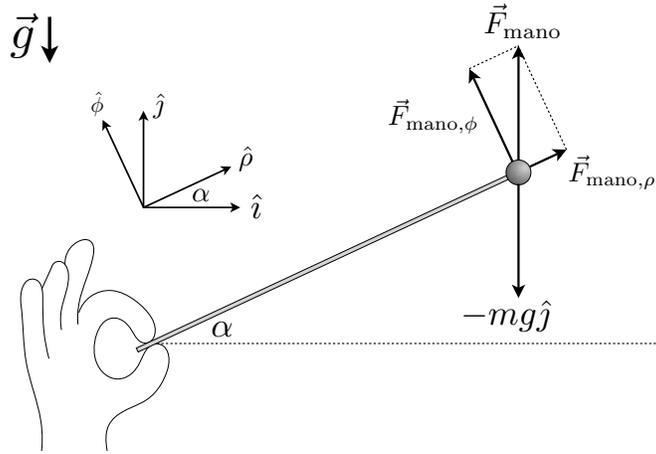
La varilla de la figura anterior transmite una fuerza  $\vec{F}_{\text{mano}}$  ejercida por la mano sobre la masa  $m$  que debe ser tal que la masa permanezca estática. Dado que la otra fuerza actuando sobre  $m$  es la fuerza de gravedad  $-mg\hat{j}$ , se debe cumplir  $\vec{F}_{\text{mano}} = mg\hat{j}$ . Notemos, por otro lado, que la fuerza ejercida por la mano puede ser descompuesta a lo largo de la base cilíndrica  $\hat{\rho}, \hat{\phi}$  definida de tal forma que  $\hat{\rho}$  apunte desde el contacto entre la mano y la varilla, hasta la masa  $m$ . La descomposición  $\vec{F}_{\text{mano}} = \vec{F}_{\text{mano},\rho} + \vec{F}_{\text{mano},\phi}$  en términos de la base cilíndrica resulta ser:

$$\vec{F}_{\text{mano},\rho} = mg \sin \alpha \hat{\rho}, \tag{2.176}$$

$$\vec{F}_{\text{mano},\phi} = mg \cos \alpha \hat{\phi}, \tag{2.177}$$

El término  $\vec{F}_{\text{mano},\rho}$  puede ser interpretado como una tensión, mientras que  $\vec{F}_{\text{mano},\phi}$  es una fuerza que se ejerce contra el sentido de rotación del eje donde la mano sostiene a la varilla.

El uso del torque nos permite entender con más detalle de qué manera se mantiene la situación estática anterior. Pensemos ahora en la varilla y la masa  $m$  como un sistema de muchas partículas. Todas las partículas de este sistema tienen masas despreciables, con excepción de la última partícula (en el extremo superior de la varilla) que tiene masa  $m$ . En esta perspectiva, la fuerza  $\vec{F}_{\text{mano}}$  que la varilla transmite hasta la partícula



es la fuerza que la última partícula de la varilla ejerce sobre la masa  $m$ . Ubiquemos el origen en el extremo inferior de la varilla, donde es sostenida por la mano. Las fuerzas externas al sistema son la fuerza de gravedad

$$\vec{F}_{gm} = -mg(\sin \alpha \hat{\rho} + \cos \alpha \hat{\phi}), \quad (2.178)$$

y la fuerza  $\vec{F}_{\text{mano}}$  que los dedos de la mano ejercen en el extremo inferior (en el origen). Luego, usando  $\hat{\rho} \times \hat{\rho} = 0$  y  $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k}$ , vemos que el torque total viene dado por

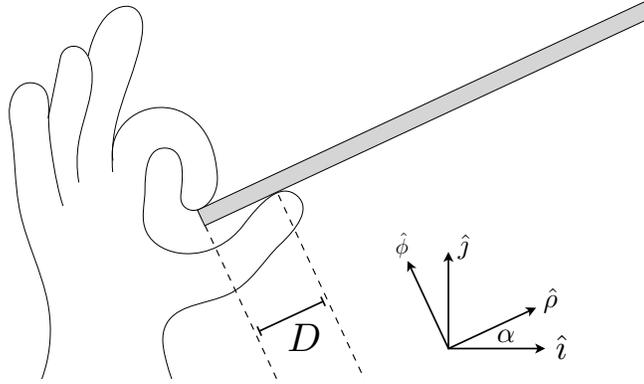
$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = -Lmg \cos \alpha \hat{k} + \vec{\tau}_{\mathcal{O},\text{dedos}}. \quad (2.179)$$

Por otro lado, dado que el sistema es estático, el momento angular es nulo, por lo que debe cumplirse  $\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = 0$ . Esto significa que la fuerza que ejercen los dedos sobre la varilla (o más exactamente, las partículas que constituyen la varilla) deben ser tal que:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O},\text{dedos}} = Lmg \cos \alpha \hat{k}. \quad (2.180)$$

Esto no es posible si todos los dedos ejercen fuerzas exactamente en el origen. Si así fuera, dado que el origen está a una distancia nula del origen, tendríamos que llegar a la conclusión que  $\vec{\tau}_{\mathcal{O},\text{dedos}} = 0$ . Luego, al menos uno de los dedos debe estar en contacto con la varilla cierta distancia del origen. Un ejemplo de como lograr esto viene representado por la siguiente figura:

En la figura, el dedo índice está en contacto con el extremo de la varilla (origen), mientras que el pulgar está en contacto con la varilla a cierta distancia  $D$  del origen. De esta forma, si el pulgar ejerce una fuerza  $\vec{F}_{\text{pulg}} = F_{\text{pulg}} \hat{\phi}$  (perpendicular a la varilla),



vemos que

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O},\text{dedos}} = D\hat{\rho} \times \vec{F}_{\text{indi}} = DF_{\text{pulg}}\hat{k}. \quad (2.181)$$

Luego, a partir de (2.180), vemos que

$$F_{\text{pulg}} = (L/D)mg \cos \alpha. \quad (2.182)$$

Ahora, ¿cuál es la fuerza  $\vec{F}_{\text{indi}}$  que el dedo índice debe ejercer sobre la varilla? Para descubrirlo, basta con notar que la fuerza externa total debe anularse  $F_{\text{tot}}^{\text{ext}} = 0$ . Esto implica que

$$\vec{F}_{\text{indi}} = -\frac{L}{D}mg \cos \alpha \hat{\phi} + mg(\sin \alpha \hat{\rho} + \cos \alpha \hat{\phi}) = 0. \quad (2.183)$$

Por supuesto, es posible constatar que  $\vec{F}_{\text{mano}} = \vec{F}_{\text{indi}} + \vec{F}_{\text{pulg}}$ .

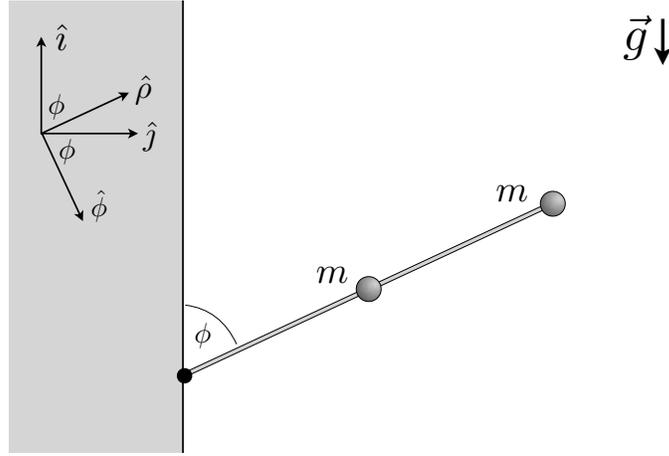
### 2.13.1 Ejemplo

El siguiente ejemplo puede ayudarnos a entender cómo lidiar con fuerzas transmitidas por varillas rígidas en el caso en donde hay movimiento. Consideremos dos masas  $m$  unidas a una varilla rígida sin masa de largo  $2D$ , tal como indica la siguiente figura.

