VI. DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

En este capítulo estudiaremos la dinámica de un sistema de **n** partículas de masas $m_1, m_2, ..., m_n$, cuyos vectores posición con respecto al origen de un sistema de coordenadas inercial son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$

VI.1 Conceptos básicos

• Centro de masa.
Se define el centro de masa de un sistema de n partículas como el punto cuyo vector posición $\vec{R}_{CM}$ está dado por:

$$\vec{\mathbf{R}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2 + \ldots + m_n \vec{\mathbf{r}}_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}$$

donde

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

es la masa total del sistema. La definición vectorial del centro de masa es equivalente al conjunto de las tres expresiones escalares siguientes,

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

Podemos ahora deducir una expresión para la velocidad del centro de masa, v_{CM},

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{R}}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad de la partícula i. La aceleración del centro de masa, $\vec{\mathbf{a}}_{CM}$ es:

$$\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i}{M}$$

con $\vec{\mathbf{a}}_i$, la aceleración de la partícula i. El momentum del centro de masa, $\vec{\mathbf{P}}_{CM}$, queda definido por:

$$\vec{\mathbf{P}}_{CM} = M\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{p}}_i$$

es decir, es igual a la cantidad de momentum total del sistema. Derivando esta expresión con respecto al tiempo y asumiendo que hay conservación de masa para cada partícula se obtiene:

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\mathbf{v}}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\mathbf{a}}_i = M\,\vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

• **Ecuación de movimiento del centro de masa**

Consideremos la ecuación de movimiento de la partícula i-ésima, sometida a una fuerza neta $\mathbf{F}_i$,

$$m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i$$

La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_i$ que actúa sobre la partícula i-ésima se puede descomponer en una fuerza externa y una fuerza interna al sistema,

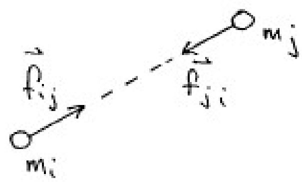
$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \vec{\mathbf{F}}_i^{\,int}$$

donde la componente interna se debe a la interacción de la partícula i-ésima con el resto de las partículas que forman el sistema,

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{\,int} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

y claramente se cumple que

$$\vec{\mathbf{f}}_{ij} = -\vec{\mathbf{f}}_{ji}$$



La componente externa de la fuerza, $\vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$, se debe a la resultante de todas aquellas fuerzas externas al sistema de n partículas que actúan sobre la partícula i-ésima. En consecuencia, podemos escribir que

$$m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

Sumando sobre las n partículas que forman el sistema tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

El término que involucra las fuerzas internas se anula, con lo cual la ecuación de movimiento del centro de masa es

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

o en forma equivalente

$$M\,\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

Esta expresión indica que el centro de masa se mueve como una partícula cuya masa es igual a la masa total del sistema y sobre la que se ejerce una fuerza neta igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema. En ausencia de fuerzas externas al sistema se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} = 0$$

con lo cual

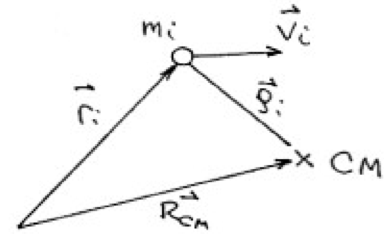
$$\frac{d\,\vec{\mathbf{P}}_{CM}}{d\,t} = 0$$

lo cual implica que el momentum total del sistema se conserva,

$$\vec{\mathbf{P}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i = \text{constante}$$

• **Momentum angular y torque**

Estudiamos ahora algunos aspectos relacionados con los conceptos de momentum angular y torque en un sistema de partículas. Con respecto a un sistema inercial con origen en el punto 0, el momentum angular de la i-ésima partícula de masa m_i es



$$\vec{\mathbf{l}}_{i\,(o)} = \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i$$

El momentum angular total del sistema de partículas con respecto a 0 es entonces:

$$\vec{\mathbf{L}}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{l}}_{i\,(o)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i$$

La ecuación de movimiento para el momentum angular total es:

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{L}}_O}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \frac{d\,\vec{\mathbf{p}}_i}{d\,t}$$

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{L}}_O}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \{\vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \vec{\mathbf{F}}_i^{\,int}\}$$

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{L}}_O}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,int}\ .$$

El término relacionado con las $\vec{\mathbf{F}}^{\,int}$ se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,int} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,int} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{f}}_{ij} - \vec{\mathbf{r}}_j \times \vec{\mathbf{f}}_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j) \times \vec{\mathbf{f}}_{ij} = 0$$

expresión que se anula debido a que la fuerza $\vec{\mathbf{f}}_{ij}$ de interacción entre las partículas i y j actúa en la dirección $(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j)$. Luego,

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_O}{dt} = \vec{\tau}_o^{\,ext}$$

donde

$$\vec{\tau}_o^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

corresponde al torque total con respecto al punto 0 de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Si $\vec{\tau}_o^{\,ext} = 0$, $\vec{\mathbf{L}}_o$ se conserva.

