II. DINAMICA DE LA PARTICULA

La Dinámica es la rama de la mecánica que trata las leyes físicas que gobiernan el movimiento de los cuerpos materiales. Una de sus tareas fundamentales es predecir, entre todos los modos posibles como un sistema material puede moverse, que movimiento particular ocurrirá en una situación dada. Históricamente, las leyes del movimiento fueron formuladas por Newton (1642-1727).

II.1 Leyes de Newton

LEY I: Todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que actúe sobre él una acción que lo oblige a cambiar de dicho estado. Originalmente esta ley fue enunciada por Galileo (1564-1642).

Comentarios:

a) esta ley se conoce también como **Principio de Inercia**, ya que describe una propiedad común a toda la materia: la inercia.

b) sistema de referencia inercial: es aquel sistema de referencia donde la Ley I se cumple.

Cantidad de movimiento o **momentum lineal** ($\vec{p}$)
Se define el momentum lineal de una partícula de masa m como: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$

LEY II: La tasa de variación temporal de la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta (o resultante de las fuerzas) que actúan sobre él.

Por lo tanto, la ley II se expresa como:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \propto \vec{\mathbf{F}}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}$ es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula,

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$

Es siempre posible definir un sistema de unidades de modo tal que el coeficiente de proporcionalidad sea igual a 1. En este caso:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$$

que constituye la ecuación de movimiento del cuerpo sometido a la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}$. Consistente con la ley I, la expresión analítica para la ley II es válida **sólo** en un sistema de referencia inercial.

Suponiendo que la masa del cuerpo es constante, se obtiene la siguiente expresión para la ley II:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}$$

Comentarios

• **Concepto de masa e inercia**
El concepto de inercia, asociado a los cuerpos materiales, se utiliza para representar la resistencia que estos oponen a un cambio en el estado de movimiento. Empíricamente, resulta más fácil mover un cuerpo de

menor inercia que uno de mayor inercia. La medida cuantitativa de la inercia se denomina **masa**.

Para explicitar las ideas, consideremos dos partículas A y B aisladas que se atraen debido a una mutua interacción. En un sistema de referencia inercial se puede observar que las aceleraciones que experimentan las partículas satisfacen:

$$\vec{a}_A = - m_{BA}\,\vec{a}_B$$

donde m_{BA} es una constante positiva, característica del par interactuante A, B.

Si la partícula A se acelera más que la partícula B, se dice que A tiene menor inercia, o en forma alternativa, menor masa. Por lo tanto, m_{BA} es una medida de la **inercia relativa** entre A y B.

Eligiendo una partícula patrón P y asignándole a su inercia una masa m_P, se puede definir la masa de cualquiera otra partícula. En efecto, para la partícula B se tiene que

$$m_B = m_{BP}\, m_P$$

con lo cual podemos expresar la aceleración $\vec{a}_B$ en término de la aceleración de la partícula patrón $\vec{a}_P$,

$$\mu_{BP}\,\vec{a}_B = \frac{m_B}{m_P}\,\vec{a}_B = -\vec{a}_P$$

Así, podemos escribir que la magnitud de la aceleración de la partícula A con respecto a la de la masa patrón es:

$$|\vec{a}_A| = \mu_{BA}\,\frac{m_P}{m_B}\,|\vec{a}_P|$$

Haciendo el experimento directamente con las partículas A y P se tiene que:

$$|\vec{a}_A| = \frac{m_P}{m_A}\,|\vec{a}_P|$$

La evaluación de las razones entre las aceleraciones de los cuerpos A y P, basada en mediciones cuidadosas de las aceleraciones, indica que:

$$\frac{|\vec{a}_A|}{|\vec{a}_P|} = \frac{|\vec{a}\,'_A|}{|\vec{a}\,'_P|}$$

resultado que implica que:

$$\mu_{BA} = \frac{m_B}{m_A}$$

es decir, el cuociente entre las masas A y B así determinado no depende del patrón escogido ni del valor numérico asignado a m_P.

Finalmente, hay que destacar que a partir de las propiedades de la inercia se define el concepto de **masa inercial**. En la práctica, sin embargo, las razones entre masas se determinan pesándolas en una balanza, donde el peso de los cuerpos es proporcional a lo que podemos llamar su **masa gravitacional**. Afortunadamente, todos los experimentos indican que la masa inercial y gravitacional son estrictamente proporcionales entre si, razón por la cual para nuestros propósitos, no necesitamos distinguir entre las dos clases de masas.