La varilla de masa despreciable puede rotar libremente con respecto a una rótula fija a la pared. Deduzcamos la ecuación de movimiento que debe respetar el ángulo  $\phi$ . En coordenadas cilíndricas, las posiciones de ambas masas son:

$$\vec{r}_1 = D\hat{\rho}, \quad (2.184)$$

$$\vec{r}_2 = 2D\hat{\rho}. \quad (2.185)$$



Luego, las respectivas velocidades son:

$$\vec{v}_1 = D\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (2.186)$$

$$\vec{v}_2 = 2D\dot{\phi}\hat{\phi}. \quad (2.187)$$

A partir de estas cantidades cinemáticas, es posible ver que el momento angular del sistema (la varilla más las dos masas) con respecto a la rótula (el origen) viene dado por

$$\vec{L}_O = m(D\hat{\rho}) \times (D\dot{\phi}\hat{\phi}) + m(2D\hat{\rho}) \times (2D\dot{\phi}\hat{\phi}), \quad (2.188)$$

$$= 5D^2m\dot{\phi}\hat{k}, \quad (2.189)$$

donde usamos  $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k}$ . Por otro lado, las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son, respectivamente, la fuerza de gravedad actuando sobre la partícula 1, la fuerza de gravedad actuando sobre la partícula 2, y la fuerza que la pared ejerce sobre la varilla a través de la rótula:

$$\vec{F}_{g,1} = mg(\sin \phi \hat{\phi} - \cos \phi \hat{\rho}), \quad (2.190)$$

$$\vec{F}_{g,2} = mg(\sin \phi \hat{\phi} - \cos \phi \hat{\rho}), \quad (2.191)$$

$$\vec{F}_{\text{pared}} = F_{\text{pared}}^{\rho}\hat{\rho} + F_{\text{pared}}^{\phi}\hat{\phi}. \quad (2.192)$$

Con estas cantidades, podemos calcular el torque sobre el sistema con respecto al origen:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= Dmg\hat{\rho} \times (\sin \phi \hat{\phi} - \cos \phi \hat{\rho}) + 2Dmg\hat{\rho} \times (\sin \phi \hat{\phi} - \cos \phi \hat{\rho}) + \vec{0} \times \vec{F}_{\text{pared}}, \\ &= 3Dmg \sin \phi \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Luego, usando  $d\vec{L}_O = \vec{r}_O$ , obtenemos:

$$\ddot{\phi} - \frac{3}{5} \frac{g}{D} \sin \phi = 0. \quad (2.194)$$

Notemos que al calcular el torque con respecto al origen, donde está la rótula, perdemos información sobre la fuerza que la pared ejerce sobre la varilla. Sin embargo, podemos reconstruir esta información al recordar que  $M_{\text{tot}} \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{tot}}$ . La posición del centro de masa es  $\vec{r}_{CM} = (3/2)D\hat{\rho}$  y, por lo tanto, la aceleración es  $\vec{a}_{CM} = (3/2)D(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho})$ . Luego, la segunda ley de Newton para el sistema completo es:

$$2m\frac{3}{2}D(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = 2mg(\sin \phi \hat{\phi} - \cos \phi \hat{\rho}) + F_{\text{pared}}^{\rho}\hat{\rho} + F_{\text{pared}}^{\phi}\hat{\phi}. \quad (2.195)$$

De esta manera, usando (2.194), obtenemos

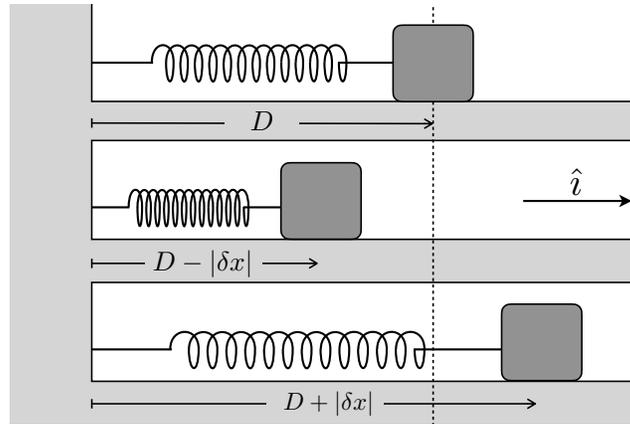
$$F_{\text{pared}}^{\rho} = 2mg \cos \phi - 3mD\dot{\phi}^2, \quad (2.196)$$

$$F_{\text{pared}}^{\phi} = -\frac{1}{5}mg \sin \phi. \quad (2.197)$$

Así, vemos que la pared no solo ejerce una fuerza a lo largo de la línea en la cual se extiende la varilla, sino que también en la dirección perpendicular a la varilla. Dado que  $F_{\text{pared}}^{\phi}$  es negativa, vemos que  $F_{\text{pared}}^{\phi}$  evita que la varilla se desprenda de la pared.

## 2.14 Ley de Hooke (resortes)

Muchos objetos, o sistemas, tienden a restituir su configuración inicial después de ser deformados. Los resortes, por ejemplo, suelen tener un largo natural, y al ser comprimidos o estirados, intentan volver a su largo natural. Para modelar el comportamiento de un resorte (u otros objetos elásticos) podemos usar la ley de Hooke, que establece que la magnitud de la fuerza necesaria para deformar un resorte debe ser proporcional al tamaño de la deformación. Para ser concretos, consideremos el ejemplo de la siguiente figura: Un bloque de masa  $m$  sobre una superficie lisa unida a una pared mediante un resorte.



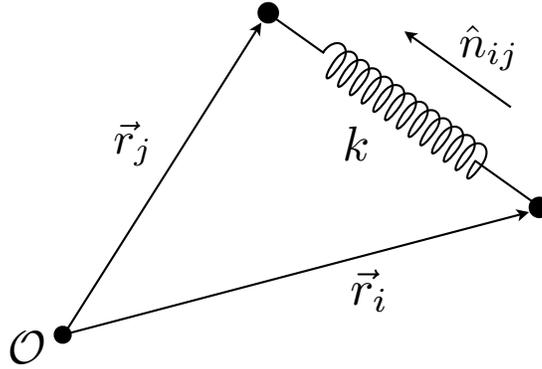
Si medimos la posición del bloque con respecto a la pared a través de la coordenada  $x$ , entonces el resorte estará en su configuración natural (es decir, aquella donde el resorte no está deformado) cuando  $x = D$ . Supongamos que ejercemos una fuerza  $\vec{F}$  sobre el bloque hacia la izquierda (es decir en la dirección  $-\hat{i}$ ), de tal forma que el resorte se comprima en una longitud  $|\delta x|$ . Luego, de acuerdo a la Ley de Hooke, la magnitud necesaria de dicha fuerza para mantener el resorte comprimido en la posición  $x = D - |\delta x|$  debe ser proporcional a  $|\delta x|$ . Es decir  $||\vec{F}|| \propto |\delta x|$ , o mejor aún  $\vec{F} = -\hat{i}k|\delta x|$ , donde  $k$  es la constante elástica del resorte, que determina qué tan rígido o elástico es un resorte. Evidentemente, mientras mantenemos el resorte comprimido, la pared ejerce una fuerza sobre el bloque a través del resorte. Llamemos a esta fuerza  $\vec{F}_{pb}$ . Gracias a la tercera ley de Newton, sabemos que esta fuerza es  $\vec{F}_k = k|\delta x|\hat{i}$  o, usando  $\delta x = D - x$ :

