# 1 Cinemática

Comenzaremos nuestro estudio de la mecánica mediante la descripción del movimiento, sin preguntarnos por sus causas. Para ello, estableceremos nociones básicas como el vector posición, la velocidad, y la aceleración, descritas en distintos tipos de sistemas de coordenadas. Comencemos con la posición.

## 1.1 Posición

El vector posición $\vec{r}$ es un vector que nos indica la ubicación de algún objeto en el espacio, con respecto a un origen $\mathcal{O}$ dado. Para que la información contenida en $\vec{r}$ sea útil, tenemos que conocer el origen $\mathcal{O}$ del cual se habla. La siguiente figura muestra un vector $\vec{r}$ que indica la posición de la partícula $P$ con respecto al origen $\mathcal{O}$. La

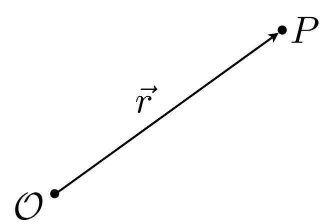
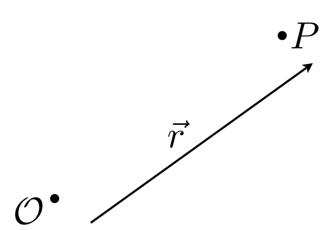


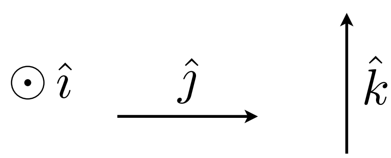

figura anterior podría inducirnos a un error. El vector $\vec{r}$ no está anclado al origen $\mathcal{O}$. Recordemos que un vector tiene dos propiedades fundamentales, dirección y longitud. Estas dos propiedades no nos dicen nada acerca del origen. Por ejemplo, la siguiente figura es completamente equivalente a la figura anterior:



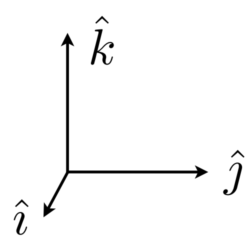

Como verán, el vector $\vec{r}$ continúa indicando la posición de la partícula con respecto al origen $\mathcal{O}$, aún cuando el inicio del vector no esté sobre el origen, y la punta no esté sobre la partícula.

## 1.2 Base cartesiana

Todo vector puede ser expresado con respecto a una base. En el caso particular de nuestro espacio de tres dimensiones, resulta muy útil introducir una base cartesiana, consistente en tres vectores unitarios que denominaremos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$. Estos tres vectores permanecerán fijos. Por ejemplo, dada la orientación de nuestra sala (B204), acordemos que $\hat{\imath}$ siempre apunta hacia el Sur (hacia afuera de la pizarra), $\hat{\jmath}$ siempre apunta hacia el Este (a lo largo de la pizarra, en dirección a la entrada), y $\hat{k}$ siempre apunta hacia arriba. Estos vectores pueden ser dibujados de la siguiente forma:




Cada vector existe independientemente de los otros dos, y sus inicios no están amarrados a ninguna posición. Sin embargo, habitualmente es conveniente dibujarlos de tal forma que sus inicios coincidan, formando una triada. La siguiente figura muestra una triada en perspectiva:




Como lo sugiere la figura, estos vectores son ortogonales entre sí. Esto quiere decir que existe un producto punto, tal que

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0, \qquad \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0, \qquad \hat{k} \cdot \hat{\jmath} = 0. \tag{1.1}$$

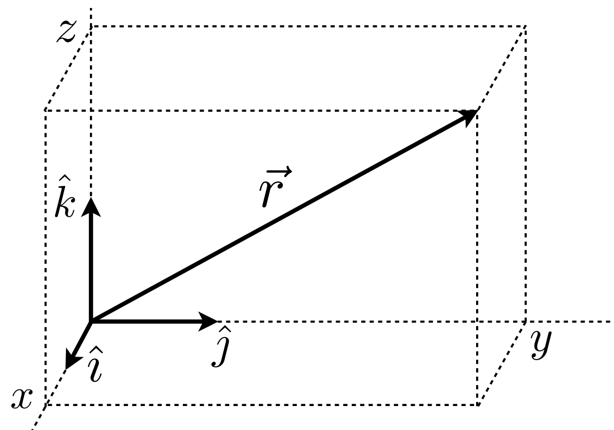
Por otro lado, el hecho de que estos vectores sean unitarios, significa que bajo este producto punto se constata que

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = 1, \qquad \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1, \qquad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1. \tag{1.2}$$

Ahora que contamos con una base cartesiana, podemos expresar el vector posición con respecto a ella. Es decir, podemos escribir

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{1.3}$$

En la expresión anterior, $x$, $y$ y $z$ son números (escalares) llamados componentes del vector $\vec{r}$ con respecto a la base $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$. Estas pueden ser visualizadas como proyecciones del vector $\vec{r}$ a lo largo de los tres vectores base $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, tal como lo muestra la siguiente figura:




De hecho los productos (1.1) y (1.2) nos permiten escribir

$$x = \hat{\imath} \cdot \vec{r}, \tag{1.4}$$
$$y = \hat{\jmath} \cdot \vec{r}, \tag{1.5}$$
$$z = \hat{k} \cdot \vec{r}. \tag{1.6}$$

## 1.3 Velocidad

En general, nos interesará conocer la posición de objetos que se mueven a lo largo y ancho del espacio. Esto significa que el vector posición estará cambiando a medida que el tiempo pase. Es decir, debemos considerar que el vector posición es una función del tiempo $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Supongamos que en cierto tiempo $t$ una partícula $P$ se encuentra en una posición dada $\vec{r}(t)$. Inmediatamente después, en tiempo $t' = t + \Delta t$, la partícula estará en la posición

$$\vec{r}\,' = \vec{r}(t + \Delta t). \tag{1.7}$$

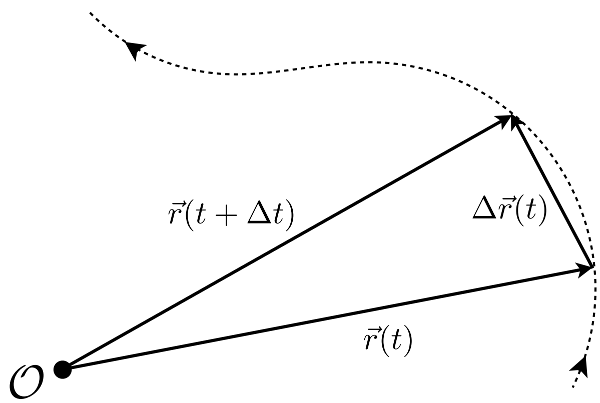
Por otro lado, dado que el incremento $\Delta t$ es pequeño, la posición $\vec{r}\,'$ no puede ser muy lejana a $\vec{r}(t)$. Digamos que la distancia recorrida por la partícula durante este lapso de tiempo es $\Delta\vec{r}(t)$. Luego, necesariamente tenemos

$$\vec{r}\,' = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}(t). \tag{1.8}$$

Si igualamos las dos expresiones anteriores de $\vec{r}\,'$, obtenemos

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \tag{1.9}$$

La siguiente figura muestra la relación geométrica entre los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t + \Delta t)$ y $\Delta\vec{r}(t)$:




Ahora dividamos $\Delta\vec{r}(t)$ por $\Delta t$:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.10}$$

Esta operación nos informa sobre qué tan rápido se movió la partícula desde $\Delta\vec{r}(t)$ a $\vec{r}(t + \Delta t)$, durante el lapso de tiempo $\Delta t$. Si para un tiempo $\Delta t$ dado, la partícula recorrió una gran distancia $||\Delta\vec{r}(t)||$, entonces decimos que la partícula se movió muy rápido. Por otro lado, si la partícula recorrió una distancia pequeña, decimos que la partícula se movió lentamente.

