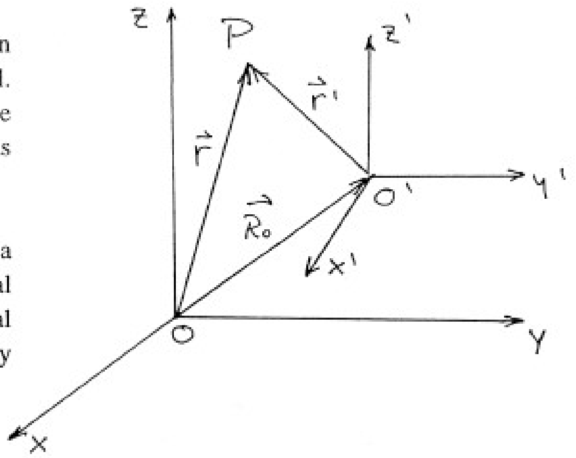
V MOVIMIENTO RELATIVO



En el proceso de describir el movimiento de un cuerpo es en ciertos casos conveniente utilizar un sistema de referencia móvil. Como en general este sistema de referencia no es inercial, se debe ejercer un gran cuidado para describir correctamente las leyes del movimiento.

Consideremos un sistema de referencia inercial S y un sistema de referencia S' que puede trasladarse y rotar con respecto al sistema inercial. El movimiento del sistema S' con respecto al sistema S queda determinado por la posición, velocidad y aceleración del origen de coordenadas S':

$$\vec{\mathbf{OO}'} = \vec{\mathbf{R}}_o(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_o = \left(\frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt}\right)_S = \dot{\vec{\mathbf{R}}}_o(t)$$

$$\vec{\mathbf{a}}_o = \left(\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_o}{dt^2}\right)_S = \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_o(t)$$

además de los parámetros que describen la rotación del sistema S' con respecto al sistema S, tales como la velocidad angular $\vec{\omega}_0(t)$ y la aceleración angular $\dot{\vec{\omega}}_0(t)$

La posición del punto P con respecto al sistema inercial S está definida por

$$\vec{\mathbf{OP}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$$

mientras que su velocidad y aceleración están dadas por

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)_S$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \left(\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right)_S$$

Por otra parte, la posición del punto P con respecto al sistema en movimiento S' está expresada por:

$$\vec{\mathbf{O'P}} = \vec{\mathbf{r}}'(t)$$

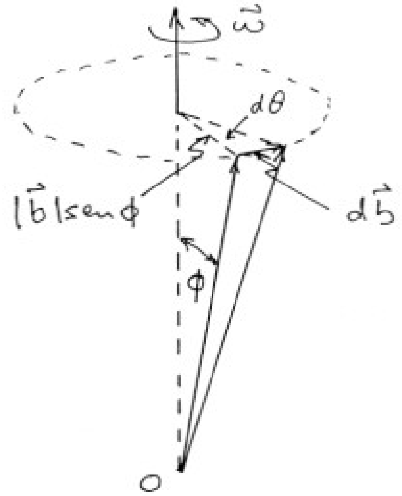
mientras que su velocidad y aceleración relativas a S' están dada por

$$\vec{\mathbf{v}}'(t)_{S'} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_{S'} \qquad \vec{\mathbf{a}}'(t)_{S'} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{v}}'}{dt}\right)_{S'}$$

Notar que **v**' y **a**' son las velocidades y aceleraciones medidas por un observador en reposo con respecto al sistema S' pero en movimiento con respecto al sistema S.

V.1 Composición de velocidades y aceleraciones

El propósito de esta sección es determinar la relación que existe entre las velocidades y aceleraciones medidas en los sistemas S y S'. Como un paso previo para derivar estas relaciones, se analiza a continuación la variación temporal de un vector de magnitud constante que gira con velocidad angular ω en torno a un eje de rotación. En efecto, sea $\vec{\mathbf{b}}(t)$ un vector arbitrario tal que $|\vec{\mathbf{b}}| = b_o$ (constante).