$$\vec{F}_{pb} = -k(x - D)\hat{i}. \quad (2.198)$$

Podemos repetir este análisis para el caso en que aplicamos una fuerza  $\vec{F}$  con el propósito de estirar el resorte una distancia  $|\delta x|$ . En tal caso la Ley de Hooke establece

que la fuerza necesaria para mantener al resorte en la posición  $x = D + |\delta x|$  es  $\vec{F} = \hat{i}k|\delta x|$ . Luego, la tercera ley de Newton nos revela que la pared ejerce una fuerza  $\vec{F}_{pb} = -k|\delta x|\hat{i}$  sobre el bloque a través del resorte. Reemplazando  $|\delta x| = x - D$ , vemos que nuevamente obtenemos (2.198).

La expresión (2.198) puede ser generalizada. Consideremos dos partículas (o agentes) ubicados en posiciones  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$ , unidos a través de un resorte de largo natural  $D$ , y constante elástica  $k$ , tal como lo muestra la siguiente figura:



Entonces, de acuerdo a la Ley de Hooke, la fuerza que la partícula  $i$  ejerce sobre la partícula  $j$  será

$$\vec{F}_{ij} = -k (|\vec{r}_i - \vec{r}_j| - D_0) \hat{n}_{ij}, \quad (2.199)$$

donde  $\hat{n}_{ij}$  es el vector unitario que apunta desde  $\vec{r}_i$  a  $\vec{r}_j$ :

$$\hat{n}_{ij} \equiv -\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (2.200)$$

Notemos que, efectivamente, si  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| > D_0$ , el resorte es estirado, y la fuerza que  $i$  ejerce sobre  $j$  es atractiva (hacia  $-\hat{n}_{ij}$ ). En el caso contrario,  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| < D_0$ , el resorte es contraído, y la fuerza que  $i$  ejerce sobre  $j$  es repulsiva (hacia  $+\hat{n}_{ij}$ ).

Por último, notemos que los resortes son oscilatorios por naturaleza. En la configuración de la sección anterior (masa conectada a la pared a través de un resorte), si desplazamos a la masa desde la posición  $x = D$ , y luego la liberamos, ésta empezará a describir un movimiento que respeta la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 D, \quad (2.201)$$

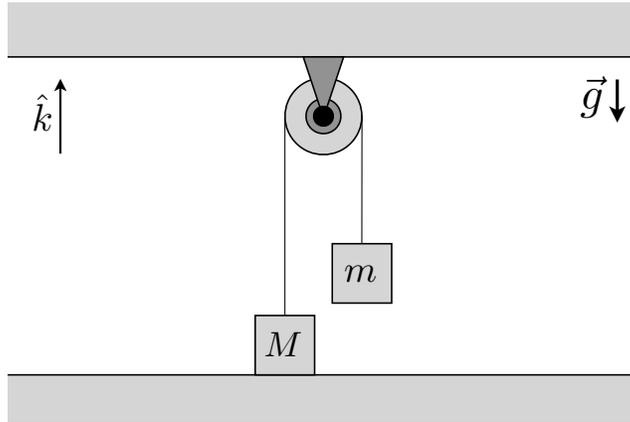
donde  $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ . Si redefinimos  $y = x - D$ , vemos que recobramos la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad (2.202)$$

Como ya hemos visto, las soluciones de esta ecuación son oscilatorias en torno a la posición de equilibrio  $y = 0$  (que corresponde a  $x = D$ ).

## 2.15 Una segunda mirada al rol de las poleas

En realidad las poleas son agentes también (agentes encubiertos). En el primer ejemplo de la Sección 2.11, si consideramos a la polea como un tercer agente, entonces, de acuerdo a la tercera ley de Newton, ésta ejerce una fuerza sobre las masas  $m$  y  $M$  (en la dirección  $\hat{k}$ ) y éstas ejercen una fuerza sobre la polea con la misma magnitud, pero en la dirección contraria (dirección  $-\hat{k}$ ). La polea es un dispositivo capaz de mantener la cuerda con una tensión homogénea ( $T$  es la misma en cualquier punto de la cuerda). Luego, las dos masas ejercen la misma fuerza sobre la polea en la dirección  $-\hat{k}$  (ver siguiente figura).



Veamos el detalle: Los agentes que actúan sobre la masa  $M$  son la tierra (a través de la fuerza de gravedad), el suelo (a través de una fuerza normal), y la polea (a través de la cuerda del lado izquierdo de la polea, con tensión  $T$ ). De esta forma, la fuerza total que actúa sobre  $M$  es:

$$\vec{F}_{M,\text{tot}} = -Mg\hat{k} + N\hat{k} + T\hat{k}. \quad (2.203)$$

Por su parte, los agentes que actúan sobre la masa  $m$  son la tierra (a través de la fuerza de gravedad), y la polea (a través de la cuerda del lado derecha de la polea,

con tensión  $T$ ). Luego, la fuerza total que actúa sobre  $m$  es:

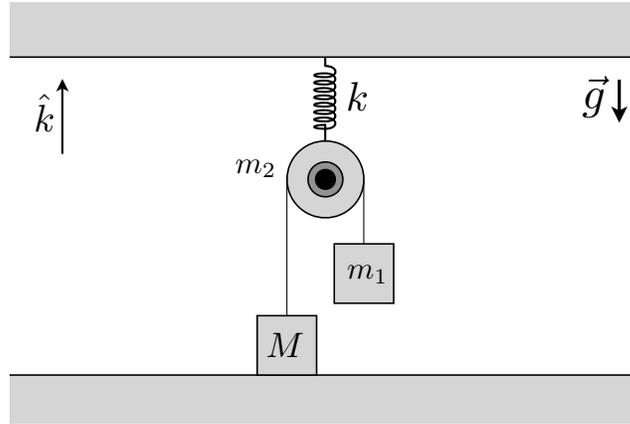
$$\vec{F}_{m,\text{tot}} = -mg\hat{k} + T\hat{k}. \quad (2.204)$$

Finalmente los agentes que actúan sobre la polea son las dos masas, que lo hacen a través de las cuerdas (ambas con tensión  $T$ ). De esta manera, la fuerza que ejercen las masas sobre la polea es:

$$\vec{F}_{\text{masas,polea}} = \vec{F}_{m,\text{polea}} + \vec{F}_{M,\text{polea}} = -2T\hat{k}. \quad (2.205)$$

Como vemos, si incluimos a la polea como un tercer agente, las masas  $m$  y  $M$  no se influncian directamente, sino que lo hacen a través de la polea.

Esta perspectiva nos permite lidiar con problemas interesantes donde la polea es una componente dinámica del sistema. En el siguiente ejemplo, la polea tiene una masa  $m_2$  y permanece conectada al techo mediante un resorte de constante elástica  $k$  y largo natural  $D = 0$ . La masa  $m$  de la figura anterior ahora es  $m_1$ .