Ahora, viene algo interesante. El concepto “qué tan rápido”, no requiere que nos pongamos de acuerdo en la existencia de una cantidad de tiempo $\Delta t$. Esto es, en la expresión anterior podemos examinar el límite $\Delta t \to 0$ sin que la expresión se torne indefinida. De hecho, dicho límite define la velocidad:

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.11}$$

Por lo tanto, la velocidad nos informa qué tan rápido se mueve un objeto en un tiempo dado $t$, sin hacer mención del lapso de tiempo $\Delta t$ (que desaparece después de tomar el límite). Notemos que esta definición de velocidad coincide, ni más ni menos, con la definición de una derivada temporal del vector posición. Es decir:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d}{dt}\vec{r}(t). \tag{1.12}$$

## 1.4 Velocidad en coordenadas cartesianas

Dado que por definición, en (1.11), la velocidad consiste en la resta de dos vectores, entonces ésta necesariamente será un vector. Esto significa que podemos escribirla en términos de una base. Hasta el momento solo disponemos de la base cartesiana, por lo tanto, nos podemos permitir escribir:

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}. \tag{1.13}$$

Las cantidades $v_x$, $v_y$ y $v_z$ son números (escalares) denominados componentes del vector $\vec{v}$ con respecto a la base $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$. Dado que la velocidad es la derivada temporal de $\vec{r}(t)$, podemos determinar la forma de $v_x$, $v_y$ y $v_z$. Veamos. De acuerdo a (1.3) el vector $\vec{r}(t)$ puede expresarse como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}. \tag{1.14}$$

Recordemos que, por definición, la base $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ está fija, y por lo tanto no cambia en el tiempo. Por lo tanto, la dependencia temporal de $\vec{r}(t)$ solo puede venir de las componentes $x$, $y$ y $z$, cuyos valores cambiarán en la medida que la partícula descrita por $\vec{r}(t)$ se mueva. Luego, derivando (1.14) con respecto al tiempo, obtenemos

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right) \tag{1.15}$$

$$= \dot{x}(t)\hat{\imath} + \dot{y}(t)\hat{\jmath} + \dot{z}(t)\hat{k}, \tag{1.16}$$

donde $\dot{x}$ representa una derivada temporal de $x$, etc. Comparando esta expresión con (1.13), vemos que las componentes $v_x$, $v_y$ y $v_z$ están simplemente dadas por

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}. \tag{1.17}$$

## 1.5 Aceleración

Vimos que la velocidad $\vec{v}(t)$ puede ser definida como la derivada temporal de $\vec{r}(t)$, dándonos cuenta de qué tan rápido cambia $\vec{r}$ en un tiempo particular $t$. De forma análoga, podemos definir la aceleración $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d}{dt}\vec{v}(t). \tag{1.18}$$

Este vector nos informa sobre qué tan rápido cambia $\vec{v}(t)$ en un tiempo dado $t$. Al igual que con la posición y velocidad, podemos expresar la aceleración con respecto a la base cartesiana $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}. \tag{1.19}$$

Luego, derivando (1.13) con respecto al tiempo, y comparando con (1.19) vemos directamente que

$$a_x = \dot{v}_x, \qquad a_y = \dot{v}_y, \qquad a_z = \dot{v}_z. \tag{1.20}$$

Por otro lado, en virtud de la relación (1.17), obtenemos

$$a_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \ddot{z}. \tag{1.21}$$

## 1.6 Módulos y productos

Ocasionalmente, tendremos que hacer operaciones que involucran productos de vectores. Recordemos que el módulo $||\vec{A}||$ de un vector dado $\vec{A}$ se define como

$$||\vec{A}|| \equiv \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}. \tag{1.22}$$

Si en la base cartesiana el vector $\vec{A}$ se expande

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}, \tag{1.23}$$

entonces el módulo vendrá dado por

$$||\vec{A}|| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \tag{1.24}$$

lo que corresponde al largo del vector. Por ejemplo, si la posición de una partícula $P$ con respecto a $\mathcal{O}$ está dada por $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, entonces la distancia entre $\mathcal{O}$ y $P$ es

$$||\vec{r}\,|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.25}$$

Por otra parte, el módulo nos permite definir el concepto de rapidez. La rapidez asociada a una velocidad $\vec{v}$ se define como su módulo:

$$\nu \equiv ||\vec{v}\,||. \tag{1.26}$$

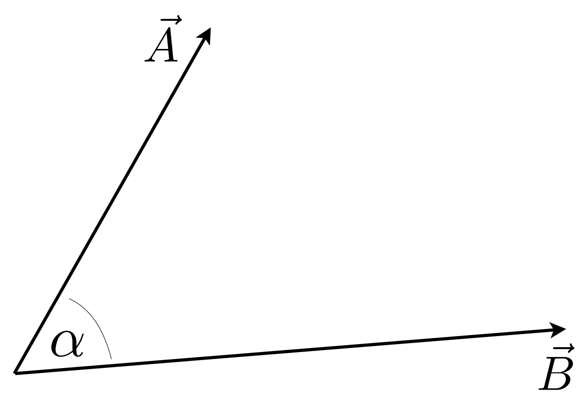
Luego, si la velocidad de una partícula en base cartesiana es $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$, entonces su rapidez corresponde a

$$\nu = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{1.27}$$

El concepto de módulo también permite una definición simple de ángulos entre vectores: Para ser concretos, dado dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el ángulo $\alpha$ entre ellos puede ser definido como

$$||\vec{A}||\,||\vec{B}||\cos\alpha \equiv \vec{A}\cdot\vec{B}. \tag{1.28}$$

La siguiente figura describe la situación:




También será conveniente contar con el concepto de producto cruz, el cual puede ser introducido con la ayuda de las bases cartesianas. Definimos el producto cruz entre los elementos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ como

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0, \tag{1.29}$$

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = -\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = \hat{k}, \tag{1.30}$$

$$\hat{\jmath}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{\jmath} = \hat{\imath}, \tag{1.31}$$

$$\hat{k}\times\hat{\imath} = -\hat{\imath}\times\hat{k} = \hat{\jmath}. \tag{1.32}$$

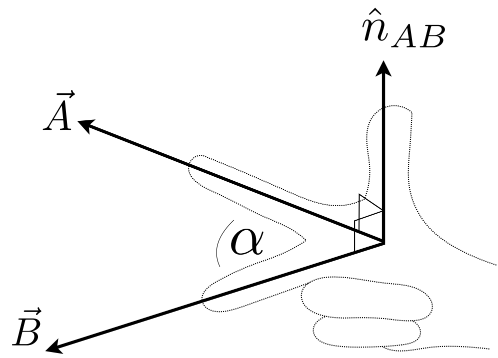
Estas definiciones permiten deducir que el producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$ entre dos vectores $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ viene dado por

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}. \tag{1.33}$$

Notemos que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. Adicionalmente, es posible comprobar la siguiente relación entre el productor cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ y el módulo de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y el ángulo común $\alpha$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = ||\vec{A}||\,||\vec{B}||\sin\alpha\,\hat{n}_{AB}, \tag{1.34}$$

donde $\hat{n}_{AB}$ es un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cuya orientación puede ser determinada con la ayuda de la regla de la mano derecha (ver figura siguiente):




En esta regla, los dedos índice y medio apuntan en las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente, con lo cual la orientación de $\hat{n}_{AB}$ queda determinada por el pulgar.

## 1.7 Coordenadas cilíndricas

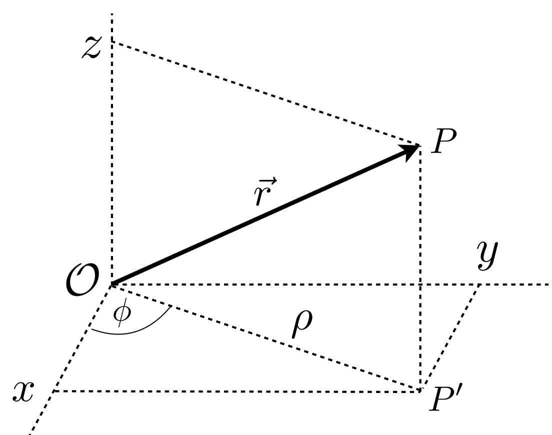
Habrán ocaciones en las cuales las coordenadas $x$, $y$ y $z$ resultarán poco convenientes. Una alternativa es trabajar con coordenadas cilíndricas, $\rho$, $\phi$ y $z$, que pueden ser expresadas en términos $x$, $y$, y $z$ de la siguiente forma:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.35}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}, \tag{1.36}$$

$$z = z. \tag{1.37}$$

La siguiente figura nos ayudará a visualizarlas:




La coordenada $\rho$ corresponde a la distancia entre $\mathcal{O}$ y $P'$ (la de la proyección de $P$ sobre el plano $x$-$y$). La coordenada $\phi$ es el ángulo entre el eje $x$ y la recta $\mathcal{O}P'$. Por último, la altura $z$ corresponde a la misma altura $z$ de las coordenadas cartesianas.

