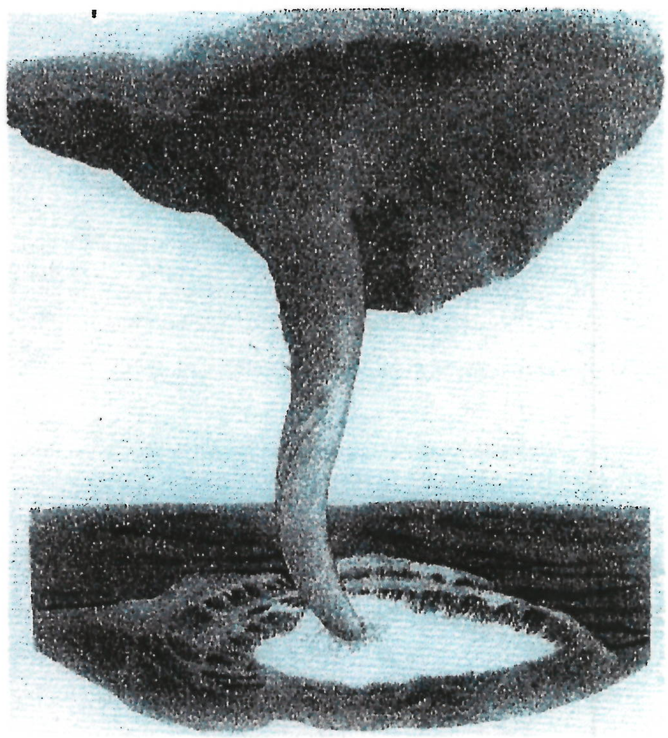
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA

Curso: Mecánica (FI-21A)

APUNTES



Patricio Aceituno y Francisco Brieva

RE-IMPRESION DE VERSION ORIGINAL PUBLICADA EN 1989

marzo 2001

Apuntes del curso Mecánica (FI-21A). Profs. P. Aceituno y F. Brieva
Escuela de Ingeniería. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. U. de Chile

Estos apuntes corresponden a una versión corregida de una guía de clases publicada originalmente por los profesores Patricio Aceituno y Francisco Brieva en 1989. Los temas tratados se ajustan al programa de la asignatura Mecánica (FI-21A) de la Escuela de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, aunque no incluyen el tema referido al análisis de la cinemática y dinámica del movimiento plano de un sólido. Este curso es parte de las asignaturas del tercer semestre del Plan Común de esta Escuela y supone que el estudiante tiene un entrenamiento básico en los conceptos de geometría, cálculo y algebra lineal.

P.A.
Santiago, marzo de 2001

INDICE

	INTRODUCCION		1
I	CINEMATICA DE LA PARTICULA		3
	I.1	Conceptos básicos	3
	I.2	Problema inverso	5
	I.3	Análisis de algunos casos particulares	6
	I.4	Sistema de coordenadas	8
II	DINAMICA DE LA PARTICULA		12
	II.1	Leyes de Newton	12
	II.2	Momentum angular y torque	14
	II.3	Integrales de la ecuación de movimiento	16
	II.4	Movimiento y sistema de coordenadas	17
	II.5	Elementos para el análisis del movimiento	18
	II.6	Ley de gravitación	19
	II.7	Fuerzas de roce o de fricción	21
	II.8	Fuerzas de restitución. Movimiento armónico simple	22
III	TRABAJO Y ENERGIA		27
	III.1	Conceptos básicos	27
	III.2	Teorema de las fuerzas vivas	29
	III.3	Fuerzas conservativas. Energía potencial	29
	III.4	Casos particulares de fuerzas conservativas	32
	III.5	Fuerzas no conservativas	34
	III.6	Energía potencial y movimiento. Equilibrio	34
	III.7	Oscilaciones pequeñas	36
IV	FUERZAS CENTRALES		38
	IV.1	Propiedades generales	38
	IV.2	Fuerza gravitacional	41
V	MOVIMIENTO RELATIVO		47
	V.1	Composición de velocidades y aceleraciones	48
	V.2	Dinámica del movimiento relativo	49
	V.3	Movimiento sobre la superficie de la Tierra	51
VI	DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS		57
	VI.1	Conceptos básicos	57
	VI.2	Aplicaciones	63
APENDICE 1:		Sistema Internacional de Unidades (SI)	66
APENDICE 2:		Solución de ecuaciones diferenciales	67
APENDICE 3:		Secciones cónicas	70