• **Unidades** (ver Apéndice 1)
Como unidad de masa en el Sistema Internacional (SI) se considera, en forma arbitraria, un cuerpo patrón al que se le asigna una masa: $m_p = 1$ kg.

En el sistema SI, la unidad de fuerza se denomina Newton y corresponde a la fuerza que se debe ejercer sobre una masa de 1 kg para que adquiera una aceleración de 1 m s^{-2}. La unidad de fuerza tiene dimensiones: $[F] = M\,L\,T^{-2}$.

$$[F] = 1 \text{ newton} = 1 \frac{\text{kg m}}{s^2}$$

La unidad práctica de fuerza es el kilógramo-peso (kg-p), que corresponde a la fuerza con que la Tierra atrae un cuerpo de 1 kg de masa, cuando se encuentra a nivel del mar.

$$1 \text{ kg p} = 1 \text{ kg} \times 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$= 9.81 \text{ newton}$$

LEY III: Las fuerzas actúan siempre en pares: si un cuerpo A actúa sobre otro cuerpo B con una fuerza $\vec{F}_{BA}$, el cuerpo B reacciona sobre el A con una fuerza $\vec{F}_{AB}$ de modo que las magnitudes de las fuerzas son iguales y tienen la misma dirección (a lo largo de la recta que une los dos cuerpos) y sentidos opuestos.

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Observar que el par de fuerzas actúa sobre cuerpos cuyas masas son en general diferentes.

• **Principio de conservación del momentum lineal.**
Consideremos dos partículas A y B que interactúan mutuamente sin fuerzas externas actuando sobre ellas. Por el principio de acción y reacción se tiene que:

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

Por lo tanto, si $\vec{p}_A$ y $\vec{p}_B$ son los momenta respectivos, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$$

con lo cual:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_o \text{ (constante)}$$

es decir, en un sistema aislado, el momentum lineal total de los dos cuerpos que interactúan permanece constante en el tiempo.

II.2 Momentum angular y torque

Consideremos una partícula que se mueve con un momentum lineal $\vec{p}$, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$.

Definición: **Momentum angular** ($\vec{l}$) de la partícula con respecto al origen O es el vector definido como:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Definición: **Torque** ($\vec{\tau}$), con respecto al origen O, que ejerce la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula se define como el vector:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

En un sistema de referencia inercial podemos entonces escribir la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

• **Relación entre $\vec{\tau}$ y $\vec{l}$**

Derivando $\vec{l}$ con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ y recordando que en un sistema inercial se cumple que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

resulta finalmente,

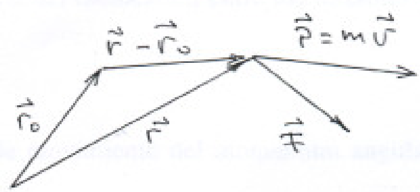
$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

la expresión anterior indica que la tasa de variación temporal del momentum angular de una partícula con respecto al origen O es igual al momento de la fuerza (torque) que se ejerce sobre ella con respecto a al origen O.

• **Comentarios**

a) el momentum angular $\vec{l}'$ y el torque $\vec{\tau}'$, relativos a un punto cualquiera O' representado por el vector $\vec{r}_0$, se definen como:

$$\vec{l}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$$
$$\vec{\tau}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$



b) el momentum angular apunta en la dirección perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

c) el torque apunta en la dirección perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

d) la magnitud del momentum angular es: $\|\vec{l}\| = m\,v\,r \operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo entre los vectores $\vec{p}$ y $\vec{r}$.

e) en el caso de **fuerzas centrales** es decir, de fuerzas que actúan en la dirección del radio vector $\vec{r}$ ($\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$), se tiene que:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0$$

Esto implica que el momentum angular de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas centrales permanece constante. En consecuencia, el movimiento es plano.

II.3 Integrales de la ecuación de movimiento

Es conveniente analizar la forma que toma la primera integral de la ecuación de movimiento de una partícula sometida a una fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$. En esta sección analizaremos algunos casos de interés.