Si conocemos las coordenadas $x$, $y$ y $z$, necesariamente conocemos $\rho$, $\phi$ y $z$ de forma única. La afirmación inversa también es cierta. Es directo constatar que

$$x = \rho \cos \phi, \tag{1.38}$$

$$y = \rho \sin \phi, \tag{1.39}$$

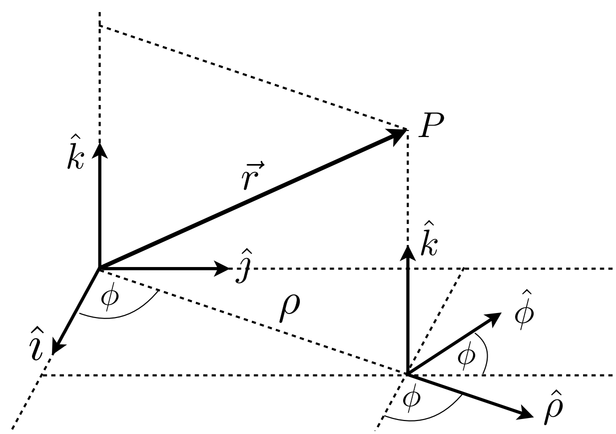
$$z = z. \tag{1.40}$$

## 1.8 Base cilíndrica

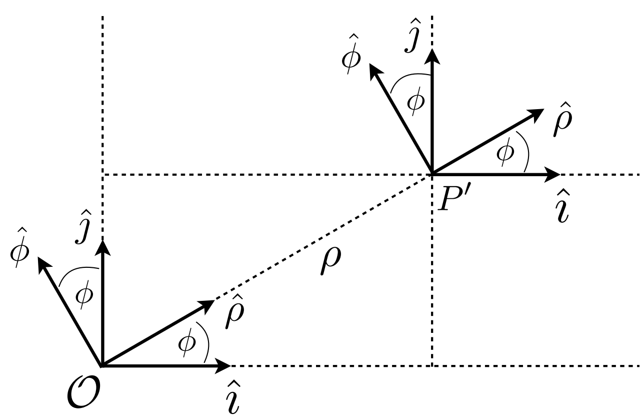
Habiendo introducido coordenadas cilíndricas, es natural definir una nueva base de vectores unitarios, llamada base cilíndrica, que consistirá en los siguientes vectores $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{k}$:

$$\hat{\rho} \equiv \cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath}, \qquad \hat{\phi} \equiv -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}, \qquad \hat{k} \equiv \hat{k}. \tag{1.41}$$

Podemos visualizar estos vectores de la siguiente forma:




Noten que los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$, al estar definidos en términos de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, viven sobre el plano $x$-$y$. Si nos enfocamos solo en este plano, podemos visualizar al par $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ de la siguiente forma:




Notemos que $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ siempre permanecen perpendiculares entre sí. Una característica de esta base es que en general dependerá del tiempo. Si la partícula descrita por $\vec{r}$ se mueve, entonces esperamos que su proyección $P'$ se desplace por el plano $x$-$y$, cambiando el valor del ángulo $\phi$. El vector $\hat{\rho}$ siempre persigue al punto $P'$, y $\hat{\phi}$ siempre permanece perpendicular a $\hat{\rho}$.

Por último, las relaciones en (1.41) pueden ser invertidas. Es decir, podemos expresar $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ en términos de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$:

$$\hat{\imath} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}, \qquad \hat{\jmath} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}. \tag{1.42}$$

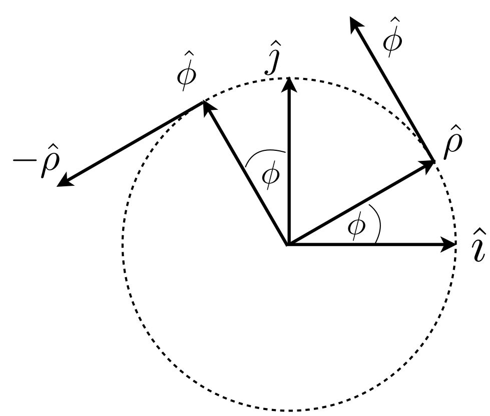
## 1.9 Derivadas de la base cilíndrica

Evidentemente $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ son funciones del ángulo $\phi$. Luego, nada nos detiene en calcular derivadas de estos vectores con respecto a $\phi$. Es directo verificar que

$$\frac{\partial\,\hat{\rho}}{\partial\phi} = \hat{\phi}, \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\phi}}{\partial\phi} = -\hat{\rho}. \tag{1.44}$$

En primera instancia, es llamativo notar que la derivada de $\hat{\rho}$ con respecto a $\phi$ es simplemente $\hat{\phi}$, y que la derivada de $\hat{\phi}$ con respecto a $\phi$ es $-\hat{\rho}$. De hecho, estos resultados esconden algo interesante: Si el ángulo $\phi$ crece, el vector $\hat{\rho}$ se moverá en la dirección $\hat{\phi}$, y el vector $\hat{\phi}$ se moverá en la dirección $-\hat{\rho}$. De manera similar, si el ángulo $\phi$ decrece, el vector $\hat{\rho}$, se moverá en la dirección $-\hat{\phi}$, y el vector $\hat{\phi}$, se moverá en la dirección $\hat{\rho}$. La siguiente figura da cuenta de la situación cuando $\phi$ crece:




Seamos más precisos. Si $\phi$ sufre un incremento $\Delta\phi$ pequeño, desde $\phi$ a $\phi + \Delta\phi$, el vector $\hat{\rho}$ sufrirá un cambio desde $\hat{\rho}(\phi)$ a $\hat{\rho}' = \hat{\rho}(\phi + \Delta\phi)$. Luego, el cambio $\Delta\hat{\rho}$ experimentado por $\hat{\rho}$ consistirá en la diferencia entre $\hat{\rho}' = \hat{\rho}(\phi + \Delta\phi)$ y $\hat{\rho}(\phi)$

$$\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(\phi + \Delta\phi) - \hat{\rho}(\phi). \tag{1.45}$$

$\Delta\hat{\rho}$ indica hacia donde cambiará $\hat{\rho}$ bajo el incremento $\Delta\phi$. Esta dirección no se verá alterada si dividimos $\Delta\hat{\rho}$ por $\Delta\phi$ (un vector no cambia su dirección cuando es multiplicado por un escalar). Luego, la dirección hacia la cual cambia $\hat{\rho}$ bajo el incremento $\Delta\phi$ consiste en

$$\text{Dirección de cambio de } \hat{\rho} \text{ cuando } \phi \text{ crece} = \frac{\hat{\rho}(\phi+\Delta\phi)-\hat{\rho}(\phi)}{\Delta\phi}. \tag{1.46}$$

Ahora, si tomamos el límite $\Delta\phi \to 0$, vemos que esta dirección corresponde ni más ni menos que a la derivada de $\hat{\rho}$ con respecto a $\phi$, de donde obtenemos el resultado:

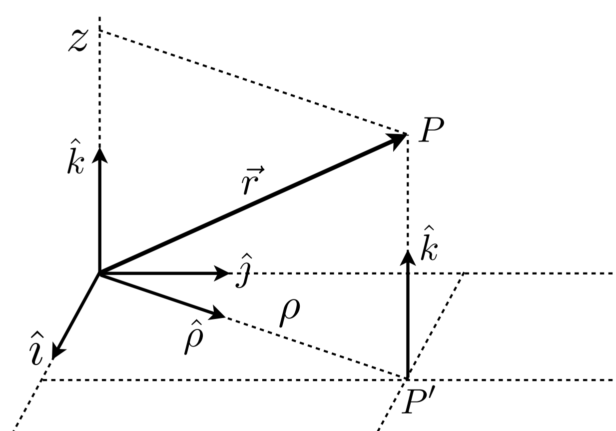
$$\hat{\phi} = \text{Dirección de cambio de } \hat{\rho} \text{ cuando } \phi \text{ crece.} \tag{1.47}$$

## 1.10 Posición en coordenadas cilíndricas

Recordemos que la posición en coordenadas cartesianas viene dada por $\vec{r} = x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}$. Si reemplazamos (1.40) y (1.42) en esta expresión, obtendremos la siguiente forma para $\vec{r}$ en términos de las coordenadas y base cilíndricas:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}. \tag{1.48}$$

Este resultado es algo evidente a la luz de la siguiente figura:




En efecto, vemos que el vector $\vec{r}$, que va desde $\mathcal{O}$ hasta $P$, es el resultado de la suma del vector $\rho\hat{\rho}$, que va desde $\mathcal{O}$ hasta $P'$, y el vector $z\hat{k}$, que va desde $P'$ hasta $P$.