INTRODUCCION

La Mecánica estudia el movimiento y equilibrio de los cuerpos. Sin embargo, las complejidades del mundo físico conducen a formulaciones complementarias de la Mecánica cuando ésta se refiere al mundo microscópico (Mecánica Cuántica) o al mundo macroscópico (Mecánica Clásica). Más aún, podemos diferenciar el modelamiento de fenómenos de acuerdo a la magnitud de las velocidades involucradas. En efecto, los movimientos caracterizados por velocidades relativamente pequeñas con respecto a la velocidad de la luz se representan por las leyes de la Mecánica no-relativista, en tanto que los movimientos con velocidades cercanas a la velocidad de la luz se modelan de acuerdo a los principios de la Mecánica relativista. En este curso se estudia la llamada Mecánica Clásica no-relativista, la cual constituye la primera rama de la Física que se desarrolló como una ciencia exacta (siglos XVI y XVII). Suele dividirse en:

- **Cinemática,** que estudia los aspectos geométricos del movimiento.

- **Dinámica,** que estudia las causas físicas del movimiento.

- **Estática,** que estudia las condiciones bajo las cuales no existe movimiento aparente.

De las disciplinas mencionadas, estos apuntes se refieren a las dos primeras. Es importante señalar que la Mecánica Clásica no-relativista es la base sobre la cual se ha construido la Física Moderna. Además, sus leyes ayudan a comprender la gran mayoría de las aplicaciones prácticas a varias ramas de la ingeniería.

• Concepto de partícula

Al analizar el movimiento de un cuerpo hay que considerar su dimensión y las deformaciones que experimenta. Esto dificulta la descripción detallada del movimiento de cada una de las componentes del cuerpo. Como una primera aproximación en el estudio del movimiento de un cuerpo definimos el concepto de **partícula o masa puntual** como una entidad que tiene masa pero que carece de dimensión espacial. Esto permite concentrarnos en el análisis de los conceptos fundamentales asociados al movimiento. En cursos posterio- res se levantará esta restricción simplificatoria para acercarse a la realidad física.

• Suposiciones básicas sobre espacio y tiempo

Asociados a la idea de movimiento hay dos conceptos básicos: espacio y tiempo. Al respecto haremos las siguientes suposiciones:

a) el espacio físico que nos rodea está descrito adecuadamente por la geometría euclidiana.

b) una secuencia ordenada de eventos puede medirse en una escala de tiempo absoluta y uniforme.

c) espacio y tiempo son entidades distintas e independientes.

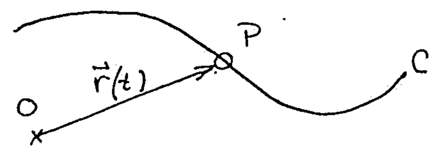
En resumen, en estos apuntes se analizan algunos aspectos de la mecánica clásica no-relativista, en el contexto de las suposiciones anteriores. Las secciones I a V se refieren al movimiento de una partícula. En la sección I se describen los conceptos geométricos del movimiento. Las leyes fundamen-tales de la Dinámica se presentan en la sección II. La sección III introduce los conceptos de trabajo y energía. Las características particulares del movimiento de una partícula bajo la acción de fuerzas centrales y en sistemas de referencia no inerciales se discuten en la secciones IV y V, respectivamente. Para terminar se incluye en la sección VI una descripción del movimiento de un sistema de partículas.