• Impulso lineal

El concepto de impulso lineal está asociado a una expresión de la ley II de Newton integrada en el tiempo. En efecto:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$$

Integrando la ecuación de movimiento en el tiempo, entre los instantes t_1 y t_2, se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{\mathbf{p}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

lo que implica que:

$$\vec{\mathbf{p}}(t_2) - \vec{\mathbf{p}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

o también:

$$\vec{\mathbf{p}}(t_2) - \vec{\mathbf{p}}(t_1) = \langle\vec{\mathbf{F}}\rangle_{t_2 - t_1} (t_2 - t_1)$$

en que $\langle\vec{\mathbf{F}}\rangle_{t_2-t_1}$ es el valor medio de la fuerza aplicada en el intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$. El término integral se denomina **impulso lineal** y corresponde a la variación del momentum entre los instantes t_1 y t_2.

• Impulso angular

El concepto de impulso angular está asociado a la ecuación de movimiento del momentum angular, integrada en el tiempo. En efecto

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \vec{\tau}$$

Integrando entre los instantes t_1 y t_2

$$\vec{\mathbf{l}}(t_2) - \vec{\mathbf{l}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt$$

o también:

$$\vec{l}(t_2) - \vec{l}(t_1) = <\vec{\tau}>_{t_2-t_1}(t_2 - t_1)$$

en que $<\vec{\tau}>_{t2-t1}$ es el valor medio del torque aplicado sobre la partícula en el intervalo respectivo. El término integral se denomina **impulso angular** y corresponde a la variación del momentum entre los instantes t_1 y t_2.

• Integral de la energía

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m constante bajo la acción de una fuerza neta **F**. La ecuación de movimiento es: $m\vec{a} = \vec{F}$

Multiplicando (producto escalar) por la velocidad tenemos que:

$$m\vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ m v^2\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

donde $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$. Integrando en el tiempo entre los instantes t_1 y t_2 se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\ m\ v^2(t_2) - \frac{1}{2}\ m\ v^2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{\vec{r}_1(t_1)}^{\vec{r}_2(t_2)} \vec{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Esta expresión corresponde a una forma explícita de obtener la magnitud de la velocidad a partir del conocimiento de las condiciones iniciales de movimiento, de la fuerza neta sobre la partícula y de la trayectoria por ella seguida. Esta ecuación sirve además como base para introducir los conceptos de energía y de trabajo que serán discutidos en detalle en el capítulo III. En este punto basta con considerar el resultado obtenido como una herramienta de cálculo de gran utilidad para la resolución de problemas específicos.

II.4 Movimiento y sistema de coordenadas

La ecuación de movimiento es una ecuación vectorial equivalente a tres ecuaciones escalares correspondientes a su proyección sobre tres ejes de coordenadas. Supondremos en esta ocasión que la masa es constante y que existe una fuerza neta $\vec{F}$ actuando sobre el cuerpo o partícula.

• Coordenadas cartesianas

El movimiento se proyecta sobre los tres ejes cartesianos X, Y, Z. La fuerza se expresa como:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$m\ddot{x} = F_x$$
$$m\ddot{y} = F_y$$
$$m\ddot{z} = F_z$$

• Coordenadas intrínsecas

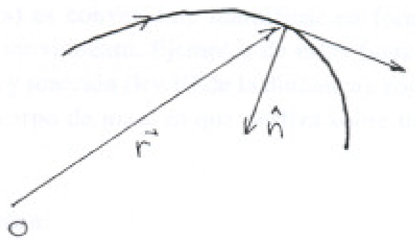
En este caso, el movimiento se proyecta sobre la dirección tangente a la trayectoria y sobre la dirección normal correspondiente:

$$\vec{F} = F_t\hat{t} + F_n\hat{n}$$

Por consiguiente,

$$m\,\ddot{s} = F_t$$

$$m\,\dot{s}^2/\rho = F_n$$



• **Coordenadas cilíndricas**

En este caso,

$$\vec{\mathbf{F}} = F_\rho\,\hat{\rho} + F_\theta\,\hat{\theta} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$m\,(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2) = F_\rho$$

$$m\,(\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}) = F_\theta$$

$$m\,\ddot{z} = F_z$$

• **Coordenadas esféricas**

En este caso,

$$\vec{\mathbf{F}} = F_r\,\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\,\hat{\theta} + F_\phi\,\hat{\phi}$$

y las ecuaciones correspondientes son:

$$m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta - r\,\dot{\theta}^2) = F_r$$

$$m\,(r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}) = F_\theta$$

$$m\,(r\,\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\cos\theta) = F_\phi$$

II.5 Elementos para el análisis del movimiento

El problema central en el estudio del movimiento de un cuerpo es identificar los elementos físicos que originan el movimiento, lo cual permite escribir correctamente las ecuaciones que lo gobiernan.