Establezcamos la ecuación de movimiento para la altura  $z$  de la masa  $m_1$ , suponiendo que la masa  $M$  no se despegue del suelo (¿cuál es la condición para que esto no ocurra?). Para ello, supongamos que el largo de la cuerda es  $L$ , y la altura del techo es  $h$ . Las posiciones de  $m_1$  y  $m_2$ , con respecto al suelo, son

$$\vec{r}_1 = z_1\hat{k}, \quad (2.206)$$

$$\vec{r}_2 = z_2\hat{k}. \quad (2.207)$$

Sin embargo, es posible ver que  $L = 2z_2 - z_1$ , y por lo tanto podemos escribir ambas posiciones en términos de una sola coordenada

$$\vec{r}_1 = z_1\hat{k}, \quad (2.208)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{2}(L + z_1)\hat{k}. \quad (2.209)$$

Luego, las aceleraciones de ambas masas son

$$\vec{a}_1 = \ddot{z}_1 \hat{k}, \quad (2.210)$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{2} \ddot{z}_1 \hat{k}. \quad (2.211)$$

Veamos ahora las fuerzas. Los agentes que actúan sobre  $m_1$  son la masa  $m_2$  (a través de la cuerda) con una fuerza  $\vec{F}_{21} = T\hat{k}$ , y la Tierra (a través de su atracción gravitacional) con una  $\vec{F}_{g1} = -m_1g\hat{k}$ . Sobre la masa  $M$  actúan el suelo, con una fuerza normal  $\vec{N} = N\hat{k}$ , la Tierra, con una fuerza de gravedad  $\vec{F}_{gM} = -Mg\hat{k}$  y la masa  $m_2$  (a través de la cuerda) con una fuerza  $\vec{F}_{2M} = T\hat{k}$ . Finalmente, sobre la polea (de masa  $m_2$ ) actúan el techo (a través del resorte) con una fuerza  $\vec{F}_{tp} = k(h - z_2)\hat{k}$ , la Tierra, con una fuerza  $\vec{F}_{g2} = -m_2g\hat{k}$  y las masas  $M$  y  $m_1$ , ambas a través de la cuerda, con fuerzas determinadas por la tercera ley de Newton  $\vec{F}_{12} = -T\hat{k}$  y  $\vec{F}_{M2} = -T\hat{k}$ . Luego las ecuaciones de movimiento debido a la segunda ley de Newton son

$$m_1 \ddot{z}_1 = T - m_1 g, \quad (2.212)$$

$$0 = N - Mg + T, \quad (2.213)$$

$$m_2 \frac{1}{2} \ddot{z}_1 = k \left[ h - \frac{1}{2}(L + z_1) \right] - m_2 g - 2T. \quad (2.214)$$

Juntando la primera y tercera ecuación, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{z}_1 + \frac{k}{4m_1 + m_2} z_1 = \frac{k(2h - L)}{4m_1 + m_2} - \frac{4m_1 + 2m_2}{4m_1 + m_2} g, \quad (2.215)$$

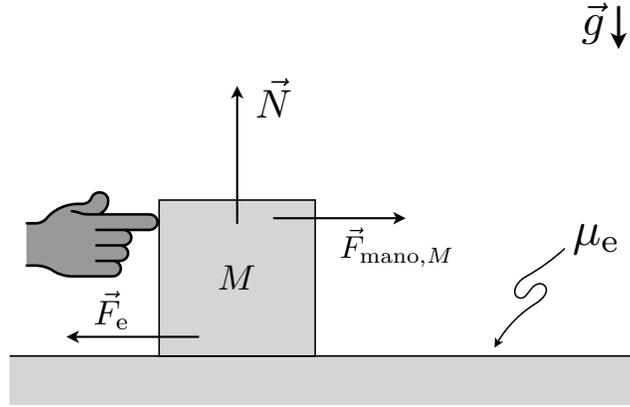
la que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico. ¿Cuál es la configuración de equilibrio estático?

## 2.16 Fuerzas de roce estático

Hasta el momento hemos analizado situaciones donde las superficies son lisas, y por lo tanto no oponen resistencia al movimiento de las masas a lo largo de ellas. Sin embargo, gracias a la rugosidad de las superficies, el contacto entre un objeto con éstas inevitablemente involucrará una resistencia al movimiento, que llamaremos roce, y que se manifestará en forma de fuerza. Comencemos analizando la fuerza de roce estático.

Notemos lo siguiente: al empujar un objeto de masa  $M$  en reposo sobre una superficie horizontal, con una fuerza  $\vec{F}_{\text{mano},M}$  muy pequeña, éste no se moverá. Esto

necesariamente se debe al contacto entre la superficie y el objeto en reposo (con respecto a la superficie). Luego, el objeto permanece en reposo debido a una fuerza  $\vec{F}_e$  que la superficie ejerce sobre el objeto, de igual magnitud pero dirección opuesta a la fuerza aplicada por nosotros. Es decir  $\vec{F}_e = -\vec{F}_{\text{mano},M}$  (ver siguiente figura).

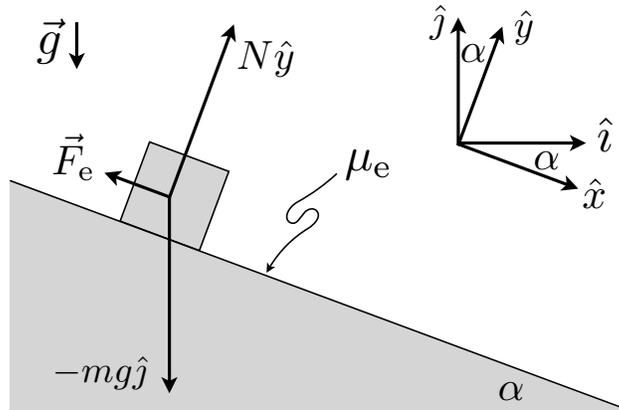


A la fuerza  $\vec{F}_e$  que la superficie ejerce sobre el objeto la llamaremos fuerza de roce estático. Para que el objeto comience a moverse, debemos aumentar la fuerza aplicada, y la magnitud de ésta deberá ser superior a cierto umbral  $\|\vec{F}_e^{(\text{max})}\|$ . Naturalmente, este umbral dependerá de qué tan intenso es el contacto entre la superficie y el objeto. Pero recordemos que la intensidad de el contacto entre la superficie y el objeto está capturada por la fuerza normal  $\vec{N}$ . Por ejemplo, si la magnitud de la normal es cero ( $\|\vec{N}\| = 0$ ), entonces no hay contacto entre la superficie y el objeto, y la superficie no puede oponerse al movimiento causado al empujar al objeto. Luego, es de esperar que  $\|\vec{F}_e^{(\text{max})}\|$  sea una función de  $\|\vec{N}\|$  tal que  $\|\vec{F}_e^{(\text{max})}\| = 0$  cuando  $\|\vec{N}\| = 0$ . Experimentalmente, es posible comprobar que la siguiente relación es suficientemente buena para determinar  $\|\vec{F}_e^{(\text{max})}\|$  en términos de  $\|\vec{N}\|$ :

$$\|\vec{F}_e^{(\text{max})}\| = \mu_e \|\vec{N}\|, \quad (2.216)$$

donde  $\mu_e$  es el coeficiente de roce estático, que caracteriza el contacto entre la superficie y el objeto.