I. CINEMATICA DE LA PARTICULA

Se describen los aspectos geométricos del movimiento de una partícula, sin considerar las causas del mismo. Referimos la posición de la partícula a un sistema de referencia definido en el espacio fijo euclidiano cuyo origen es un punto O.

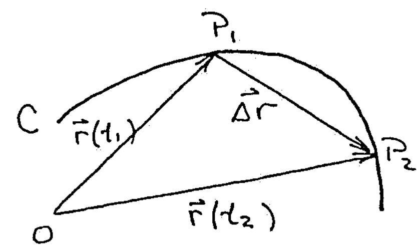
I.1 Conceptos básicos

Vector posición: determina la posición de la partícula P en el espacio con respecto a un sistema de coordenadas con origen en O.



Función itinerario: función vectorial $\vec{r}(t)$ que describe la posición de la partícula en función del tiempo.

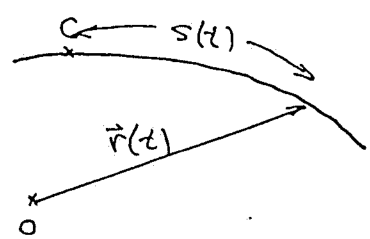
Trayectoria: curva descrita por el vector posición $\vec{r}(t)$ al cambiar la partícula P su posición en el tiempo (curva C C')



Vector desplazamiento: vector que describe el desplazamiento en línea recta de la partícula desde una posición inicial $\vec{r}(t_1)$ a una posición final $\vec{r}(t_2)$, $t_2 > t_1$

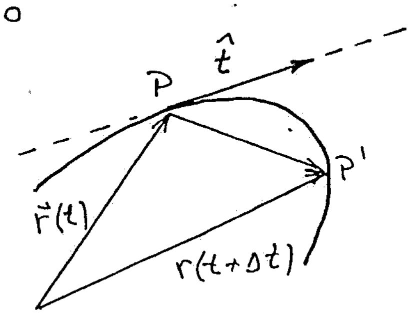
$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Observar que el vector desplazamiento $\vec{\Delta r}$ no depende de la trayectoria entre las posiciones $\vec{r}(t_1)$ y $\vec{r}(t_2)$.



Distancia sobre la trayectoria: distancia **s** a la cual se encuentra el punto P, medida a lo largo de la trayectoria, a partir del origen C elegido arbitrariamente sobre la trayectoria.

Velocidad instantánea (velocidad): Se define como la variación del vector desplazamiento por unidad infinitesimal de tiempo:



$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

La velocidad es un vector que corresponde a la derivada temporal del vector posición **r**(t) de la partícula. En la figura se observa que a medida que Δt tiende a cero, la cuerda PP' tiende a confundirse con el arco de trayectoria PP'. Esto indica que la velocidad es **tangente** a la trayectoria en cada punto. Por lo tanto, si $\hat{t}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria,

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t}$$

donde v(t) es la magnitud (o módulo) del vector velocidad y se denomina <u>rapidez</u> de la partícula. Alternativamente, la rapidez puede expresarse en términos de la variación por unidad de tiempo de la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria:

$$v(t) = \lim_{\Delta\text{->}0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{d\ s(t)}{d\,t} = \dot{s}(t)$$

se puede justificar que ambas definiciones de rapidez coinciden aplicando la regla de la cadena. En efecto,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(s(t))}{d\,t} = \frac{d\vec{r}}{d\,s}\frac{d\,s}{d\,t} = v(t)\,\hat{t}$$

en que hemos identificado el vector $d\vec{r}/dt$ con $\hat{t}$ pues el vector $d\vec{r}/ds$ es tangente a la trayectoria y es de largo unitario, ya que cuando Δs ->0 el largo del vector desplazamiento tiende a coincidir con Δs (el largo de la cuerda tiende a coincidir con el largo del elemento de arco). El lugar geométrico descrito por el vector velocidad se llama la *curva hodógrafa.*

Velocidad media: Corresponde al cuociente entre variación temporal del vector posición en un intervalo finito de tiempo entre t_o y $t_o + T$.