## 1.11 Velocidad en coordenadas cilíndricas

Ahora que tenemos una expresión para la posición en coordenadas cilíndricas, obtengamos una expresión correspondiente para la velocidad. En primer lugar, recodemos que la velocidad, al ser un vector, podemos expresarla con respecto a la base cilíndrica de la forma

$$\vec{v} = v_\rho \hat{\rho} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{k}. \tag{1.49}$$

El desafío que tenemos es obtener expresiones concretas para las componentes $v_\rho$, $v_\phi$ y $v_z$. Para proceder, recordemos que la definición de velocidad viene dada por $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Luego, bastará calcular

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\rho\hat{\rho} + z\hat{k}\right). \tag{1.50}$$

Desarrollando, vemos que

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} + \dot{z}\hat{k}. \tag{1.51}$$

Luego, es necesario contar con la derivada temporal de $\hat{\rho}$. Dado que $\hat{\rho}$ depende de $\phi$, y $\phi$ a su vez depende del tiempo (porque la partícula $P$ estará moviéndose), entonces, para calcular $\dot{\hat{\rho}}$, debemos utilizar la regla de la cadena:

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi}\,\dot{\phi} = \hat{\phi}\,\dot{\phi}, \tag{1.52}$$

donde utilizamos (1.43). De esta forma, obtenemos que la velocidad en coordenadas cilíndricas viene dada por

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}. \tag{1.53}$$

De esta forma, vemos que

$$v_\rho = \dot{\rho}, \tag{1.54}$$

$$v_\phi = \rho\dot{\phi}, \tag{1.55}$$

$$v_z = \dot{z}. \tag{1.56}$$

## 1.12 Aceleración en coordenadas cilíndricas

Al igual que con la velocidad, podemos escribir la aceleración en coordenadas cilíndricas de la forma:

$$\vec{a} = a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_z \hat{k}. \tag{1.57}$$

Para obtener expresiones para $a_\rho$, $a_\phi$ y $a_z$, procedamos a derivar $\vec{v}$ obtenida en (1.53) con respecto al tiempo:

$$\begin{align}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}\right), \tag{1.58}\\
&= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} + \ddot{z}\hat{k}, \tag{1.59}\\
&= \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} + \ddot{z}\hat{k}, \tag{1.60}
\end{align}$$

donde, en el último paso, usamos $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$. Para avanzar, necesitamos conocer $\dot{\hat{\phi}}$, lo que puede lograrse de la siguiente manera

$$\dot{\hat{\phi}} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi}\,\dot{\phi} = -\hat{\rho}\,\dot{\phi}, \tag{1.61}$$

donde utilizamos (1.44). Ingresando este resultado de regreso en (1.60) nos entrega la siguiente relación para la aceleración:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}, \tag{1.62}$$

Luego, sigue que

$$\begin{align}
a_\rho &= \ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho, \tag{1.63}\\
a_\phi &= \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}, \tag{1.64}\\
a_z &= \ddot{z}. \tag{1.65}
\end{align}$$

## 1.13 Coordenadas esféricas

Llegó la hora de enfrentar a las temibles coordenadas esféricas. Estas se definen en términos de las coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{1.66}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}, \tag{1.67}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \tag{1.68}$$

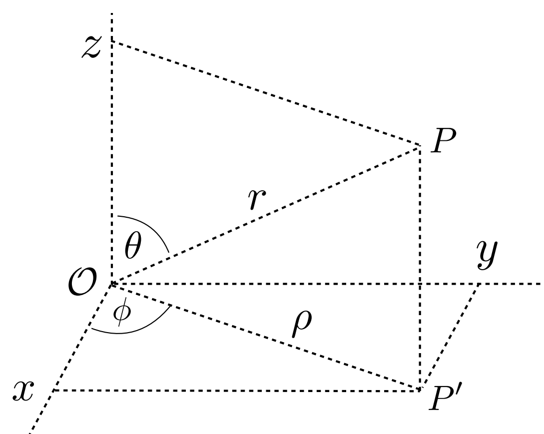
A partir de estas definiciones, es posible encontrar las siguientes relaciones inversas

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \tag{1.69}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi, \tag{1.70}$$

$$z = r \cos\theta. \tag{1.71}$$

La siguiente figura nos ayudará a visualizarlas:




Como es posible apreciar, $r$ es la distancia entre $\mathcal{O}$ y $P$. El ángulo $\phi$ coincide con el ángulo de las coordenadas cilíndricas, y corresponde al ángulo entre el eje $x$ y la recta $\mathcal{O}P'$. Por último, el ángulo $\theta$ es el ángulo entre el eje $z$ y la recta $\mathcal{O}P$. Adicionalmente, notemos que la coordenada cilíndrica $\rho$ puede escribirse en términos de $r$ y $\theta$ de la siguiente forma:

$$\rho = r \sin\theta. \tag{1.72}$$

## 1.14 Base esférica

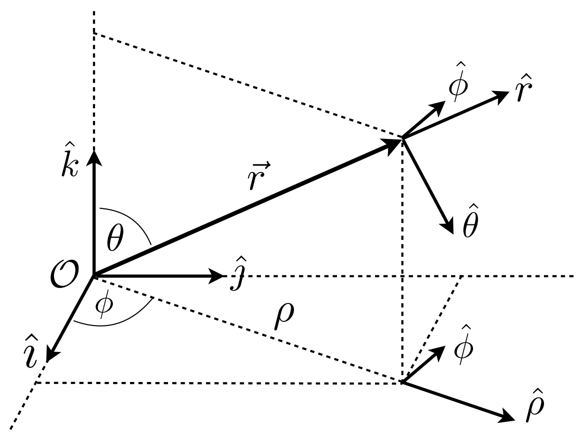
Junto con la definición de las coordenadas esféricas, definamos una nueva base de vectores, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, llamada base esférica. Estas vienen definidas en términos de la base cartesiana de la siguiente manera:

$$\hat{r} \equiv \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}, \tag{1.73}$$

$$\hat{\theta} \equiv \cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k}, \tag{1.74}$$

$$\hat{\phi} \equiv -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}. \tag{1.75}$$

La siguiente figura nos permitirá visualizar la orientación de esta base:




Debería ser posible apreciar que los nuevos vectores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, son todos mutuamente ortogonales (lo cual puede ser comprobado directamente a partir de sus definiciones). Para comprender bien la orientación de esta base, ayudará notar que el vector $\hat{r}$ es proporcional a $\vec{r}$. De hecho:

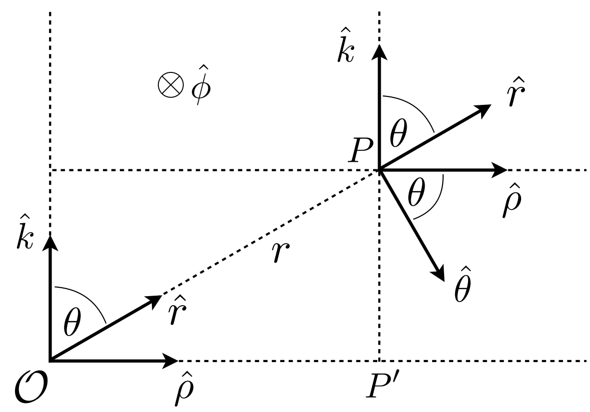
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{1.76}$$

Es decir, el vector unitario $\hat{r}$ nos indica la orientación de $P$ con respecto a $\mathcal{O}$. Por otro lado, $\hat{\phi}$ es el mismo vector unitario de la base cilíndrica. Además, los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ pueden ser expresados en términos de $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$, pertenecientes a la base cilíndrica, de la siguiente manera:

$$\hat{r} \equiv \sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}, \tag{1.77}$$

$$\hat{\theta} \equiv \cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}, \tag{1.78}$$

Esto significa que los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ pertenecen al mismo plano sobre el cual descansan los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$. Dicho plano es perpendicular a $\hat{\phi}$. La siguiente figura muestra dicho plano, junto con estos vectores:




Al igual que con las coordenadas cilíndricas, es posible invertir todas estas relaciones. Por ejemplo, podemos escribir $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$ en términos de $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$:

$$\hat{\rho} \equiv \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}, \tag{1.79}$$

$$\hat{k} \equiv \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}. \tag{1.80}$$

Igualmente, podemos escribir los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ en términos de $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$:

$$\hat{\imath} = \cos\phi\,\sin\theta\,\hat{r} + \cos\phi\,\cos\theta\,\hat{\theta} - \sin\phi\,\hat{\phi}, \tag{1.81}$$

$$\hat{\jmath} = \sin\phi\,\sin\theta\,\hat{r} + \sin\phi\,\cos\theta\,\hat{\theta} + \cos\phi\,\hat{\phi}, \tag{1.82}$$

$$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}. \tag{1.83}$$

## 1.15 Derivadas de la base esférica

Notemos que los elementos de la base esférica son funciones de los ángulos $\phi$ y $\theta$. Esto quiere decir que ahora estamos lidiando con vectores que son funciones de dos variables, y por lo tanto podemos derivarlos con respecto a cada variable. Derivando cada vector con respecto a cada variable (manteniendo constante la variable que no está siendo derivada), obtenemos:

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin\theta\,\hat{\phi}, \tag{1.84}$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \tag{1.85}$$

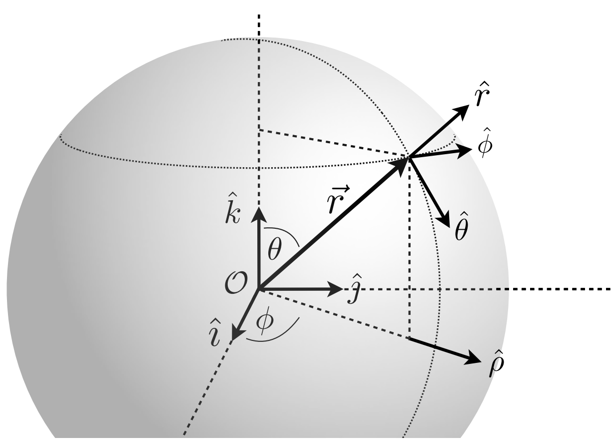
$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \cos\theta\,\hat{\phi}, \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \tag{1.87}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho} = -\sin\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}, \tag{1.88}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0. \tag{1.89}$$

Las expresiones anteriores son bastante sencillas. Una de ellas, (1.88), ya la conocíamos debido a nuestro análisis de la base cilíndrica. Cada uno de estas derivadas da cuenta de hacia dónde cambia un vector al hacer crecer (o decrecer) un ángulo dado, tal como lo vimos en el caso de la base cilíndrica. La siguiente figura debiera ayudarnos a visualizar esta afirmación:




En la figura anterior, los dos círculos nos indican los posibles movimientos al variar los ángulos $\theta$ y $\phi$. El círculo que atraviesa los polos es un círculo máximo de radio $r$, mientras que el círculo paralelo es un círculo de radio $\rho = r\sin\theta$. Ahora bien, la ecuación (1.85) nos revela que al crecer el ángulo $\theta$, el vector unitario $\hat{r}$ cambia hacia la dirección $\hat{\theta}$. Por otro lado, la ecuación (1.87) nos informa que al hacer crecer el ángulo $\theta$, el vector $\hat{\theta}$ cambia hacia la dirección $-\hat{r}$. Hasta acá, la situación es idéntica con respecto a la base cilíndrica. La diferencia viene dada por las ecuaciones (1.84) y (1.86) que tienen factores $\sin\theta$ y $\cos\theta$ respectivamente. Para entender la presencia del factor $\sin\theta$ en (1.84) basta notar que al hacer crecer $\phi$, la parte de $\hat{r}$ que cambia es aquella que se proyecta sobre el plano $x$-$y$, que es $\sin\theta\hat{\rho}$ (y ya sabemos que $\hat{\rho}$ cambia hacia la dirección $\hat{\phi}$). Similarmente, la presencia del factor $\cos\theta$ en (1.86) se debe a que al hacer crecer $\phi$, la parte de $\hat{\theta}$ que cambia es aquella que se proyecta sobre el plano $x$-$y$, que es $\cos\theta\hat{\rho}$ (y ya sabemos que $\hat{\rho}$ cambia hacia la dirección $\hat{\phi}$).

## 1.16 Posición y velocidad en coordenadas esféricas

Es directo ver que el vector posición en coordenadas y base esféricas viene dado por

$$\vec{r} = r\hat{r}. \tag{1.90}$$

A partir de esta expresión podemos calcular la velocidad. Esta debe poder escribirse de la forma

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\phi\hat{\phi}. \tag{1.91}$$

Para conocer las componentes $v_r$, $v_\theta$, y $v_\phi$ basta con derivar (1.90) con respecto al tiempo. Esto nos da

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}. \tag{1.92}$$

Para proceder, debemos conocer $\dot{\hat{r}}$, lo que puede ser logrado usando la regla de la cadena, junto con (1.84) y (1.85):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} &(1.93)\\ &= \sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + \dot{\theta}\,\hat{\theta}. &(1.94)\end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en (1.92) obtenemos

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}. \tag{1.95}$$

A partir de este resultado, vemos que

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, &(1.96)\\ v_\theta &= r\sin\theta\,\dot{\phi} &(1.97)\\ v_\phi &= r\dot{\theta}. &(1.98)\end{aligned}$$

## 1.17 Aceleración en coordenadas esféricas

La aceleración escrita en términos de la base esférica tendrá la forma

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi}. \tag{1.99}$$

Para determinar las componentes $a_r$, $a_\theta$ y $a_\phi$, derivemos (1.95) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) && (1.100)\\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + r\sin\theta\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\hat{\phi}} \\
&\quad + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}} && (1.101)\\
&= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + r\sin\theta\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi} \\
&\quad + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\hat{\phi}} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}, && (1.102)
\end{aligned}$$

donde, para pasar de la segunda a la tercera línea, utilizamos (1.94). Para avanzar, necesitamos $\dot{\hat{\phi}}$ y $\dot{\hat{\theta}}$. El primero de estos dos ya lo conocemos debido a nuestro análisis de las coordenadas cilíndricas. El resultado obtenido fue $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$ que, con la ayuda de (1.79), puede ser re-escrito en términos de la base esférica como

$$\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\theta}. \tag{1.103}$$

Por otro lado, podemos calcular $\dot{\hat{\theta}}$ usando la regla de la cadena junto con (1.86) y (1.87):

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}} &= \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}\dot{\theta} \\
&= \cos\theta\,\hat{\phi}\,\dot{\phi} - \hat{r}\,\dot{\theta} && (1.104)
\end{aligned}$$

Luego, substituyendo estos resultados de vuelta en (1.102), obtenemos el resultado final

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} \\
&\quad + (2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\sin\theta\,\ddot{\phi})\hat{\phi}. && (1.105)
\end{aligned}$$

Esta expresión puede ser levemente simplificada al notar que el último término, proporcional a $\hat{\phi}$, puede ser expresado como la derivada temporal de un solo término. Esto nos lleva a la siguiente expresión final para la aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\hat{\phi}. && (1.106)
\end{aligned}$$

Luego, las componentes (1.99) de las coordenadas esféricas son

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{1.107}$$

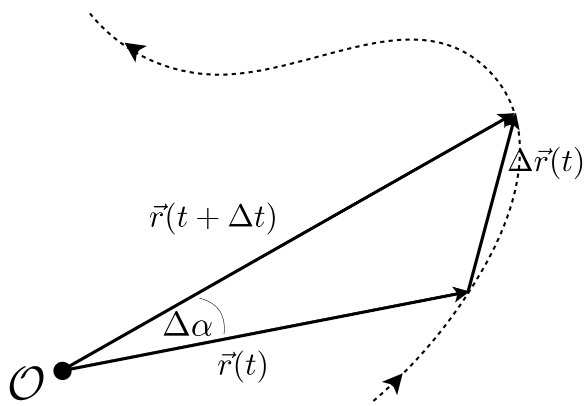
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{1.108}$$

$$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right). \tag{1.109}$$

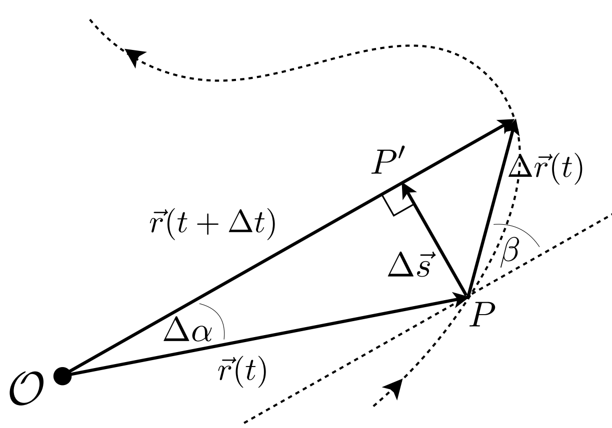
Lamentablemente, estas expresiones son complicadas. Sin embargo, veremos que en aquellas situaciones donde las coordenadas esféricas son útiles, estas componentes tenderán a simplificarse bastante.