Se puede calcular el momentum angular con respecto a otro punto en el sistema. En particular el momento angular **en torno** al centro de masa (CM) se expresa como

$$\vec{\mathbf{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

lo cual también puede expresarse como:

$$\vec{\mathbf{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i (\vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

desarrollando el producto vectorial se obtiene que

$$\vec{\mathbf{L}}_{CM} = \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i\right] \times \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0$$

se concluye que

$$\vec{\mathbf{L}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

es decir, el momentum angular en torno al centro de masa es igual al momentum angular relativo con respecto al centro de masa. Se puede deducir facilmente que la relación entre $\vec{\mathbf{L}}_0$ y $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$ es la siguiente:

$$\vec{\mathbf{L}}_O = \vec{\mathbf{R}}_{CM} \times \vec{\mathbf{P}}_{CM} + \vec{\mathbf{L}}_{CM}$$

relación que se conoce como **teorema de Koenig**.

Derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}}_O = \vec{\tau}_o^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} = \vec{\mathbf{R}}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{CM}$$

relación de la cual se concluye que

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}^{\,ext}$$

en que

$$\vec{\tau}_{CM}^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

es el torque con respecto al centro de masa de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Si $\vec{\tau}_{CM}^{\,ext} = 0$, $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$ se conserva.

Finalmente, podemos calcular el momentum angular del sistema con respecto a un punto P arbitrariamente seleccionado:

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_{Pi} \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_P) \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Se concluye que:

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \vec{\mathbf{L}}_O - \vec{\mathbf{r}}_P \times \vec{\mathbf{P}}_{CM}$$

La ecuación de movimiento para $\vec{\mathbf{L}}_P$ se obtiene directamente derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_P}{dt} = \vec{\tau}_P^{\,ext} - \vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\mathbf{P}}_{CM}$$

donde

$$\vec{\tau}_P^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_P) \times \mathbf{F}_i^{\,ext}$$

es el torque con respecto al punto P de las fuerzas externas y $\vec{\mathbf{v}}_P$ es la velocidad del punto P en el sistema inercial. Se deja como ejercicio encontrar la ecuación del momentum angular relativo al punto P.

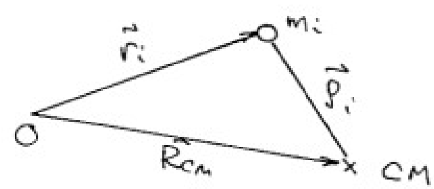
• **Energía cinética**

La energía cinética K de un sistema de partículas está dada por la suma de las energías individuales,

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 \right\}$$

Sin embargo, podemos expresar la posición de la partícula i-ésima en términos de la posición del centro de masa ($\vec{R}_{CM}$) y de la posición relativa de la partícula cor respecto al centro de masa ($\vec{\rho}_i$),

$$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{R}}_{CM} + \vec{\rho}_i$$



Derivando con respecto al tiempo, tenemos que

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

donde ρ_i es la velocidad relativa al centro de masa. Por lo tanto, la energía cinética del sistema puede expresarse también como

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i\right) \bullet \left(\vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i\right)$$

$$K = \frac{1}{2} M \, \mathbf{v}_{CM}^2 + \mathbf{v}_{CM} \bullet \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}$$

Además, como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

se concluye, por definición de la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{CM}$, que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

Entonces,

$$K = \frac{1}{2} M \, \mathbf{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}$$

$$K = K_{CM} + K_R$$

es decir, la energía cinética total de un sistema de partículas es igual a la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa (K_{CM}) más la suma de la energía cinética de las partículas individuales relativa al centro de masa (K_R). Este resultado, junto al hecho que las coordenadas relativas al centro de masa satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0$$

muestran la importancia de poder asociar un sistema de coordenadas al centro de masa para simplificar la descripción del sistema de partículas.