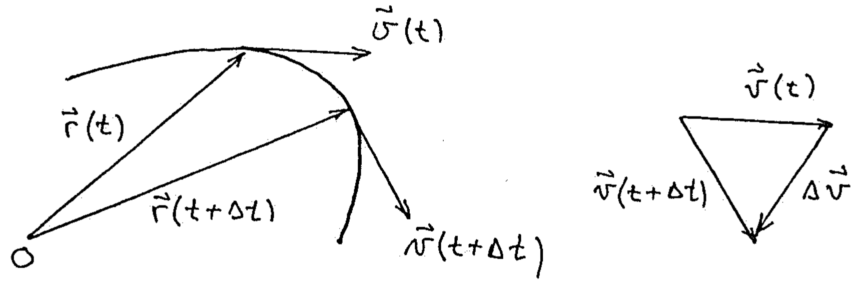
$$<\vec{v}>_T = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \vec{v}(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\vec{r}(t_o + T) - \vec{r}(t_o)\right]$$

Rapidez media: Corresponde al cuociente entre el camino total recorrido a lo largo de la trayectoria en un intervalo finito de tiempo entre t_o y $t_o + T$.

$$<v>_T = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} v(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[s(t_o + T) - s(t_o)\right]$$

Aceleración instantánea (aceleración): mide la tasa de variación temporal del vector velocidad:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\text{->}0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\,\vec{v}(t)}{d\,t} \equiv \frac{d^2\vec{r}(t)}{d\,t^2} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \ddot{\mathbf{r}}\,.$$



Notar que la aceleración tiene la dirección de $\Delta\vec{v}$, es decir, apunta hacia la concavidad de la trayectoria. Una expresión explícita para la aceleración se obtiene de la forma siguiente:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v\,\hat{t}\right) = \dot{v}\,\hat{t} + v\frac{d\,\hat{t}}{dt}$$

La determinación de la derivada del vector unitario tangente **t** requiere de algunas consideraciones: Como

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(\hat{t} \cdot \hat{t}) = 0$$

luego

$$\hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt} = 0$$

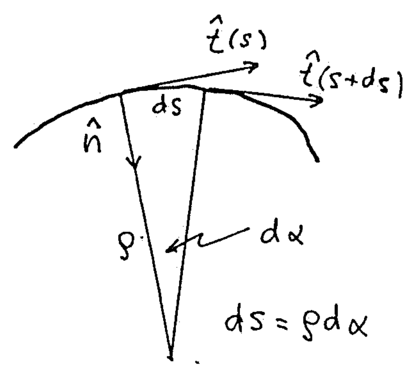
lo anterior indica que la derivada de $\hat{t}$ es un vector perpendicular a $\hat{t}$ y por lo tanto perpendicular a la trayectoria. De este modo, es posible expresar la derivada como:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \lambda\,\hat{n}$$

en que λ es un escalar y $\hat{n}$ es un vector unitario perpendicular a la dirección tangente $\hat{t}$, que apunta hacia el centro de curvatura O'. Considerando que

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\hat{t}}{ds}$$

se concluye que la derivada de $\hat{t}$ con respecto a s también apunta en la dirección de $\hat{n}$.



Si se define ρ como el radio de curvatura de la trayectoria en un cierto punto, se puede deducir de la figura adjunta que

$$\frac{d\hat{t}}{ds} =: \frac{1}{\rho}\,\hat{n} \ .$$

Por lo tanto

$$\lambda = \frac{v}{\rho}$$

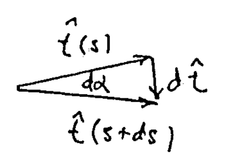
El vector aceleración se puede entonces expresar en términos de una componente tangencial a la trayectoria y una componente normal a la dirección tangente (aceleración centrípeta)