## 1.18 Velocidad angular

Consideremos una partícula, con una trayectoria arbitraria, cuya posición en cierto tiempo $t$ está descrito por $\vec{r}(t)$. Un tiempo posterior $t + \Delta t$ la partícula estará en la posición $\vec{r}(t+\Delta t)$. En consecuencia, entre $t$ y $t+\Delta t$ la partícula se habrá desplazado una cantidad $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, tal como lo muestra la siguiente figura:




Preguntémonos por el valor del ángulo $\Delta\alpha$ barrido entre $t$ y $t+\Delta t$. Para determinar $\Delta\alpha$ consideremos un vector $\Delta\vec{s}$, perpendicular a $\vec{r}(t+\Delta t)$, que se extiende desde el punto $P$ hasta el punto $P'$ (ubicado sobre $\vec{r}(t+\Delta t)$), tal como lo muestra la siguiente figura:




La figura también muestra la definición del ángulo $\beta$, que es el ángulo entre el vector $\Delta\vec{r}(t)$ una recta paralela al vector $\vec{r}(t+\Delta t)$ (en otras palabras, $\beta$ es el ángulo entre

$\Delta\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t+\Delta t)$). Para continuar, notemos que que $\Delta\alpha$ viene dado por

$$\Delta\alpha = \arcsin\frac{||\Delta\vec{s}||}{||\vec{r}(t)||} \tag{1.110}$$

Por otro lado, $||\Delta\vec{s}||$ puede ser escrito en términos de $||\Delta\vec{r}||$ y $\beta$ de la siguiente manera

$$||\Delta\vec{s}|| = ||\Delta\vec{r}||\sin\beta. \tag{1.111}$$

Pero, dado que $\beta$ es el ángulo entre $\Delta\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t+\Delta t)$, podemos utilizar las propiedades del producto cruz, para escribir $\sin\beta$ como:

$$\sin\beta = \frac{||\vec{r}(t+\Delta t)\times\Delta\vec{r}(t)||}{||\vec{r}(t+\Delta t)\ ||\cdot||\Delta\vec{r}(t)||} \tag{1.112}$$

Juntando todo lo anterior, obtenemos

$$\Delta\alpha = \arcsin\left[\frac{||\vec{r}(t+\Delta t)\times\Delta\vec{r}(t)||}{||\vec{r}(t)||\cdot||\vec{r}(t+\Delta t)\ ||}\right]. \tag{1.113}$$

Ahora, consideremos qué pasa si $\Delta t$ es muy pequeño. En primer lugar, notemos que si $\Delta t$ es muy pequeño, podemos expandir $\vec{r}(t+\Delta t)$ en una serie de Taylor:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)\Delta t^2 + \cdots, \tag{1.114}$$

donde los puntos "$\cdots$" denotan términos de orden superior con respecto a $\Delta t$. Los coeficientes de la serie de Taylor son ni más ni menos que la posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$, evaluados en tiempo $t$. Luego, podemos escribir la expansión de forma más elegante de la forma

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 + \cdots. \tag{1.115}$$

Una consecuencia directa de esta relación, es que $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ vendrá dado por:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2 + \cdots. \tag{1.116}$$

Estas relaciones nos permitirán calcular $\Delta\alpha$ con la ayuda de (1.113). Procedamos. En primer lugar, el producto cruz en la expresión (1.113) tendrá la forma

$$\vec{r}(t+\Delta t)\times\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t)\times\vec{v}(t)\,\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \tag{1.117}$$

donde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ representa términos proporcionales a $\Delta t^2$ o de orden superior. Recordemos que $\Delta t$ es muy pequeño y, en consecuencia, los términos proporcionales a $\Delta t^2$ (o de orden superior) serán necesariamente aún más pequeños, por lo que no nos interesa seguirles la pista. De forma similar, el módulo de (1.117) adquirirá la forma

$$||\vec{r}(t + \Delta t) \times \Delta \vec{r}(t)|| = ||\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \tag{1.118}$$

Donde nuevamente $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ representa términos proporcionales a $\Delta t^2$ o de orden superior. Cuidado, la cantidad $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ que aparece en (1.118) no coincide con $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ de la ecuación (1.117). Veamos ahora el denominador $||\vec{r}(t + \Delta t)\ ||$ presente en la expresión (1.113). Con la ayuda de (1.115), podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||\vec{r}(t + \Delta t)\ ||} &= \frac{1}{||\vec{r}(t) + \mathcal{O}(\Delta t)\ ||} && (1.119)\\
&= \frac{1}{||\vec{r}(t)\ || + \mathcal{O}(\Delta t)} && (1.120)\\
&= \frac{1}{||\vec{r}(t)\ ||} + \mathcal{O}(\Delta t). && (1.121)
\end{aligned}$$

En cada paso de la expresión anterior $\mathcal{O}(\Delta t)$ hace referencia a un término proporcional a $\Delta t$ o de orden superior (por supuesto, en cada paso $\mathcal{O}(\Delta t)$ consiste en una expresión distinta). Ahora, juntando los resultados anteriores, es posible constatar que

$$\begin{aligned}
\frac{||\vec{r}(t + \Delta t) \times \Delta \vec{r}(t)||}{||\vec{r}(t)|| \cdot ||\vec{r}(t + \Delta t)\ ||} &= \frac{||\ \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)}{||\vec{r}(t)||} \left( \frac{1}{||\vec{r}(t)\ ||} + \mathcal{O}(\Delta t) \right) && (1.122)\\
&= \frac{||\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||}{||\vec{r}(t)||^2} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) && (1.123)
\end{aligned}$$

En consecuencia, el ángulo $\Delta\alpha$ viene dado por

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= \arcsin \left[ \frac{||\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||}{||\vec{r}(t)||^2} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right] && (1.124)\\
&= \frac{||\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||}{||\vec{r}(t)||^2} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), && (1.125)
\end{aligned}$$

donde hemos expandido la función arcsin en serie de Taylor, quedándonos solo con el término de menor orden en $\Delta t$. La ecuación (1.125) constituye el resultado deseado. Nos muestra el valor de $\Delta\alpha$ cuando el lapso de tiempo $\Delta t$ es muy pequeño. La utilidad de este resultado es que nos permite conocer la rapidez angular de la partícula $P$, con respecto al origen $\mathcal{O}$, en el instante $t$. La rapidez angular puede ser definida como el ángulo barrido por $\vec{r}$ por unidad de tiempo. Esto es:

$$\omega_{\mathcal{O}} \equiv \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{||\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||}{||\vec{r}(t)||^2}. \tag{1.126}$$

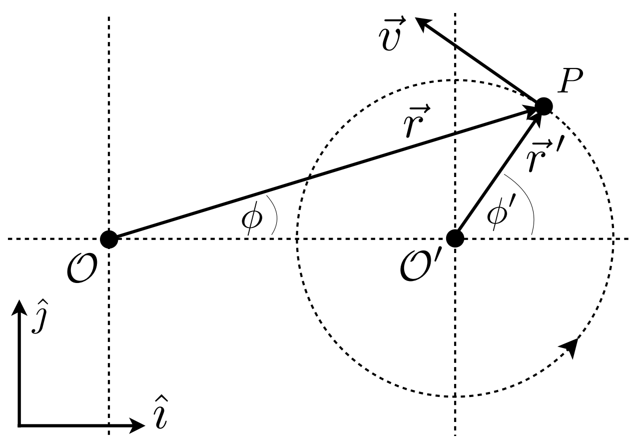
La etiqueta $\mathcal{O}$ enfatiza el hecho de que la rapidez angular es con respecto al origen $\mathcal{O}$. Para terminar esta discusión, hagamos algo aun mejor. Definiremos un vector velocidad angular $\vec{\omega}$ a partir de la definición anterior simplemente eliminando el símbolo $||\cdot||$. Es decir:

$$\vec{\omega}_{\mathcal{O}} \equiv \frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{||\vec{r}(t)||^2}. \tag{1.127}$$

Este es el principal resultad de esta sección. Notemos que, por definición, la velocidad angular es $\vec{\omega}_{\mathcal{O}}$ perpendicular a los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$, con su orientación determinada por la regla de la mano derecha.