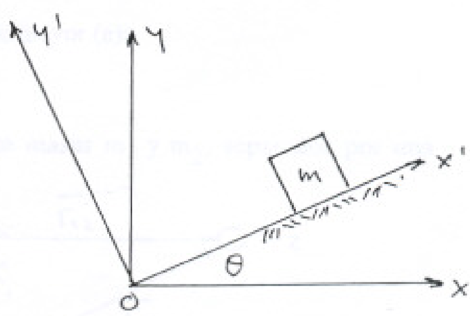
• **Elección del sistema de coordenadas**

Al identificar un problema, el primer paso es elegir el sistema de coordenadas con respecto al cual se describe el movimiento. Una elección adecuada, que se adapte a la geometría del movimiento permite en la mayoría de los casos, simplificar notablemente las ecuaciones que lo describen. Por ejemplo considere el movimiento de un bloque que desliza sobre un plano inclinado, como se indica en la figura. Uno puede elegir el sistema ortogonal X-Y y escribir las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m\,\ddot{x} = F_x$$

$$m\,\ddot{y} = F_y$$

más la restricción: $y/x = \mathrm{tg}\,\theta$. Alternativamente, como el movimiento es sobre el plano, se puede elegir el eje OX' para describirlo:



$$m\,\ddot{x}' = F_{x'}$$

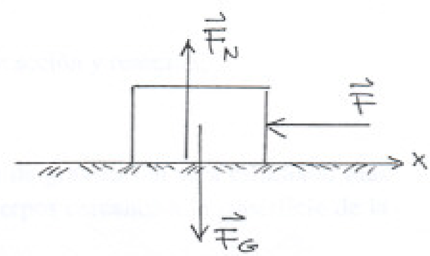
No puede haber aceleración en el eje OY' porque el bloque abandonaría el plano inclinado.

• Diagrama de fuerzas de cuerpo libre

En el análisis del movimiento de un cuerpo (o de una partícula) es conveniente identificar en forma vectorial **todas** las fuerzas que actúan sobre él y que definen su movimiento. Ejemplos de estas fuerzas son: gravitacionales (u otras de origen fundamental), las de acción y reacción (ley III de la dinámica), roce, tensiones, empuje, etc. Para ilustrar la idea, consideremos un cuerpo de masa m que desliza sobre una superficie horizontal sin roce y tirado por una cuerda.

En el diagrama adjunto se han identificado todas las fuerzas que actúan:

$\vec{F}$: fuerza de tracción ejercida por la cuerda.
$\vec{F}_G$: fuerza gravitacional con que la Tierra atrae al cuerpo.
$\vec{F}_N$: fuerza de reacción que la superficie ejerce sobre el cuerpo de masa m.



Las ecuaciones del movimiento son:

$$m\ddot{x} = F$$
$$0 = -F_G + F_N$$

• Cuerdas ideales

Se llama cuerda ideal a una cuerda inextensible, de masa despreciable, flexible y que no admite fuerzas transversales. Esto es una idealización de lo que sucede con una cuerda sometida a una fuerza $\vec{F}$. Debido a la condición de masa despreciable, la fuerza aplicada en el extremo de la cuerda se transmite hasta el otro extremo sin atenuarse. Esta solicitación recibe el nombre de **tensión de la cuerda**.

II.6 Ley de gravitación

Actualmente se conoce la existencia de cuatro interacciones (fuerzas) fundamentales en la naturaleza: gravitacionales, electromagnéticas, fuertes y débiles. Por su importancia histórica y su relación con las aplicaciones más intuitivas de la mecánica, se analizan a continuación las fuerzas gravitacionales entre dos cuerpos de masa m_1 y m_2.

La ley de la gravitación universal fue establecida por Newton, quien a su vez se basó en las leyes de Kepler que definen los aspectos fundamentales del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Estas son:

i) los planetas describen órbitas elípticas en torno al Sol, que ocupa uno de sus focos.