Más generalmente, la fuerza de roce ejercida por la superficie sobre un objeto en reposo en contacto con ella será siempre tangencial a la superficie, y se opondrá a cualquier otra fuerza que pueda poner a dicho objeto en movimiento. Por ejemplo, en la situación de la siguiente figura, contamos con un bloque de masa  $m$  en reposo sobre un plano inclinado en un ángulo  $\alpha$ .



El suelo ejerce una fuerza normal  $\vec{N} = N\hat{y}$  que evita que el bloque le traspase, pero también ejerce una fuerza  $\vec{F}_e = -F_e\hat{x}$ , tangencial a la superficie, que evita que el bloque inicie el movimiento. Dado que el bloque está en reposo, la tercera segunda ley de Newton adquiere la forma

$$0 = N\hat{y} - F_e\hat{x} - mg\hat{j}. \quad (2.217)$$

Reemplazando  $j = \cos\alpha\hat{y} - \sin\alpha\hat{x}$ , obtenemos

$$N = mg \cos \alpha, \quad (2.218)$$

$$F_e = mg \sin \alpha. \quad (2.219)$$

Luego, dado que  $\|\vec{F}_e\| \leq \|\vec{F}_e^{\max}\|$  a partir de (2.216), es directo ver que

$$\tan \alpha \leq \mu_e. \quad (2.220)$$

En consecuencia, existe un ángulo máximo  $\alpha_{\max} = \arctan \mu_e$  para el cual el bloque permanecerá en reposo sobre el plano. Esta relación nos provee de una forma de determinar  $\mu_e$ : Simplemente podemos inclinar el plano hasta que el bloque comience a desplazarse.

## 2.17 Fuerzas de roce cinético

Evidentemente, una superficie ofrece resistencia al movimiento de un objeto en el sentido opuesto a su movimiento. Esto lo hará a través de una fuerza con la dirección

opuesta a la velocidad del objeto. Es decir

$$\vec{F}_c \propto -\hat{v} \quad (2.221)$$

donde  $\hat{v} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$  es el vector unitario que denota la dirección de la velocidad del objeto en cuestión. Además, la magnitud de  $\vec{F}_c$  debiera depender de qué tan intenso es el contacto entre la superficie y el objeto. Esto significa la magnitud  $\|\vec{F}_c\|$  debe ser una función de  $\|\vec{N}\|$  tal que  $\|\vec{F}_c\| = 0$  si  $\|\vec{N}\| = 0$ . Similar al caso de la fuerza máxima  $\|\vec{F}_e^{\max}\|$  (visto en la sección anterior), una expresión sencilla que cumple con estas condiciones es:

$$\vec{F}_c = -\mu_c \|\vec{N}\| \hat{v}, \quad (2.222)$$

donde  $\mu_c$  es el coeficiente de roce cinético. Notemos que necesariamente se debe cumplir

$$\mu_c \leq \mu_e. \quad (2.223)$$

Si no fuera así, tendríamos  $\|\vec{F}_c\| > \|\vec{F}_e^{\max}\|$ , y en el mismo instante que el objeto comenzara a moverse, el suelo ejercería de golpe una fuerza sobre éste aún mayor que la que aplicaba durante el reposo (impidiendo su movimiento). Esto, de hecho, lo corrobora la experiencia: Tan pronto somos capaces de poner en movimiento un objeto pesado sobre una superficie, la resistencia de este al movimiento disminuye, y podemos aplicar una fuerza menor a la inicial, para mantener el movimiento.

Veamos un primer ejemplo involucrando roce cinético. Consideremos el ejemplo del plano inclinado de la Sección 2.16, y supongamos que el bloque se mueve en la dirección  $\hat{x}$ . Es decir  $\hat{v} = \hat{x}$ . Luego, la segunda ley de Newton adquiere la forma:

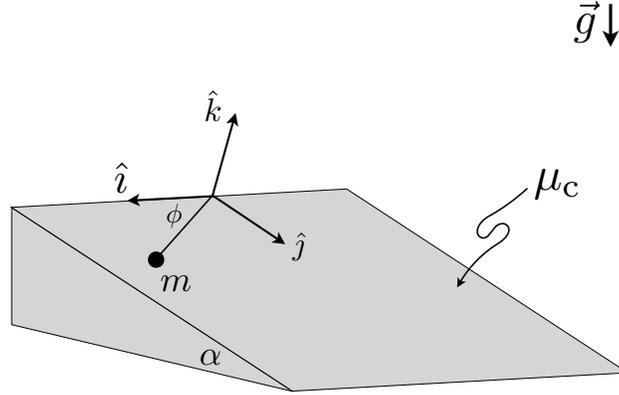
$$m \ddot{x} \hat{x} = N \hat{y} - \mu_c N \hat{x} - mg \hat{j}. \quad (2.224)$$

Como consecuencia,  $N = mg \cos \alpha$ , y la ecuación de movimiento describiendo el desplazamiento del bloque a lo largo del plano inclinado es:

$$\ddot{x} = g(\tan \alpha - \mu_c) \cos \alpha. \quad (2.225)$$

De este modo, si  $\tan \alpha < \mu_c$ , entonces el bloque se frenará hasta llegar al reposo. De otro modo, este continuará descendiendo por el plano.

Veamos un segundo ejemplo. Consideremos un péndulo de largo  $L$  y masa  $m$  sobre un plano inclinado en un ángulo  $\alpha$ , tal como lo muestra la siguiente figura:



Entre el plano y el péndulo hay un coeficiente de roce cinético  $\mu_c$ . Supongamos que el péndulo comienza desde el reposo con un ángulo  $\phi = 0$ , y determinemos el ángulo  $\phi_*$  para el cual el péndulo se detiene (notemos que se debe cumplir  $\tan \alpha > \mu_c$  para que el péndulo comience a moverse desde el reposo).

Para proceder, describamos la posición del péndulo mediante coordenadas cilíndricas  $\vec{r} = L\hat{\rho}$ . Luego, la velocidad y aceleración de la masa serán:

$$\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad (2.226)$$

$$\vec{a} = L(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) \quad (2.227)$$

De aquí vemos que  $\hat{v} = \hat{\phi}$ . Por otro lado, las fuerzas actuando sobre la masa son la normal  $\vec{N} = N\hat{k}$ , la fuerza de gravedad  $\vec{F}_g = mg(\sin \alpha \hat{j} - \cos \alpha \hat{k})$ , la tensión de la cuerda  $\vec{T} = -T\hat{\rho}$ , y la fuerza de roce cinético  $\vec{F}_c = -\mu_c \|\vec{N}\| \hat{\phi}$ . Por lo tanto, la segunda ley de Newton nos entrega:

$$mL(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = N\hat{k} + mg(\sin \alpha \hat{j} - \cos \alpha \hat{k}) - T\hat{\rho} - \mu_c N \hat{\phi}. \quad (2.228)$$

Dado que  $\hat{j} = \cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho}$ , finalmente obtenemos

$$mL(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = N\hat{k} + mg(\sin \alpha(\cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho}) - \cos \alpha \hat{k}) - T\hat{\rho} - \mu_c N \hat{\phi}. \quad (2.229)$$