## 1.19 Un ejemplo con velocidad angular

La velocidad angular es un vector, por lo tanto está caracterizado por su magnitud $\omega = ||\vec{\omega}||$, y dirección $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$. Para comprender el significado de ambas cantidades, comencemos analizando una situación simple: Una partícula en movimiento circular uniforme (de rapidez constante $\nu$) en torno a una circunferencia de radio $R$ con origen $\mathcal{O}'$:




Supongamos que en $t = 0$ la posición de la partícula coincide con $R\,\hat{\imath}$. La figura nos invita a utilizar coordenadas cilíndricas para describir el movimiento. La posición con respecto a $\mathcal{O}'$ en coordenadas cilíndricas puede ser escrita como

$$\vec{r}\,' = R\,\hat{\rho}\,', \qquad \hat{\rho}\,' = \cos\phi'\,\hat{\imath} + \sin\phi'\,\hat{\jmath}. \tag{1.128}$$

La velocidad es

$$\vec{v}\,' = R\,\dot{\phi}'\,\hat{\phi}' \tag{1.129}$$

Calculando el módulo, vemos que $R|\dot{\phi}'| = \nu$. Dado que el movimiento de la partícula es tal que el ángulo crece, debemos tomar $\dot{\phi}' > 0$, y por lo tanto obtenemos $\dot{\phi}' = \nu/R$. Continuando, la velocidad angular con respecto a $\mathcal{O}'$ es:

$$\vec{\omega}_{\mathcal{O}'} = \frac{1}{R^2}(R\,\hat{\rho}\,') \times (R\,\dot{\phi}'\,\hat{\phi}'), \tag{1.130}$$

$$= \frac{\nu}{R}\hat{k}, \tag{1.131}$$

donde reemplazamos $\dot{\phi}' = \nu/R$. Por lo tanto, vemos que la velocidad angular es un vector que apunta en la dirección $\hat{k}$, hacia afuera de la figura. Claramente, la rapidez angular es

$$\omega_{\mathcal{O}'} = \dot{\phi}' = \frac{\nu}{R}. \tag{1.132}$$

Calculemos ahora en la velocidad angular $\vec{\omega}_{\mathcal{O}}$ con respecto a un origen $\mathcal{O}$ a una distancia $D$ hacia la izquierda de $\mathcal{O}'$. La posición de la partícula con respecto a $\mathcal{O}$ puede ser expresada como

$$\vec{r} = D\,\hat{\imath} + \vec{r}\,' \tag{1.133}$$

$$= D\,\hat{\imath} + R\hat{\rho}\,' \tag{1.134}$$

$$= (D + R\cos\phi')\hat{\imath} + R\sin\phi'\,\hat{\jmath}. \tag{1.135}$$

Luego, dado que la separación $D$ es constante, la velocidad de acuerdo a $\mathcal{O}$ es la misma velocidad que registra $\mathcal{O}'$:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' = R\,\omega_{\mathcal{O}'}\,\hat{\phi}' = R\,\frac{\nu}{R}\,\hat{\phi}' = \nu\,\hat{\phi}' \tag{1.136}$$

Sigue que la velocidad angular viene dada por

$$\vec{\omega}_{\mathcal{O}} = \frac{(D\,\hat{\imath} + R\,\hat{\rho}\,') \times R\,\omega_{\mathcal{O}'}\,\hat{\phi}'}{(D + R\cos\phi')^2 + R^2\sin^2\phi'}, \tag{1.137}$$

$$= \omega_{\mathcal{O}'}\frac{\hat{k} + \Delta\,\hat{\imath} \times\ \hat{\phi}'}{1 + \Delta^2 + 2\Delta\cos\phi'}, \tag{1.138}$$

donde hemos definido $\Delta \equiv D/R$. Para proseguir, notemos que

$$\hat{\imath} \times \hat{\phi}' = \hat{\imath} \times (-\sin\phi'\,\hat{\imath} + \cos\phi'\,\hat{\jmath}) \tag{1.139}$$

$$= \cos\phi'\,\hat{\imath} \times \hat{\jmath} \tag{1.140}$$

$$= \cos\phi'\,\hat{k}. \tag{1.141}$$

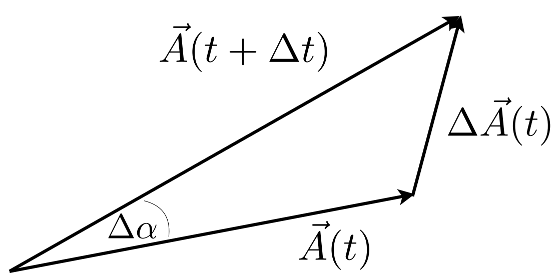
Luego, dado que la partícula está inicialmente en $\vec{r}' = R\hat{\imath}$, sigue que $\phi' = \omega_{\mathcal{O}'}t$, y la velocidad angular con respecto a $\mathcal{O}$ puede ser escrita como

$$\vec{\omega}_{\mathcal{O}} = \frac{\nu}{R}\frac{1 + \Delta\,\cos(\omega_{\mathcal{O}'}t)}{1 + \Delta^2 + 2\Delta\cos(\omega_{\mathcal{O}'}t)}\hat{k}, \tag{1.142}$$

donde reemplazamos $\dot{\phi}' = \nu/R$. Ahora notemos que si $\Delta > 1$, entonces el numerador de la expresión necesariamente cambiará su signo para ciertos valores de $t$, revelando que la dirección $\hat{\omega}$ cambiará abruptamente cada cierto tiempo. Esto es simplemente porque, de acuerdo a un observador en $\mathcal{O}$ la partícula baila periódicamente hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje $\hat{\jmath}$. En cambio, si $\Delta < 1$ el signo no cambiará (al igual que para $\mathcal{O}'$), revelando que la partícula está moviéndose alrededor de $\mathcal{O}$.

## 1.20 Generalización de velocidad angular

Pensemos ahora en un vector arbitrario $\vec{A}(t)$ dependiente del tiempo. Al igual que la posición $\vec{r}(t)$, su variación en el tiempo hará que su dirección barra un ángulo, tal como lo muestra la siguiente figura:



De esta forma, tal como lo hicimos para la posición, es posible definir una velocidad angular asociado al vector $\vec{A}$. Los pasos a seguir son idénticos a aquellos mostrados en la Sección 1.18, dando como resultado la siguiente definición:

$$\vec{\omega}_A \equiv \frac{1}{||\vec{A}||^2}\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt}. \tag{1.143}$$

Utilicemos esta definición para derivar un resultado útil. Primero, apliquemos un producto cruz con $\vec{A}$ en ambos lados de la expresión anterior:

$$\vec{A} \times \vec{\omega}_A \equiv \frac{1}{||\vec{A}||^2}\vec{A} \times (\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt}). \tag{1.144}$$

Consideremos ahora la siguiente propiedad vectorial $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$:

$$\vec{A} \times \vec{\omega}_A = \frac{1}{||\vec{A}||^2}\vec{A} \times (\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt}) \tag{1.145}$$

$$= \frac{1}{||\vec{A}||^2}\left[\vec{A}\left(\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}\right) - \frac{d\vec{A}}{dt}||\vec{A}||^2\right]. \tag{1.146}$$

Para simplificar esta expresión, notemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\vec{A}||^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}. \tag{1.147}$$

Reemplazando, obtenemos

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{A}}{2||\vec{A}||^2}\frac{d}{dt}||\vec{A}||^2 + \vec{\omega}_A \times \vec{A}. \tag{1.148}$$

Este resultado puede re-escribirse de la siguiente manera

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \hat{A}\frac{d}{dt}||\vec{A}|| + \vec{\omega}_A \times \vec{A}. \tag{1.149}$$

donde $\hat{A} = \vec{A}/\|\vec{A}\|$ es el vector unitario que apunta en la dirección $\vec{A}$. En general, un vector puede cambiar su largo y su dirección. La ecuación (1.149) precisamente da cuenta de esta situación: Notemos que los dos términos son perpendiculares entre sí. El primer término nos describe cómo cambia el largo de $\vec{A}$ mientras que el segundo término describe el ritmo de giro de $\vec{A}$.

Para concluir esta discusión, notemos que en el caso particular en que el largo del vector $||\vec{A}||$ permanece constante, vemos que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{A}. \tag{1.150}$$

Notemos que el lado derecho de (1.150) es perpendicular a $\vec{A}$. Por lo tanto, sigue que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \perp \vec{A}. \tag{1.151}$$

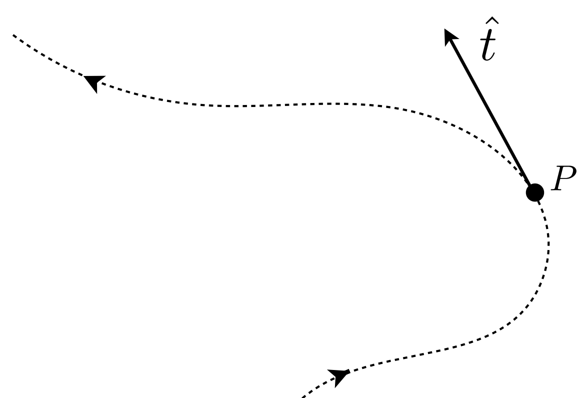
Pero esto ya lo sabíamos, dado que a partir de (1.147) vemos que si el largo de $\vec{A}$ es constante, entonces $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, lo que también nos informa que $\frac{d\vec{A}}{dt}$ es perpendicular a $\vec{A}$.