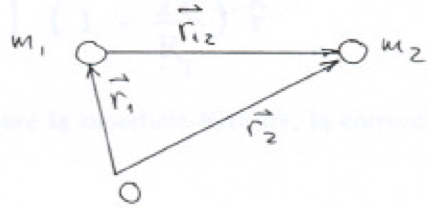
ii) el radio vector (con origen en el Sol) barre áreas iguales en tiempos iguales.

iii) el período de la órbita de un planeta se relaciona con el semi-eje mayor (a):

$$T^2 \;\mathrm{a}\; <a>^3$$

Newton estableció la siguiente ley general para dos cuerpos de masas m_1 y m_2, separados por una distancia r_{12}:

$$|\vec{F}| \propto \frac{-m_1\, m_2}{|r_{12}|^2}$$



donde: $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

La fuerza $\vec{F}$ actúa en la dirección de la recta que une las masas.

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 \; m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$$

$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-11}$ n-m^2 kg^{-2}

Es evidente que la ley de fuerzas gravitacionales satisface el principio de acción y reacción,

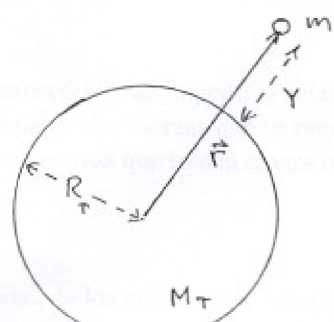
$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

El movimiento general de cuerpos o partículas gobernados por la ley de gravitación será estudiado más adelante. Por ahora analicemos como caso especial la situación de cuerpos cercanos a la superficie de la Tierra.

• Movimiento cerca de la superficie de la tierra.

Constituye ésta una aplicación particular de la ley gravitacional en que uno de los cuerpos con masa M_T es la Tierra y el otro un cuerpo con masa m. Supondremos que la Tierra tiene simetría esférica. Se puede demostrar (teorema de Gauss) que el campo gravitacional alrededor de ella es equivalente al campo producido por una partícula de masa M_T colocada en el centro de la Tierra. Por lo tanto, haciendo coincidir el origen con ese punto se tiene que la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo de masa m es:

$$\vec{F}_m = - G \frac{m \; M_T}{r^2} \hat{r} \qquad (r \geq R_T)$$



El primer resultado importante es que todo cuerpo es atraído en dirección radial hacia el centro de la Tierra. Veamos qué sucede si el cuerpo se encuentra a una altura "y" sobre la superficie:

$$\vec{F}_m = - G \frac{m \; M_T}{(R_T + y)^2} \hat{r}$$

Expandiendo esta expresión en torno a y = 0 (teorema de Taylor) resulta:

$$\frac{1}{(R_T + y)^2} = \frac{1}{R_T^2}\left[1 - \frac{2\,y}{R_T} \pm \ldots \right]$$

Para alturas relativamente pequeñas sobre la superficie las correcciones de orden mayor se pueden despreciar porque $y \ll R_T$,

$$\vec{F}_m = - m \left\{ \frac{G\,M_T}{R_T^2} \right\} \left(1 - \frac{2\,y}{R_T} \right) \hat{r}$$

Observar que hasta alturas del orden de 100 km sobre la superficie terrestre, la corrección al valor correspondiente en la superficie es a lo más de 1%.

Definición: aceleración de gravedad sobre la superficie de la Tierra

$$\vec{g}_o = -\frac{G M_T}{R_T^2}\hat{r}$$

de las expresiones anteriores se deduce que la aceleración de gravedad disminuye con la altura de acuerdo a la expresión:

$$\vec{g}(y) = \vec{g}_o\left[1 - \frac{2y}{R_T}\right]$$

Por lo tanto la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m puede expresarse como:

$$\vec{F} = m\,\vec{g}$$

Si el cuerpo se encuentra a nivel del mar: $\vec{F} = m\,\vec{g}_0$

$|\vec{g}_0| = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ (en Santiago este valor es 9.79 m s^{-2})

En general, a menos que se explicite, supondremos que la aceleración de gravedad es constante e igual a $\vec{g}_0$

La magnitud escalar de la fuerza gravitacional sobre un cierto cuerpo se denomina **peso** y corresponde a la magnitud $F = mg$ de la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de masa m.