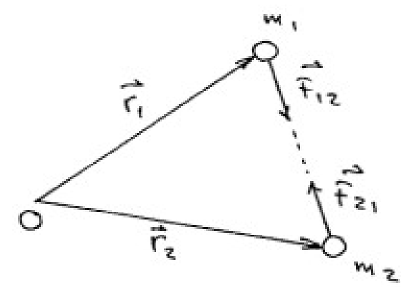
VI.2 **Aplicaciones**

• Movimiento de dos partículas interactuantes

Consideremos dos partículas, de masas m_1 y m_2, que interactúan por medio de una fuerza central y que no existen fuerzas externas sobre ellas (sistema aislado). Las ecuaciones de movimiento, con respecto a un sistema inercial con origen en 0, son:

$$m_1 \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_{21}$$



y las fuerzas satisfacen que

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} = \vec{\mathbf{F}}$$

La solución de estas ecuaciones es, en general, compleja por la forma en que se mezclan las coordenadas $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ a través de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. Sin embargo, introduciendo la coordenada del centro de masa,

$$\vec{\mathbf{R}}_{CM} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2}{M}$$

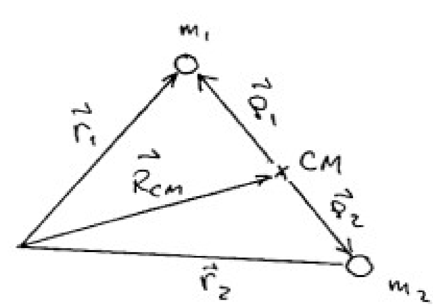
con M igual a la masa total del sistema ($m_1 + m_2$), tenemos que la ecuación del centro de masa es

$$M \vec{\mathbf{R}}_{CM} = M \vec{\mathbf{a}}_{CM} = 0$$

Esta ecuación implica que el momentum total del sistema se conserva,

$$\vec{\mathbf{P}}_{CM} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \text{constante}$$

Es posible describir la posición de las partículas en relación a un nuevo sistema de coordenadas, cuyo origen coincide con el centro de masa, a través de las coordenadas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$



$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{R}}_{CM} + \vec{\rho}_1$$

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_{CM} + \vec{\rho}_2$$

Las ecuaciones del movimiento se reducen a

$$m_1 \ddot{\vec{\rho}}_1 = \mathbf{F}(|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|)$$

$$m_2 \ddot{\vec{\rho}}_2 = - \mathbf{F}(|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|)$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que

$$\ddot{\vec{\rho}}_1 - \ddot{\vec{\rho}}_2 = \{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\} \mathbf{F}(|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|)$$

Definiendo la posición $\vec{\mathbf{r}}$ de la partícula 1 relativa a la partícula 2, como

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$$

tenemos que

$$\mu \ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}}(r)$$

donde μ se conoce como masa reducida y está definida por:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

La ecuación de movimiento para $\vec{r}(t)$ describe el movimiento de la partícula 1 relativa a la partícula 2 y corresponde al caso de **una** partícula de masa reducida μ sometida a la fuerza central $\vec{\mathbf{F}}(r)$. Así, el hecho que m_2 se mueve en forma relativa al centro de masa se toma directamente en cuenta al usar la masa μ.

De la manera indicada, el problema del movimiento de dos cuerpos sujetos sólo a fuerzas internas se reduce al problema de una partícula de masa reducida μ moviéndose en un campo central. Un ejemplo típico es el caso de dos cuerpos bajo la acción de la fuerza gravitacional.

• Choque entre dos partículas

Estudiaremos el choque entre dos partículas bajo el supuesto que la fuerza con que interactúan las partículas durante el proceso es interna. En consecuencia, al no existir fuerzas externas, se conserva el momentum lineal total del sistema:

$$\vec{\mathbf{P}}_{CM} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2 = \vec{\mathbf{P}}'_{CM}$$

donde los vectores sin y con prima se refieren a valores de momentum antes y después del choque, respectivamente. Además, el balance energético indica que la energía total debe conservarse. Luego suponiendo que no hay cambios de energía potencial se tiene que

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'^2_2 + Q$$

donde Q indica la pérdida o ganancia de energía que ocurre como resultado del choque. Hay 3 casos a considerar:

a) $Q = 0$, el choque es elástico y no hay cambio en la energía cinética total;

b) $Q > 0$, el choque es elástico y hay una pérdida de energía cinética durante el choque;

c) $Q < 0$, existe una ganancia de energía cinética en el choque.

Si definimos la velocidad relativa entre las partículas, antes y después del choque como,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$$

es fácil demostrar que la ecuación de conservación de energía equivale a:

$$\frac{1}{2}\mu\, v^2 = \frac{1}{2}\mu\, v'^2 + Q$$

donde μ es la masa reducida para el par de partículas. Definiendo el coeficiente de restitución ε como

$$\varepsilon = \frac{|\vec{v}'|}{|\vec{v}|}$$

se puede concluir que

$$Q = \frac{1}{2}\mu\, v^2 (1 - \varepsilon^2)$$

En el caso de un choque perfectamente elástico ($Q = 0$) se tiene que $\varepsilon = 1$. Si el choque es perfectamente inelástico ($|v'| = 0$) se tiene que

$$\varepsilon = 0 \quad ; \quad Q = \frac{1}{2}\mu\, v^2$$

En este caso las partículas permanecen unidas. En situaciones físicas reales, ε toma un valor intermedio entre los extremos previamente señalados.