En un intervalo de tiempo dt, el extremo del vector $\vec{\mathbf{b}}$ se desplaza en la cantidad $d\vec{\mathbf{b}}$ en la dirección perpendicular al plano formado por $\vec{\omega}$ y $\vec{\mathbf{b}}$

$$|d\vec{\mathbf{b}}| = b_o \,\text{sen}\,\phi \; d\theta$$

Por lo tanto

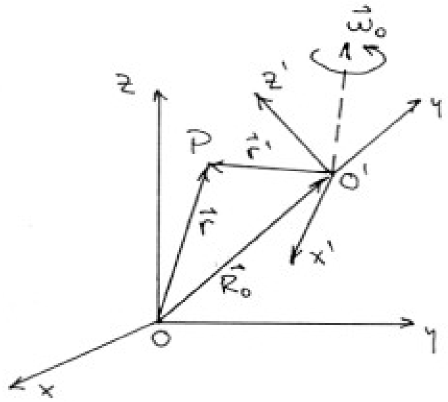
$$\left|\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}\right| = b_o \frac{d\theta}{dt}\,\text{sen}\,\phi$$

$$= b_o\,|\vec{\omega}|\,\text{sen}\,\phi$$

de lo cual se concluye que

$$\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{b}}$$

- **Velocidad**



Consideremos la situación general mostrada en la figura adjunta, donde el sistema S' se traslada con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_O(t)$ y rota con velocidad angular $\vec{\omega}_O(t)$ con respecto al sistema inercial S. Una partícula P está descrita por los vectores posiciones $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{r}}'$ con respecto a S y S', respectivamente. Se cumple que:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}}_O + \vec{\mathbf{r}}'$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo en el sistema S,

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_o + \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S$$

Deducimos ahora una expresión para la derivada temporal del vector posición **r**', en el sistema S :

$$\vec{\mathbf{r}}' = x'\,\hat{\mathbf{i}}' + y'\,\hat{\mathbf{j}}' + z'\,\hat{\mathbf{k}}'$$

Su derivada es:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}_S = \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{k}}' + x'\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}$$

La derivada temporal de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$, que giran con velocidad angular $\vec{\omega}_O$, se obtiene del resultado anteriormente demostrado. Así,

$$\frac{d\,\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \vec{\omega}_o \times \hat{\mathbf{i}}' \qquad \frac{d\,\hat{\mathbf{j}}'}{dt} = \vec{\omega}_o \times \hat{\mathbf{j}}' \qquad \frac{d\,\hat{\mathbf{k}}'}{dt} = \vec{\omega}_o \times \hat{\mathbf{k}}'$$

Se concluye entonces que

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}'$$

De este modo ,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_o(t) + \vec{\mathbf{v}}'(t) + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}'$$

expresión que permite relacionar la velocidad absoluta de una partícula en un sistema inercial S con la correspondiente velocidad relativa respecto a un sistema no-inercial S'.

Si el punto P permanece en reposo con respecto al sistema S', su velocidad con respecto al sistema S se denomina **velocidad de arrastre** $\mathbf{v}_A$

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\omega}_O \times \vec{\mathbf{r}}'$$

que corresponde a la velocidad absoluta de un punto fijo en el sistema no-inercial con respecto al sistema inercial. Luego, podemos expresar la velocidad absoluta de una partícula como

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}_A$$

es decir , como la superposición de la velocidad relativa de la partícula y la velocidad de arrastre correspondiente.

- **Aceleración**

La aceleración en el sistema inercial S se expresa como:

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_o}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\,\vec{\omega}_o}{dt}\right)_S \times \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\omega}_o \times \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S$$

Es simple demostrar que

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}'$$

y que:

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}'}{dt}\right)_S = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{v}}'$$

Por lo tanto

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_o + \vec{\mathbf{a}}' + \dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}') + 2\,\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{v}}'$$

donde los tres últimos términos de la derecha representan aceleraciones asociadas a la rotación del sistema no-inercial.