II.7 Fuerzas de roce o de fricción

En esta sección estudiaremos fuerzas de contacto cuyo efecto macroscópico es impedir o retardar el movimiento relativo entre dos cuerpos. Entre otras, analizaremos en particular fuerzas que se oponen al deslizamiento relativo de las superficies de contacto entre dos cuerpos y fuerzas que frenan el movimiento de un cuerpo que se desplaza en el interior de un fluido.

• Fuerzas de roce entre dos cuerpos en contacto

Su origen se debe a las irregularidades (rugosidades) en las superficies de los cuerpos en contacto y su efecto es producir una resistencia al deslizamiento de un cuerpo relativo al otro. Podemos distinguir dos situaciones:

a) Fuerzas de roce estático

Experimentalmente se observa que para poner en movimiento un cuerpo que está en contacto con otro, es necesario aplicar sobre él una fuerza mínima paralela a la superficie de contacto. Esta fuerza mínima externa corresponde a la máxima fuerza de roce estático que impide el movimiento del cuerpo.

La fuerza de roce estático es un fuerza variable que impide que dos cuerpos en contacto empiecen a desplazarse uno con respecto al otro. Su magnitud máxima es proporcional a la magnitud de la fuerza ($\vec{N}$) de interacción entre los cuerpos en contacto, en dirección perpendicular a la superficie de contacto.

$$|\vec{F}_{RE}| \leq \mu_e |\vec{N}| = |\vec{F}_{RE\ máx}|$$

donde μ_e es el coeficiente de roce estático. Es conveniente destacar que la fuerza de roce estático es independiente del área de la superficie de contacto y que μ_e depende del estado de ella y de la naturaleza del material de los cuerpos en contacto.

b) **Fuerza de roce cinético** (o dinámico, o deslizante)
La experiencia muestra que una vez iniciado el movimiento relativo entre los cuerpos en contacto se requiere, para mantenerlo, una fuerza externa menor (fuerza de roce cinético) que la necesaria para iniciarlo,

$$\vec{F}_{RC} < \vec{F}_{RE\ máx}$$

La dirección de esta fuerza es **siempre** opuesta a la dirección del movimiento relativo de los dos cuerpos en contacto y empíricamente se determina que su magnitud es proporcional a la magnitud de la fuerza de interacción normal ($\vec{N}$) entre ambos:

$$|\vec{F}_{RC}| = \mu_c |\vec{N}|$$

donde μ_c es el coeficiente de roce cinético (o dinámico). Si la velocidad relativa es pequeña y si las superficies no son deformadas por efecto del roce, la fuerza de fricción es independiente del área de contacto y de la velocidad relativa entre los cuerpos.

• **Fuerza de roce viscoso**
Corresponde a la fuerza de resistencia que actúa sobre un cuerpo que se desplaza en el interior de un fluido. En general esta fuerza depende de las características del fluido, del tamaño y geometría del cuerpo y de la velocidad del mismo. Con respecto a esta última variable la fuerza de roce viscoso se puede modelar según la expresión:

$$\vec{F}_{RV} = -k\,|\vec{v}|^n\,\hat{v}$$

donde n es un parámetro que depende de las condiciones particulares del movimiento. Así, en el caso particular de una esfera moviéndose con una velocidad moderada en el interior de un líquido o de un gas, la fuerza viscosa de fricción puede expresarse como:

$$\vec{F}_{RV} = -k\,\vec{v} \quad \text{(ley de Stokes)}$$

donde el coeficiente de fricción k está dado por: $k = 6\,\pi\,R\,\eta$

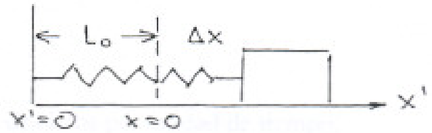
η es el coeficiente de viscosidad del fluido y R el radio de la esfera. Valores típicos de η para el agua (expresados en n s m^{-2}) varían entre 0.656×10^{-2} y 1.792×10^{-2}, mientras que para el aire η varía entre 1.71×10^{-3} (T = 0 °C) y 1.90×10^{-3} (T = 40 °C).

II.8 Fuerzas de restitución. Movimiento armónico simple

Uno de los casos más comunes en Física, desde el punto de vista teórico y práctico, se refiere a la acción de una fuerza lineal de restitución, esto es, que tiende siempre a llevar al cuerpo hacia una posición de equilibrio. En particular analizaremos aquí el movimiento bajo la acción de una fuerza de restitución cuya magnitud es proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio. Ejemplos típicos de este tipo de movimiento son el caso del péndulo sometido a pequeñas oscilaciones y la vibración de un resorte. En el primer caso, la fuerza de gravedad actúa como una fuerza de restitución, mientras que en el segundo ejemplo es la fuerza elástica de restitución del resorte la que condiciona el movimiento.