Las tres ecuaciones escalares obtenidas a partir de esta ecuación vectorial son

$$mL\ddot{\phi} = mg \sin \alpha \cos \phi - \mu_c N, \quad (2.230)$$

$$T = mg \sin \alpha \sin \phi + mL\dot{\phi}^2, \quad (2.231)$$

$$N = mg \cos \alpha. \quad (2.232)$$

Reemplazando  $N = mg \cos \alpha$  en la primera ecuación, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{L} \sin \alpha \cos \phi - \mu_c \frac{g}{L} \cos \alpha. \quad (2.233)$$

Esta puede ser integrada una vez: Multiplicando la expresión anterior por  $\dot{\phi}$  y utilizando  $d(\dot{\phi}^2)/dt = 2\dot{\phi}\ddot{\phi}$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{L} \sin \alpha \sin \phi + \mu_c \frac{g}{L} \cos \alpha \phi \right) = 0. \quad (2.234)$$

Luego, se debe cumplir

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{L} \sin \alpha \sin \phi + \mu_c \frac{g}{L} \cos \alpha \phi = C, \quad (2.235)$$

donde  $C$  es una constante de integración. Para determinar su valor basta evaluar la expresión anterior para  $t = 0$ , donde  $\phi = 0$  y  $\dot{\phi} = 0$ , con lo cual se obtiene  $C = 0$ . Este paso nos permite encontrar que la velocidad angular del péndulo viene dada por

$$\dot{\phi}^2 = 2 \frac{g}{L} \sin \alpha \sin \phi - 2 \mu_c \frac{g}{L} \cos \alpha \phi. \quad (2.236)$$

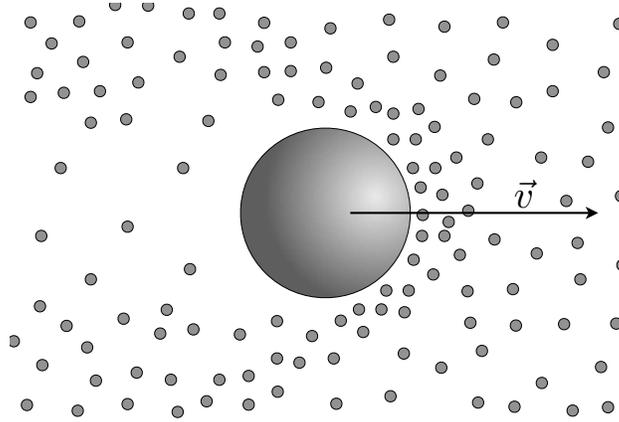
A parte de la situación inicial  $\phi = 0$ , la rapidez angular será cero cuando los dos términos del lado derecho se anulen mutuamente. Esta cancelación permite calcular el ángulo  $\phi_*$  a partir de la siguiente ecuación algebraica:

$$\mu_c \phi_* = \tan \alpha \sin \phi_*, \quad (2.237)$$

la que puede ser resuelta numéricamente.

## 2.18 Fuerzas de roce viscoso

Consideremos ahora la resistencia ofrecida por un medio viscoso, como el aire o el agua, sobre un objeto en movimiento inmerso en éste. El medio consiste en una infinitud de partículas microscópicas (que no podemos ver a simple vista). Por lo tanto, al estar en movimiento, el objeto debe abrirse paso desplazando estas partículas, tal como lo muestra la siguiente ilustración:



Al avanzar, las partículas colisionan con el objeto, y con cada colisión el objeto pierde velocidad (desacelera). Lo crucial está en notar que mientras más rápido avanza el objeto, habrá un mayor número de colisiones por unidad de tiempo y, por lo tanto, su velocidad disminuirá más rápidamente (una mayor desaceleración). Macroscópicamente, todo esto debe traducirse en una fuerza de roce viscoso  $\vec{F}_{\text{vis}}$  ejercida por el medio, con una dirección opuesta a la velocidad de propagación de la partícula (es decir  $\vec{F}_{\text{vis}} \propto -\hat{v}$ ), y con una magnitud tal que  $\|\vec{F}_{\text{vis}}\| = 0$  si  $\nu \equiv \|\vec{v}\| = 0$ , y que aumente en la medida que  $\nu$  crezca. El candidato más sencillo para  $\vec{F}_{\text{vis}}$  satisfaciendo estas condiciones es

$$\vec{F}_{\text{vis}} = -c\vec{v}, \quad (2.238)$$

donde  $c > 0$  es el coeficiente de roce viscoso. En general, esta fórmula falla para velocidades grandes, y hay que considerar correcciones como  $\vec{F}_{\text{vis}} = -c\vec{v} - c_{\text{cor}}\hat{v}\nu^2$ . En este curso no nos preocuparemos por tales correcciones.

Veamos un primer ejemplo de una partícula de masa  $m$  inmersa en un medio viscoso con coeficiente de roce  $c$ , cayendo desde el reposo a partir de una altura  $h$ . En dicho caso, podemos describir la posición de la partícula a través del vector  $\vec{r} = z\hat{k}$ . La fuerza de gravedad es  $\vec{F}_g = -mg\hat{k}$  y la fuerza de roce viscoso actuando sobre

la partícula es  $\vec{F}_{\text{vis}} = -c\dot{z}\hat{k}$ . Es directo comprobar que la ecuación de movimiento describiendo tal situación es

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + g = 0. \quad (2.239)$$

Esta ecuación tiene la forma  $\dot{v} + cv/m + g = 0$ , donde  $v \equiv \dot{z}$ , la que puede ser resuelta por  $v = Ae^{-ct} - \frac{mg}{c}$ , donde  $A$  es una constante de integración. Inicialmente la partícula está en reposo. Por lo tanto, en  $t = 0$  se debe cumplir  $A = mg/c$ , de donde obtenemos

$$\dot{z} = \frac{mg}{c}(e^{-ct/m} - 1). \quad (2.240)$$

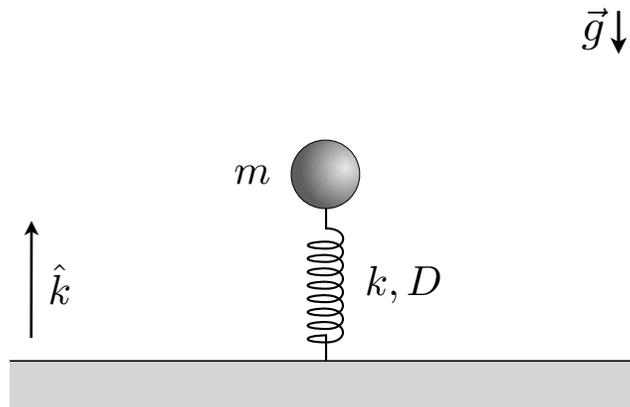
Integrando este resultado, finalmente obtenemos

$$z(t) = h - \frac{mg}{c} \left[ t - \frac{m}{c}(1 - e^{-ct/m}) \right]. \quad (2.241)$$

Notemos que para tiempos grandes (mucho mayores a  $m/c$ ), la rapidez  $\nu = |\dot{z}|$  de la partícula tiende asintóticamente a una constante  $\nu_{\infty} \equiv mg/c$ , que se denomina la velocidad límite. Bajo condiciones normales, un paracaidista alcanza una velocidad límite de 55m/s.

## 2.19 Oscilador armónico amortiguado

Analicemos una instancia en la cual el roce viscoso juega un rol relevante. Consideremos una partícula de masa  $m$  inmersa en un medio viscoso, conectada con el suelo a través de un resorte de constante elástica  $k$  y largo natural  $D$ .