V.2 Dinámica del movimiento relativo

Se desarrollan aquí las ecuaciones de movimiento en el sistema de referencia no-inercial S'. En efecto, en el sistema inercial S las ecuaciones de Newton describen completamente el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza F resultante. En particular, la expresión **ma=F** define el movimiento si la masa se mantiene constante. Expresando esta ecuación de movimiento en término de las coordenadas del sistema en movimiento S' se tiene que:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}_o + m\,\vec{\mathbf{a}}' + m\,\dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{\mathbf{r}}' + m\,\vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}') + 2\,m\,\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{F}}$$

Reordenando la ecuación para un observador en el sistema móvil S', podemos escribir

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_I$$

donde F representa las fuerzas físicas y F_I las fuerzas inerciales (o fuerzas ficticias) que actúan sobre la partícula en el sistema no-inercial. Los términos que componen F_I son:

$$\vec{\mathbf{F}}_I = -\,m\,\vec{\mathbf{a}}_o + \vec{\mathbf{F}}_{Co} + \vec{\mathbf{F}}_T + \vec{\mathbf{F}}_{Ce}$$

donde $(-\,m\,\vec{\mathbf{a}}_o)$ es el término inercial asociado a la traslación del sistema S', $\vec{\mathbf{F}}_{co}$ es la fuerza de Coriolis,

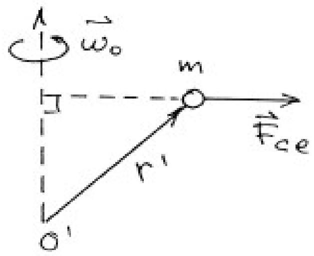
$$\vec{\mathbf{F}}_{Co} = -\,2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

La fuerza de Coriolis sólo existe si la partícula se mueve en S' y/o si $\vec{\mathbf{v}}'$ no es paralelo a $\vec{\omega}_o$; $\vec{\mathbf{F}}_T$ es la fuerza transversal,

$$\vec{\mathbf{F}}_T = -\,m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}'$$

la cual es perpendicular al vector posición de la partícula en el sistema S'. Finalmente $\mathbf{F}_{ce}$ es la fuerza centrífuga

$$\vec{\mathbf{F}}_{Ce} = -\,m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}')$$



la cual es perpendicular al eje de rotación $\vec{\omega}_O$ en la dirección que se aleja de él.

- **Casos especiales**

a) situación en que $\vec{\mathbf{v}}_O$ = constante y $\vec{\omega}_O = \dot{\vec{\omega}}_O = 0$. En este caso:

$$m\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}}' = \vec{\mathbf{F}}$$

Se cumple la II Ley de Newton, $\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}}$ y por lo tanto el sistema S' es inercial

b) situación en que S' se traslada con aceleración $\vec{\mathbf{a}}_o$ pero no rota ($\vec{\omega}_O = 0$ y $\dot{\vec{\mathbf{w}}}_O = 0$). En este caso se tiene que:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} - m\,\vec{\mathbf{a}}_o$$

el sistema S' no es inercial ya que existe la fuerza ficticia $(-\,m\vec{\mathbf{a}}_o)$

c) sistema S' rota sin trasladarse ($\vec{\mathbf{a}}_o = 0$). En este caso:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_{Co} + \vec{\mathbf{F}}_T + \vec{\mathbf{F}}_{Ce}$$

y el sistema S' tampoco es inercial.

V.3 Movimiento sobre la superficie de la Tierra

En la descripción del movimiento de una partícula relativo a un observador sobre la superficie de la Tierra, hemos hasta ahora supuesto que ésta constituye un sistema de referencia inercial. Sin embargo, hay dos efectos que invalidan tal hipótesis: uno se refiere al movimiento de traslación de la Tierra en torno al Sol y el otro a sumovimiento de rotación en torno a su eje. Estos fenómenos hacen que la Tierra sea un sistema de referencia no-inercial, con respecto al cual analizaremos la forma particular que adopta la ecuación de movimiento.