## 1.21 Vectores tangente y normal

Consideremos ahora una descripción de cantidades cinemáticas que no depende de la ubicación del origen. Comencemos por definir un vector unitario $\hat{t}$ a partir de la velocidad de la siguiente forma:

$$\hat{t} \equiv \frac{\vec{v}}{\nu}, \tag{1.152}$$

donde $\nu = ||\vec{v}||$ es la rapidez. El vector unitario $\hat{t}$ nos indica la dirección en la cual se mueve la partícula en cierto instante. Luego, necesariamente es un vector tangente a la trayectoria de la partícula, tal como lo muestra la siguiente figura:



Evidentemente, la velocidad puede ser expresada en términos de la rapidez y el vector tangente como:

$$\vec{v} = \nu \hat{t}. \tag{1.153}$$

Luego, la aceleración viene dada por

$$\vec{a} = \dot{\nu}\hat{t} + \nu\dot{\hat{t}}. \tag{1.154}$$

Dado que el largo de $\hat{t}$ es constante, a partir de (1.151), sabemos que $\dot{\hat{t}}$ debe ser perpendicular a $\hat{t}$. Luego, podemos definir un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a $\hat{t}$, llamado vector normal, de la siguiente manera:

$$\hat{n} \equiv \left\| \frac{d\hat{t}}{dt} \right\|^{-1} \frac{d\hat{t}}{dt}. \tag{1.155}$$

Más aún, a partir de (1.143), es directo constatar que la velocidad angular con la cual gira $\hat{t}$ en el instante $t$ viene dada por:

$$\vec{\omega}_{\hat{t}} = \left\| \frac{d\hat{t}}{dt} \right\| \hat{t} \times \hat{n}. \tag{1.156}$$

Dado que $\hat{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}$ es un vector unitario, denominado el vector bi-normal, vemos que

$$\left\| \frac{d\hat{t}}{dt} \right\| = \omega_{\hat{t}}, \tag{1.157}$$

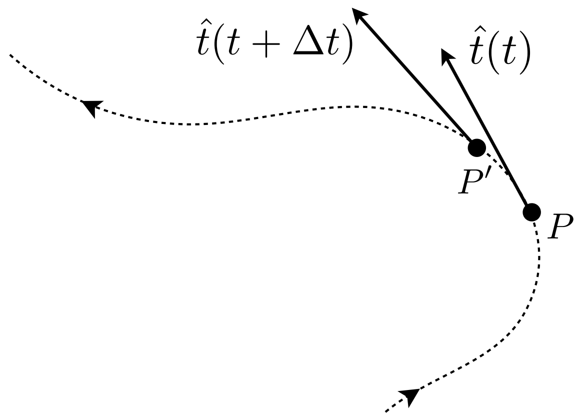
donde $\omega_{\hat{t}}$ es la rapidez angular del vector unitario $\hat{t}$. Esto nos permite escribir la relación entre $\dot{\hat{t}}$ y $\hat{n}$ de una forma un poco más elegante:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \omega_{\hat{t}}\,\hat{n}. \tag{1.158}$$

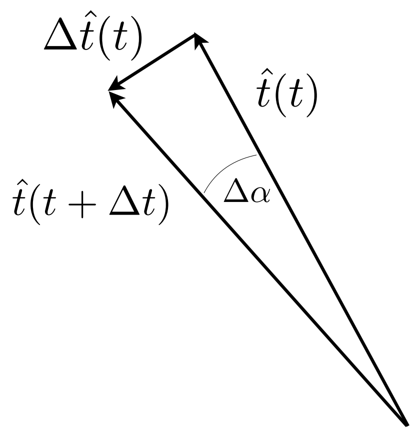
Esto quiere decir que podemos re-expresar la aceleración como:

$$\vec{a} = \dot{\nu}\hat{t} + \nu\omega_{\hat{t}}\hat{n}. \tag{1.159}$$

Tratemos de entender con mayor claridad qué rol cumple $\hat{n}$. Para ello, consideremos a la partícula en movimiento a lo largo de su trayectoria en los instantes $t$ y $t + \Delta t$. Los vectores tangentes en dichos instantes serán $\hat{t}(t)$ y $\hat{t}(t + \Delta t)$, tal como lo muestra la siguiente figura:




Los dos vectores $\hat{t}(t)$ y $\hat{t}(t+\Delta t)$ pueden ser visualizados en conjunto de la siguiente forma:




El ángulo $\Delta\alpha$ entre ambos vectores corresponde al ángulo barrido por $\hat{t}(t)$ en un tiempo $\Delta t$. Luego, gracias a la discusión de la Sección 1.20, podemos escribir

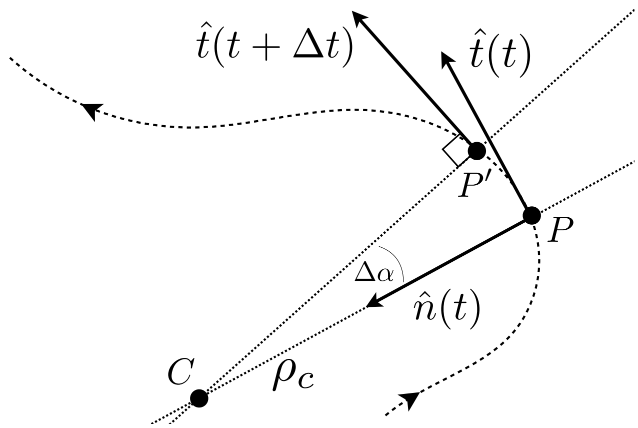
$$\Delta\alpha = \omega_{\hat{t}}\,\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \tag{1.160}$$

Por otro lado, la diferencia entre ambos vectores es $\Delta\hat{t}(t) = \hat{t}(t+\Delta t) - \hat{t}(t)$. Si expandimos $\hat{t}(t+\Delta t)$ en serie de Taylor, vemos que

$$\Delta\hat{t}(t) = \frac{d\hat{t}}{dt}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \tag{1.161}$$

$$= \hat{n}\,\omega_{\hat{t}}\,\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2), \tag{1.162}$$

de donde sigue que $\hat{n}$ y $\Delta\hat{t}$ son paralelos, salvo por una pequeña corrección de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ que podemos desestimar. Volvamos a observar la trayectoria de la partícula, e incluyamos al vector $\hat{n}$ y el ángulo barrido $\Delta\alpha$:




Si extendemos una recta a lo largo de $\hat{n}$, esta recta eventualmente cruzará al plano perpendicular al vector $\hat{t}(t+\Delta t)$, en el punto $C$. El ángulo entre el plano y la recta será $\Delta\alpha$. Además, habrá una distancia $\rho_c$ entre $C$ y $P$. De la figura, es posible apreciar que

$$\Delta\alpha = \frac{\|\Delta r(t)\|}{\rho_c} \tag{1.163}$$

donde $\|\Delta r(t)\|$ es la distancia entre $P$ y $P'$. Con ayuda de los resultados de la sección 1.18, otra forma de escribir esto es

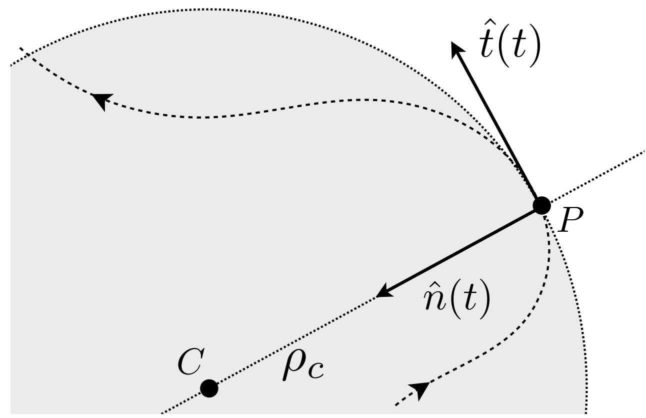
$$\Delta\alpha = \frac{\|\Delta r(t)\|}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\rho_c}, \tag{1.164}$$

$$= \nu\frac{\Delta t}{\rho_c} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{1.165}$$

Luego, tomando el límite $\Delta t \to 0$, vemos que

$$\rho_c = \frac{\nu}{\omega_{\hat{t}}}. \tag{1.166}$$

La cantidad $\rho_c$ se llama radio de curvatura, y denota el radio de la circunferencia, con centro $C$, alrededor de la cual la partícula gira en el instante $t$ (ver figura a continuación):




El radio y la posición del centro de dicha circunferencia cambian en la medida que la partícula avanza a lo largo de la trayectoria. Para concluir, volvamos a la expresión para la aceleración. Utilizando (1.166) en (1.159), obtenemos

$$\vec{a} = \dot{\nu}\,\hat{t} + \frac{\nu^2}{\rho_c}\hat{n}. \tag{1.167}$$

De esta forma, vemos que la aceleración se descompone a lo largo de $\hat{t}$ y $\hat{n}$. La componente $\dot{\nu}$ se llama aceleración tangencial, mientras que la componente $\nu^2/\rho_c$ se denomina aceleración centrípeta (puesto que apunta hacia el centro de giro de la trayectoria de la partícula en el instante $t$).