• **Resorte. Ley de Hooke**
El resorte, en su régimen elástico, constituye un mecanismo físico que produce fuerzas de restitución lineales como las mencionadas anteriormente. Para su estudio suponemos que un resorte tiene un largo natural L_o y una masa despreciable.

Consideremos un cuerpo de masa m atada al extremo del resorte, como se indica en la figura adjunta. Interesa estudiar el movimiento del cuerpo sometido a esta fuerza de restitución, cuando se lo saca de su posición de equilibrio.



Se ha determinado experimentalmente que en el límite elástico del resorte, la fuerza que actúa sobre un cuerpo atado a él es proporcional al desplazamiento del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio estable $x' = L_o$,

$$\vec{F} = -k\,(x' - L_o)\,\hat{x}' \quad \text{(Ley de Hooke)}$$

Esta es la fuerza que actúa cuando se ha sacado al resorte del equilibrio, ya sea por alargamiento o compresión. Si medimos el desplazamiento con respecto al eje **x** y considerando que la dirección del eje **x'** coincide con la del eje **x**, se tiene que

$$x = x' - L_o$$

con lo cual:

$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}$$

donde k es el coeficiente de elasticidad o constante del resorte. Por lo tanto, la ecuación de movimiento para el cuerpo de masa m expresada con respecto a la posición de equilibrio del resorte es:

$$m\ddot{x} = -k\,x$$

que se conoce como la ecuación del **oscilador armónico**.

Definiendo la frecuencia angular ω_o como:

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

se tiene que la solución general de la ecuación general es (ver Apéndice 2):

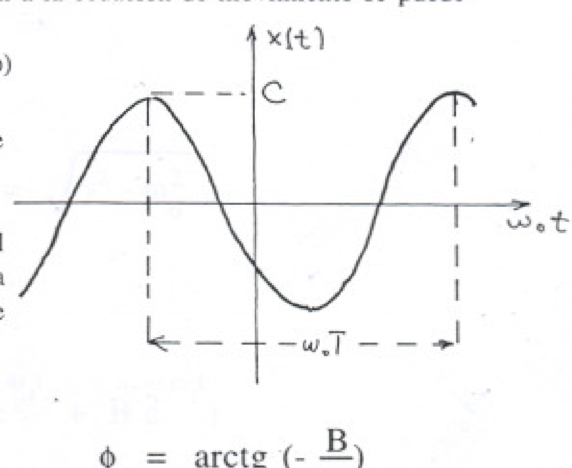
$$x(t) = A\cos\omega_o t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_o t$$

donde A y B son constantes de integración que se determinan una vez conocidas las condiciones iniciales del movimiento ($x(t_o)$ y $x(t_o)$). Alternativamente, la solución a la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$x(t) = C\cos(\omega_o t + \phi)$$

siendo en este caso, C y ϕ las correspondientes constantes de integración.

La figura muestra la variación temporal de la posición del cuerpo. El valor máximo de x(t) se denomina amplitud de la oscilación y corresponde a la constante C mientras que a f se denomina la fase de la oscilación.



$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \phi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)$$

El periodo de la oscilación corresponde al tiempo requerido para que el movimiento realice un ciclo completo: $T\,\omega_o = 2\pi$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La frecuencia lineal o natural del oscilador se define como el número de ciclos por unidad de tiempo,

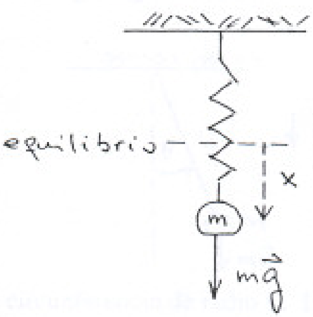
$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

la que en función del periodo T del oscilador se expresa como: $f_o = 1/T$

• Movimiento armónico amortiguado

En el análisis del oscilador armónico ideal (resorte) no hemos tomado en cuenta las fuerzas de roce que pueden afectar el movimiento del cuerpo. Para ilustrar este efecto, consideremos que el cuerpo de masa m atado a un resorte se encuentra además sometido a una fuerza de roce viscosa que varía linealmente con la velocidad. Por ejemplo, la situación podría corresponder al movimiento de un cuerpo colgado de un resorte con amortiguamiento debido al roce viscoso con el aire. La ecuación de movimiento con respecto a la posición de equilibrio del cuerpo es:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$