En relación a la importancia relativa del efecto de los movimientos de traslación y rotación, es este último el que afecta en forma más apreciable los movimientos sobre la superficie de la Tierra. En efecto, considerando que la Tierra orbita alrededor del sol con una velocidad media de v_T = 30 km/seg y que el radio medio de la órbita es $R_{S\text{-}T} = 1.49 \times 10^8$ km, tenemos que la aceleración que sufre la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es:

$$a_T = \frac{v_T^2}{R_{S\text{-}T}} = 6 \times 10^{-6} \quad (\text{km seg}^{-2})$$

Por otra parte, la Tierra, cuyo radio es cercano a 6400 km, gira en torno a su propio eje con una rapidez angular

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 7{,}3 \times 10^{-5} \quad (\text{rad seg}^{-1})$$

entonces tenemos que la velocidad máxima de un punto en la superficie, asociada a la rotación de la Tierra es:

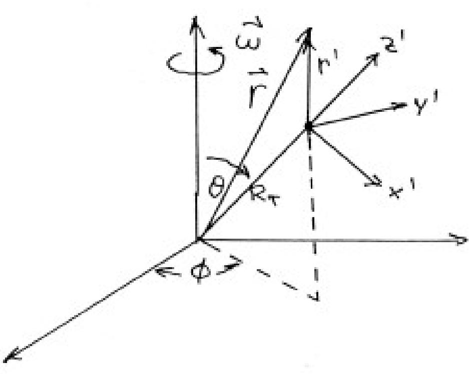
$$v_R = \omega R_T = 0{,}47 \quad (\text{km seg}^{-1})$$

Esto se produce sobre el Ecuador. La aceleración correspondiente es:

$$a_R = \omega^2 R_T = 3{,}4 \times 10^{-5} \quad (\text{km seg}^{-2})$$

es decir, un orden de magnitud mayor que la aceleración derivada del movimiento de traslación en torno al Sol. Por supuesto que la aceleración asociada a la rotación disminuye para puntos cercanos a los polos, haciéndose comparable y aún menores que la aceleración asociada a la traslación. Sin embargo, podemos concluir que el efecto que mayormente afecta las mediciones realizadas por un observador terrestre se debe a la rotación de la Tierra. En particular, la diferencia de la aceleración de rotación entre el Ecuador y los polos explica el achatamiento del planeta manifestado por un radio ecuatorial alrededor de 21 km mayor que el radio polar.

Consideremos un sistema de referencia inercial S(x,y,z) fijo y centrado en el centro de la Tierra, que la suponemos esférica. Esto es posible si despreciamos el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol. La Tierra, rota en torno a su eje con velocidad angular constante ω_0 Asociado a un punto de la superficie definimos un sistema de referencia móvil S'(x',y',z') como se indica en la figura.



La posición de una partícula de masa m, ubicada en el punto P, queda definida por el vector posición $\vec{r}$ con respecto al sistema S y por $\vec{\mathbf{r}}'$ con respecto al sistema S'. La posición del origen O' del sistema S' queda definida por el vector posición $\vec{\mathbf{R}}_o$, ($|\vec{\mathbf{R}}_o| = R_T$) con respecto al sistema S. La ecuación de movimiento de la partícula para un observador en S' es:

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_I$$

donde $\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza gravitacional con que la Tierra atrae a la partícula de masa m,

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{M_T\, m}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

M_T es la masa de la Tierra, y la fuerza inercial que actúa sobre la partícula es

$$\vec{\mathbf{F}}_I = -m\left(\vec{\mathbf{a}}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'\right)$$

La aceleración $\vec{\mathbf{a}}_o$ del origen O' se puede calcular directamente a partir de su velocidad. En efecto,

$$\vec{\mathbf{v}}_o = \frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o$$

Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{a}}_o = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o)$$

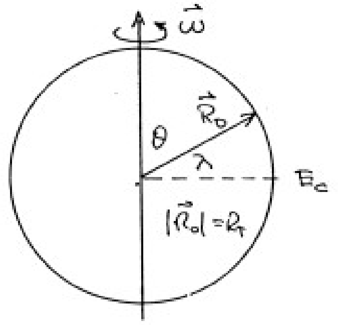
ya que hemos supuesto $\vec{\omega}$, constante. Por la misma razón, la componente transversal de la fuerza inercial se anula. En resumen, la ecuación de movimiento para el punto P en el sistema S' es:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}}'_G - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}') - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

donde la fuerza gravitacional F'_G medida en el sistema S' se define según las siguientes expresiones:

$$\vec{\mathbf{F}}'_G = m\,\vec{\mathbf{g}}'$$

$$\vec{\mathbf{g}}' = -G\frac{M_T}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o)$$