Escribamos la posición de la partícula de la forma  $\vec{r} = z\hat{k}$ . Luego, las fuerzas actuando sobre la partícula son: la fuerza de gravedad es  $\vec{F}_g = -mg\hat{k}$ , la fuerza que ejerce el

suelo a través del resorte  $\vec{F}_{\text{suelo}} = -k(z - D)\hat{k}$ , y la fuerza de roce viscoso  $\vec{F}_{\text{vis}} = -c\dot{z}\hat{k}$ . Luego, la ecuación de movimiento proveniente de la segunda ley de Newton es:

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \left(\frac{k}{m}D - g\right). \quad (2.242)$$

Vemos que esta ecuación es idéntica a la ecuación (2.91), analizada en la Sección 2.9, con las sustituciones  $\gamma = c/2m$ ,  $\sigma = k/m$  y  $f_0 = kD/m - g$ . Luego, vemos que la configuración de equilibrio se logra cuando la masa está a una altura

$$z_e = D - g\frac{m}{k}. \quad (2.243)$$

Es decir, en equilibrio estático, la fuerza gravitacional mantiene el resorte comprimido. Luego, siguiendo los métodos desarrollados en la Sección 2.9, podemos obtener soluciones para los tres casos relevantes  $c^2/4m^2 < k/m$ ,  $c^2/4m^2 > k/m$  y  $c^2/4m^2 = k/m$ .

### 2.19.1 Oscilador sub-amortiguado

Si  $c^2/4m^2 < k/m$ , la solución general de (2.242) adquiere la forma

$$z(t) = z_e + e^{-\gamma(t-t_0)} [(z_0 - z_e)] \cos [\Omega(t - t_0)] \\ + \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t_0)} \left[ \dot{z}_0 + \frac{c}{2m} (z_0 - z_e) \right] \sin [\Omega(t - t_0)], \quad (2.244)$$

donde  $\gamma = c/2m$  y  $\Omega = \sqrt{k/m - c^2/4m^2} > 0$ . Vemos que la partícula oscila en torno a  $z_e$  pero, con el paso del tiempo, las amplitud de dichas oscilaciones se va atenuando.

### 2.19.2 Oscilador sobre-amortiguado

Si  $c^2/4m^2 > k/m$ , la solución general está dada por

$$z(t) = z_e + e^{-\gamma(t-t_0)} [(z_0 - z_e)] \cosh [\Omega(t - t_0)] \\ + \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t_0)} [\dot{z}_0 + \gamma (z_0 - z_e)] \sinh [\Omega(t - t_0)], \quad (2.245)$$

donde  $\gamma = c/2m$  y  $\Omega = \sqrt{c^2/4m^2 - k/m} > 0$ . Dado que  $\frac{c}{2m} > \Omega$  se tiene los dos últimos términos del lado derecho convergen a 0, sin oscilaciones. Luego, en este caso, el roce viscoso es lo suficientemente intenso como para evitar que hayan oscilaciones.

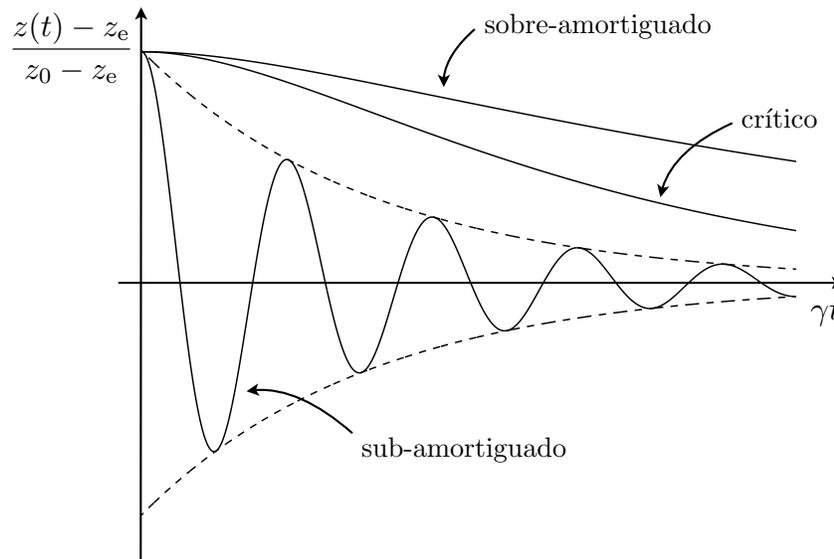
### 2.19.3 Oscilador amortiguado crítico

Si  $c^2/4m^2 = k/m$ , obtenemos el caso crítico entre ambas soluciones anteriores. Este viene dado por:

$$z(t) = x_e + e^{-\gamma(t-t_0)} (z_0 - z_e) + e^{-\gamma(t-t_0)} [\dot{z}_0 + \gamma(z_0 - z_e)] (t - t_0), \quad (2.246)$$

donde  $\gamma = c/2m$ . Notemos que en este caso el segundo término, además del factor  $e^{-\gamma(t-t_0)}$ , tiene una dependencia lineal en el tiempo.

La siguiente figura muestra la función  $(z(x) - z_e)/(z_0 - z_e)$  versus  $\gamma t$ , para los tres casos anteriores con la condición inicial  $\dot{z}_0 = 0$ , y los valores  $k/m - \gamma^2 = 100\gamma^2$  (caso sub-amortiguado),  $\gamma^2 - k/m = 0.5\gamma^2$  (caso sobre-amortiguado), y  $\gamma^2 - k/m = 0$  (caso crítico).



La línea entrecortada muestra la envolvente del caso sub-amortiguado, dada por la función  $e^{-\gamma t} \sqrt{1 - \gamma^2/\Omega^2}$  con  $\Omega^2 = k/m - \gamma^2$ . Notemos que los tres casos comparten el mismo coeficiente de roce a través del parámetro  $\gamma = c/2m$ , pero difieren en su valor del coeficiente de elasticidad  $k$ .

## 2.20 Sistemas con dos partículas y masa reducida

Consideremos un sistema con dos partículas 1 y 2 de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. La partícula 2 ejerce una fuerza  $\vec{F}_{21}$  sobre 1, y la partícula 1 ejerce una fuerza  $\vec{F}_{12} =$

$-\vec{F}_{21}$  sobre 1. Sobre estas partículas también pueden actuar fuerzas externas  $\vec{F}_1^{(\text{ext})}$  y  $\vec{F}_2^{(\text{ext})}$ . De acuerdo a la segunda ley de Newton, las ecuaciones de movimiento para ambas partículas son

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{(\text{ext})}, \quad (2.247)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2 = -\vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{(\text{ext})}. \quad (2.248)$$

Si ahora sumamos ambas ecuaciones, las fuerzas  $\vec{F}_{21}$  y  $-\vec{F}_{21}$  se cancelan, y obtenemos la ecuación

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\text{CM}} = \vec{F}_1^{(\text{ext})} + \vec{F}_2^{(\text{ext})}, \quad (2.249)$$

donde hemos definido a la masa total  $M$  como  $M = m_1 + m_2$ , y a la posición de centro de masa  $\vec{r}_{\text{CM}}$  como

$$\vec{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2). \quad (2.250)$$

Por otro lado, si multiplicamos (2.247) por  $1/m_1$  y le restamos (2.248) multiplicada por  $1/m_2$ , es posible obtener:

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \Delta \vec{r} = \vec{F}_{21} + \frac{1}{M} [m_2 \vec{F}_1^{(\text{ext})} - m_2 \vec{F}_2^{(\text{ext})}] \quad (2.251)$$

donde hemos definido  $\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , y la masa reducida  $\mu$  del sistema como

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (2.252)$$

Más adelante (Secciones 3.15 y 3.16) argumentaremos que la fuerza  $\vec{F}_{21}$  que 2 ejerce sobre 1 debe tener la forma

$$\vec{F}_{21} = f(\Delta r) \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}, \quad (2.253)$$

donde  $\Delta r \equiv \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$ . Esto simplemente quiere decir que la fuerza entre 2 y 1 se extiende a lo largo de la recta que contiene a ambas partículas. Usando este resultado en la ecuación 2.251 vemos que

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \Delta \vec{r} = f(\Delta r) \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} + \frac{1}{M} [m_2 \vec{F}_1^{(\text{ext})} - m_2 \vec{F}_2^{(\text{ext})}]. \quad (2.254)$$

Luego, en ausencia de fuerzas externas, vemos que  $\Delta \vec{r}$  satisface una ecuación de Newton para una partícula de masa  $\mu$ :

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \Delta \vec{r} = f(\Delta r) \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}. \quad (2.255)$$

### 2.20.1 Momento angular y torque en un sistema de dos partículas

Definamos las posiciones  $\vec{\rho}_1$  y  $\vec{\rho}_2$  de las partículas  $m_1$  y  $m_2$  con respecto al centro de masas como

$$\vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{\text{CM}}, \quad \vec{\rho}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{CM}}. \quad (2.256)$$

Notemos que  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$ . Es directo ver que

$$\vec{\rho}_1 = \frac{\mu}{m_1} \Delta\vec{r}, \quad \vec{\rho}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \Delta\vec{r} \quad (2.257)$$

Esto significa que

$$m_1\vec{\rho}_1 + m_2\vec{\rho}_2 = 0. \quad (2.258)$$

Ahora, el momento angular con respecto a un origen fijo  $\mathcal{O}$  viene dado por

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \quad (2.259)$$

$$= m_1(\vec{\rho}_1 + \vec{r}_{\text{CM}}) \times (\dot{\vec{\rho}}_1 + \vec{v}_{\text{CM}}) + m_2(\vec{\rho}_2 + \vec{r}_{\text{CM}}) \times (\dot{\vec{\rho}}_2 + \vec{v}_{\text{CM}}). \quad (2.260)$$

Desarrollando esta relación, y usando la relación (2.258), es posible derivar el siguiente resultado

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{CM}}, \quad (2.261)$$

donde

$$\vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} \equiv M\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}}, \quad (2.262)$$

$$\vec{L}_{\text{CM}} \equiv m_1\vec{\rho}_1 \times \dot{\vec{\rho}}_1 + m_2\vec{\rho}_2 \times \dot{\vec{\rho}}_2. \quad (2.263)$$

Notemos que  $\vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}}$  es el momento angular con respecto a  $\mathcal{O}$  de una partícula de masa  $M$  con posición  $\vec{r}_{\text{CM}}$  y velocidad  $\vec{v}_{\text{CM}}$ . Por otro lado,  $\vec{L}_{\text{CM}}$  es simplemente el momento angular con respecto al centro de masas. Notablemente, podemos re-escribir

$$\vec{L}_{\text{CM}} = \mu \Delta\vec{r} \times \frac{d}{dt} \Delta\vec{r}. \quad (2.264)$$

Por otro lado, el torque con respecto al origen viene dado por

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{(\text{ext})}) + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{(\text{ext})}) \quad (2.265)$$

$$= (\vec{\rho}_1 + \vec{r}_{\text{CM}}) \times (\vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{(\text{ext})}) + (\vec{\rho}_2 + \vec{r}_{\text{CM}}) \times (-\vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{(\text{ext})}). \quad (2.266)$$

Desarrollando esta relación, y usando el hecho de que  $(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \times \vec{F}_{21} = 0$  (puesto que  $\vec{F}_{21} \propto \Delta\vec{r}$ ), es posible derivar el siguiente resultado:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} + \vec{\tau}_{\text{CM}}, \quad (2.267)$$

donde

$$\vec{\tau}_O^{\text{CM}} \equiv \vec{r}_{\text{CM}} \times (\vec{F}_1^{(\text{ext})} + \vec{F}_2^{(\text{ext})}), \quad (2.268)$$

$$\vec{\tau}_{\text{CM}} \equiv \vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1^{(\text{ext})} + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2^{(\text{ext})}. \quad (2.269)$$

Al igual que con el momento angular, podemos ver que  $\vec{\tau}_O^{\text{CM}}$  es el torque con respecto al origen debido a las fuerzas externas actuando sobre una partícula en la posición  $\vec{r}_{\text{CM}}$ . Por otro lado,  $\vec{\tau}_{\text{CM}}$  es el torque total con respecto al centro de masas. Gracias a la ley de Newton (2.249) es directo ver que

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O^{\text{CM}} = \vec{\tau}_O^{\text{CM}}. \quad (2.270)$$

Luego, dado que  $d\vec{L}_O/dt = \vec{\tau}_O$ , es posible constatar que

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{CM}} = \vec{\tau}_{\text{CM}}. \quad (2.271)$$

Si no hay fuerzas externas, sigue inmediatamente que

$$\vec{L}_{\text{CM}} = \mu \Delta\vec{r} \times \frac{d}{dt} \Delta\vec{r} = \text{constante}. \quad (2.272)$$

### 2.20.2 Ejemplo: Segunda ley de Kepler

Veamos una aplicación importante del concepto de masa reducida. La ley universal de la gravitación de Newton establece que la fuerza (de gravedad) que ejerce una masa  $m_2$  sobre una masa  $m_1$  es:

$$\vec{F}_{21} = - \frac{G_N m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}, \quad (2.273)$$

donde  $G_N$  es la constante de Newton. El signo  $-$  implica que la fuerza entre ambos cuerpos es atractiva. Dado que  $\vec{F}_{21} \propto \Delta\vec{r}$  podemos usar el resultado de la discusión anterior, y por lo tanto  $\vec{L}_{\text{CM}} = \mu \Delta\vec{r} \times \frac{d}{dt} \Delta\vec{r}$  es un vector constante.

Ahora, el área  $dS$  barrida por el vector  $\Delta\vec{r}$  entre  $t$  y  $t + dt$  es

$$dS = \frac{1}{2} \|\Delta\vec{r}(t) \times \Delta\vec{r}(t + dt)\|. \quad (2.274)$$

Pero  $\Delta\vec{r}(t + dt) = \Delta\vec{r}(t) + \frac{d}{dt} \Delta\vec{r}(t) dt + \dots$ . Luego, es posible ver que  $dS$  viene dado por

$$dS = \frac{1}{2} \|\Delta\vec{r}(t) \times \frac{d}{dt} \Delta\vec{r}(t)\| dt. \quad (2.275)$$

Sin embargo, dado que  $\|\vec{L}_{\text{CM}}\|$  es constante, vemos que

$$\frac{dS}{dt} = \text{constante.} \quad (2.276)$$

De aquí sigue que el área  $S_{21}$  barrida entre dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , es proporcional a  $t_2 - t_1$ :

$$S_{21} \propto t_2 - t_1, \quad (2.277)$$

que es la segunda ley de Kepler.