La resolución de esta ecuación diferencial homogénea de segundo orden implica (ver Apéndice 2) encontrar la ecuación característica:

$$m s^2 + c s + k = 0$$

cuya solución es:

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Hay tres casos que estudiar:

a) $c^2 > 4mk$ (sobre amortiguamiento). En este caso,

$$s = -\gamma \pm \omega_1$$

donde

$$\gamma = \frac{c}{2m} \qquad\qquad \omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

siendo ω_o la frecuencia natural de vibración del resorte.

La solución general en este caso es:

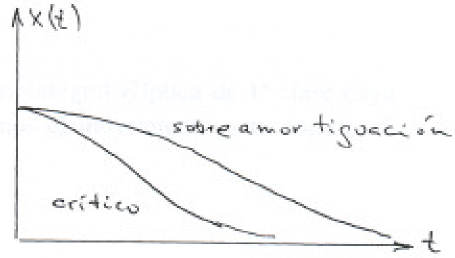
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{\omega_1 t} + B e^{-\omega_1 t}\right)$$

la que tiene la dependencia temporal indicada cualitativamente en la figura adjunta.

b) $c^2 = 4mk$ (amortiguamiento crítico). La solución de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

y la amplitud decrece más rapidamente que en el caso anterior sin que el cuerpo alcance a oscilar (ver figura).



c) $c^2 < 4\,m\,k$. En este caso,

$$s = -\gamma \pm i\,\omega_2$$

donde

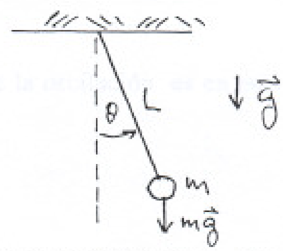
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

La solución correspondiente es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(a \text{ sen } \omega_2 t + b \cos \omega_2 t)$$

solución que corresponde a un movimiento armónico amortiguado de frecuencia $\omega_2 < \omega_o$ (ver figura).

• Movimiento del péndulo



Consideremos el movimiento de un péndulo de masa m suspendido por una cuerda ideal de largo L, luego de separarlo un ángulo θ con respecto a la vertical. En ausencia de otras fuerzas, es la fuerza gravitacional la que actúa para restituir la masa a su posición de equilibrio (θ =0).

En todo momento el péndulo se mueve en la dirección tangencial al arco de circunferencia de radio L. La componente de la fuerza gravitacional (mg) en la dirección de la cuerda (mg cos θ) queda compensada por la tensión ejercida por la cuerda. La ecuación del movimiento en la dirección tangencial es:

$$-\,mg \text{ sen } \theta = m\,a_t$$

donde a_t es la aceleración tangencial. Como $a_t = \ddot{s}$ y $\theta = s/L$ ($\ddot{s} = L\ddot{\theta}$), la ecuación de movimiento resultante es:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \text{ sen } \theta = o$$

con

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La ecuación diferencial de segundo orden que describe el movimiento tiene una estructura diferente de las analizadas anteriormente. Para buscar una solución, se multiplica la ecuación anterior por θ obteniendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) - \omega_o^2 \frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$$

Esto implica que:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_o^2 \cos\theta = K$$

donde K es una constante de integración. Despejando θ e integrando se obtiene:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\,\theta}{\sqrt{2K + \omega_o^2 \cos\,\theta}} = \int_{t_i}^{t_f} dt$$

El término de la izquierda en la ecuación anterior corresponde a una integral elíptica de 1ª clase cuya discusión va mas allá del objetivo de este curso. Aquí estudiaremos el movimiento para ángulos θ pequeños. En este caso podemos aproximar

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta$$

y la ecuación diferencial aproximada que describe el movimiento es:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\,\theta = 0$$

Esta ecuación corresponde a la del oscilador armónico. Su solución es:

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega_o t + \phi)$$

donde θ_o y ϕ son las constantes de integración correspondientes. El periodo de la oscilación es en este caso:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$