• **aceleración de gravedad a nivel de superficie**
Aplicamos ahora las ecuaciones de movimiento a una partícula situada en el punto O' sobre la superficie de la Tierra y originalmente en reposo con respecto al sistema S' ($\mathbf{r}' = \mathbf{v}' = 0$). En este caso,

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = m\,\vec{\mathbf{g}}'$$

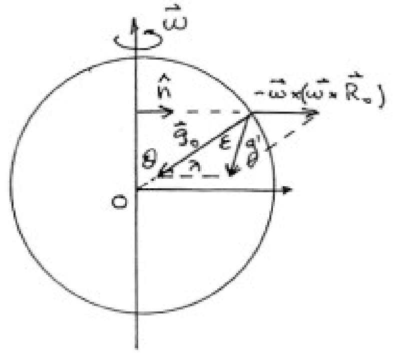
es decir, la aceleración que experimenta la partícula corresponde a la aceleración de gravedad ($\vec{\mathbf{g}}'$) medida en el sistema S', y que se representa mediante la expresión siguiente:

$$\vec{\mathbf{g}}' = -G\frac{M_T}{R_T^3}\vec{\mathbf{R}}_o - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o)$$

Introduciendo la aceleración de gravedad $\vec{g}_0$ medida en el sistema inercial, tenemos que,

$$\vec{\mathbf{g}}' = -\vec{\mathbf{g}}_o\,\hat{\mathbf{r}} + \omega^2 R_T \,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{n}}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ representa la dirección perpendicular al eje de rotación. Se observa que la aceleración de gravedad $\vec{\mathbf{g}}'$ no apunta hacia el centro de la Tierra, sino que en una dirección que forma un ángulo ε con respecto a la dirección radial. Llamando latitud al ángulo λ, se concluye que,



$$g'\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = \omega^2 R_T\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

$$g'\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = \omega^2 R_T\cos\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

es decir,

$$\mathrm{sen}\,\varepsilon = \frac{\omega^2 R_T}{2\,g'}\,\mathrm{sen}\,(2\,\lambda)$$

La máxima desviación se obtiene para para $\lambda = \pi/4$. En este caso,

$$\mathrm{sen}\,\varepsilon_{max} = \varepsilon_{max} = \frac{\omega^2 R_T}{2\,g'} = \frac{1}{10}\,(^\circ)$$

En los casos límites, para posiciones en el Ecuador y los polos, se tiene que:

$$\lambda = 0 \text{ (ecuador)} \qquad g'_{Ec} = g_o - \omega^2 R_T \qquad (\varepsilon = 0)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \text{ (polos)} \qquad g'_{Polo} = g_o \qquad (\varepsilon = 0)$$

lo cual significa que la aceleración de gravedad sobre la superficie terrestre aumenta desde los polos al Ecuador debido a la rotación de la Tierra. De todos modos, la corrección en la aceleración de gravedad debido a la rotación de la Tierra es menor al 1% del valor que se observaría si ésta no rotara.

• Dinámica sobre la superficie terrestre

La ecuación que describe el movimiento de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra y bajo la acción de una fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}$, es:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + m\,\vec{\mathbf{g}}' - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}') - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

El término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}')$ es muy pequeño comparado a los otros términos, razón por la cual no será considerado en el análisis que sigue. La ecuación se reduce entonces a

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + m\,\vec{\mathbf{g}}' - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

donde el último término corresponde a la fuerza de Coriolis. La resolución de la ecuación de movimiento depende de la fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre la partícula.

Caso particular : $\vec{F} = 0$
En este caso la ecuación de movimiento es:

$$\vec{a}' = \vec{g}' - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Integrando en el tiempo la ecuación anterior se obtiene:

$$\vec{v}' = \vec{v}'_o + \vec{g}'\,t - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{r}'_o)$$

donde $\vec{r}'_o$ y $\vec{v}'_o$ son la posición y velocidad inicial de la partícula en el sistema S'. Reemplazando $\vec{v}'$ en la expresión anterior para $\vec{a}'$ se obtiene:,

$$\vec{a}' = \vec{g}' - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'_o - 2\,t\,\vec{\omega} \times \vec{g}' + 4\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{r}'_o))$$

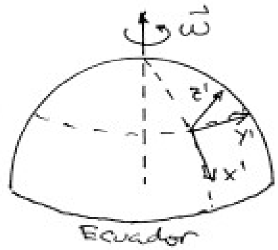
Despreciando los términos proporcionales a ω^2, e integrando la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión para **v**':

$$\vec{v}' = \vec{g}'\,t - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'_o\,t - t^2\,\vec{\omega} \times \vec{g}' + \vec{v}'_o$$

Integrando una vez más se obtiene:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_o(t) + \vec{v}'_o\,t + \frac{1}{2}t^2\,\vec{g}' - t^2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}'_o + \frac{1}{3}\,t\,\vec{g}')$$

Los primeros tres términos corresponden al movimiento de una partícula bajo campo gravitacional, en un sistema inercial. El término restante se debe a la rotación de la Tierra.



La forma que adopta la ecuación de movimiento depende del sistema de coordenadas elegido para describir el movimiento. Analizamos ahora el caso particular cuando se elige un sistema cartesiano (0'x'y'z') tal que z' coincide con el eje vertical (dirección de la plomada), x' apunta hacia el Sur y el eje y' apunta hacia el Este. Además $\vec{g}'$ se supone constante para puntos cercanos a la superficie terrestre,

$$\vec{g}' = -\,g'\,\hat{\mathbf{k}}'$$

También podemos expresar la dirección de rotación en términos de las direcciones del sistema S',

$$\vec{\omega} = \omega_{x'}\,\hat{\mathbf{i}}' + \omega_{z'}\,\hat{\mathbf{k}}'$$

$$\vec{\omega} = -\,\omega\cos(\lambda + \varepsilon)\,\hat{\mathbf{i}}' + \omega\,\mathrm{sen}\,(\lambda + \varepsilon)\,\hat{\mathbf{k}}'$$

en forma aproximada podemos escribir la expresión anterior como

$$\vec{\omega} \cong -\,\omega\cos\lambda\,\hat{\mathbf{i}}' + \omega\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\hat{\mathbf{k}}'$$

donde λ es la latitud del punto 0'. En general, los vectores que representan las condiciones iniciales del movimiento tienen componentes en todos los ejes.

$$\vec{r}'_o = x'_o\,\hat{\mathbf{i}}' + y'_o\,\hat{\mathbf{j}}' + z'_o\,\hat{\mathbf{k}}'$$

$$\vec{v}'_o = \dot{x}'_o\,\hat{\mathbf{i}}' + \dot{y}'_o\,\hat{\mathbf{j}}' + \dot{z}'_o\,\hat{\mathbf{k}}'$$

Entonces:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{v}}'_o + 1/3\ t\ \vec{\mathbf{g}}') = \hat{\mathbf{i}}'\,(-\ \omega\ \dot{y}'_o\ \mathrm{sen}\ \lambda)\ - \ldots$$
$$-\ \hat{\mathbf{j}}'\,(\ -\ \omega\ \cos\lambda\ (\dot{z}'_o - 1/3\ t\ g') - \omega\ \dot{x}'_o\ \mathrm{sen}\ \lambda) - \ldots$$
$$-\ \mathbf{k}'\ \omega\ \dot{y}'_o\ \cos\lambda$$

Finalmente, las expresiones siguientes representan la posición de la particula en el sistema no-inercial

$$x'(t) = x'_o + \dot{x}'_o\, t + t^2\, \omega\ \mathrm{sen}\ \lambda\ \dot{y}'_o$$

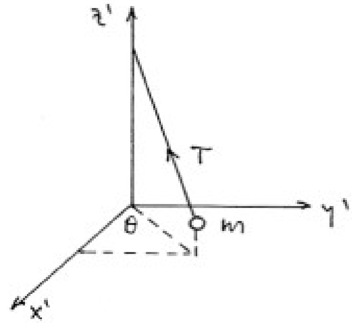
$$y'(t) = y'_o + \dot{z}'_o\, t - t^2\, \omega\, (\dot{z}'_o \cos\lambda + \dot{x}'_o\ \mathrm{sen}\ \lambda) + 1/3\ t^3\, \omega\, g' \cos\lambda$$

$$z'(t) = z'_o + \dot{z}'_o\, t - 1/2\ g'\, t^2 + t^2\, \omega\, g' \cos\lambda\ \dot{y}'_o$$

• **Péndulo de Foucault**

Analizamos a continuación el efecto de la rotación de la Tierra sobre el movimiento de un péndulo simple. La ecuación de movimiento para el péndulo es:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = m\,\vec{\mathbf{g}}' + \vec{\mathbf{T}} - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$



donde hemos despreciado el término $-m\ \vec{\mathbf{w}} \times (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{r}}')$ por su magnitud relativamente pequeña. La tensión en la cuerda está dada por,

$$\vec{\mathbf{T}} = T_{x'}\,\hat{\mathbf{i}}' + T_{y'}\,\hat{\mathbf{j}}' + T_{z'}\,\hat{\mathbf{k}}'$$

donde

$$T_{x'} = -\ T\,\frac{x'}{L} \quad ; \quad T_{y'} = -T\,\frac{y'}{L}$$

y

$$T = |\,\vec{\mathbf{T}}\,|$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la masa m en componentes relativas a la superficie de la Tierra es:

$$m\,\ddot{x}' = -\ T\,\frac{x'}{L} + 2\,m\,\omega\ \mathrm{sen}\ \lambda\ \dot{y}'$$

$$m\,\ddot{y}' = -\ T\,\frac{y'}{L} - 2\,m\,\omega\,(\dot{x}'\ \mathrm{sen}\ \lambda + \dot{z}' \cos\lambda)$$

$$m\,\ddot{z}' = T_{z'} - m\,g' + 2\,m\,\omega\,\cos\lambda\ \dot{y}'$$

Estamos interesados en pequeños desplazamientos a partir de la vertical, ($\cos\phi = 1$), de manera que la magnitud de la tensión en la cuerda es prácticamente constante

$$T_{z'} \approx T \approx m\,g'$$

Además, podemos despreciar z' en comparación con x'. Por lo tanto el movimiento en el plano x'-y' es:

$$\ddot{x}' + \frac{g'}{L} x' = 2\,\omega'\,\dot{y}'$$

$$\ddot{y}' + \frac{g'}{L} y' = -2\,\omega'\,\dot{x}'$$

con

$$\omega' = \omega \operatorname{sen} \lambda$$

Para visualizar mejor el movimiento hacemos una transformación a coordenadas polares (ρ, θ)

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Reemplazando estas variables y sus derivadas en las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\rho - 2\,\omega'\,\rho\,\dot{\theta} = 0$$

$$2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} + 2\,\omega'\,\dot{\rho} = 0$$

Se verifica que la solucion más simple para la segunda ecuación es,

$$\dot{\theta} = -\,\omega' = -\,\omega \operatorname{sen} \lambda$$

lo cual indica que la proyección del movimiento en el plano (x'-y') rota en el sentido de los punteros del reloj en el hemisferio Norte y en contra de ellos en el hemisferio Sur. Además, el movimiento en la coordenada radial es

$$\ddot{\rho} + \left\{ \frac{g}{L} + \omega'^{\,2} \right\} \rho = 0$$

es decir, el movimiento es armónico simple en la dirección radial con una frecuencia angular

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ya que el término $\omega'^{\,2}$ es muy pequeño. El período de precesión del péndulo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \operatorname{sen} \lambda} = \frac{24 \text{ horas}}{\operatorname{sen} \lambda}$$

Así por ejemplo, para Santiago (latitud cercana a 33°) el periodo de precesión es de aproximadamente dos días.