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

en que:

$$\vec{a}_t = \dot{v}\,\hat{t} = \ddot{s}\,\hat{t}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n} \equiv \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{n}$$



$|d\hat{t}| = 1\, d\alpha$

La magnitud de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

• **Radio de curvatura**

El radio de curvatura de la trayectoria se puede determinar si se conoce la velocidad y la aceleración en cada punto, a partir de la expresión:

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = |(\dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}) \times v\hat{t}| \equiv \frac{v^3}{\rho}$$

De esta expresión se deduce que

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$$

• **Aceleración media**

La aceleración media se define como el cuociente entre la variación temporal de la velocidad en un intervalo finito de tiempo entre t_0 y $t_0 + T$.

$$<\vec{a}>_T = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \vec{a}(t)\, dt = \frac{1}{T}\left[\vec{v}(t_o + T) - \vec{v}(t_o)\right]$$

es decir, depende sólo de la velocidad inicial y final en el intervalo de tiempo.

I.2 Problema inverso

El problema inverso se refiere a la determinación de la función itinerario $\mathbf{r}(t)$ a partir del conocimiento de la aceleración (o la velocidad) y de las condiciones iniciales del movimiento en un instante de tiempo que arbitrariamente se considera como referencia. En efecto tenemos que:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Integrando esta ecuación podemos determinar la función velocidad,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(\tau)\, d\tau$$

en que $\vec{v}(t_0)$ es la velocidad en un instante inicial t_0. El vector posición se obtiene en forma análoga a partir de la velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(T_o) + \int_{T_o}^{t} \vec{v}(\tau)\, d\tau$$

combinando ambos resultados se obtiene

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(T_o) + \vec{v}(t_o)\,(t - T_o) + \int_{T_o}^{t} \left(\int_{t_o}^{\tau} \vec{a}(\tau')\, d\tau' \right) d\tau$$

en la mayoría de las aplicaciones, $t_0 = T_0 = t_i$, con lo cual:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_i) + \vec{v}(t_i)\,(t - t_i) + \int_{t_i}^{t} \int_{t_i}^{\tau} \vec{a}(\tau')\, d\tau'\, d\tau$$

lo cual resuelve el problema planteado.

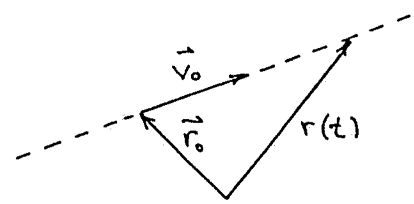
I.3 Análisis de algunos casos particulares

En esta sección analizaremos algunas aplicaciones a situaciones de interés físico. Supondremos que las condiciones se dan en $t_o = 0$ y corresponden a $\vec{r}(t_o) = \vec{r}_0$ y $\vec{v}(t_o) = \vec{v}_0$

- **Movimiento uniforme**

Está caracterizado por una aceleración nula ($a = 0$). La solución del problema inverso (ver I.2) corresponde a:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$



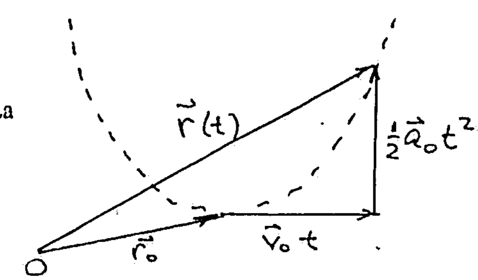
Conclusión: el movimiento uniforme es rectilínea.

- **Movimiento uniformemente acelerado**

Está caracterizado por una aceleración constante: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$. La solución del problema inverso (ver I.2) corresponde a:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}_o\, t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}_o\, t^2$$



Conclusiones:

a) la trayectoria de la partícula corresponde a una parábola, excepto en el caso cuando $\vec{v}_0$ es paralelo a $\vec{a}_0$, situación en la cual el movimiento es rectilíneo. La figura muestra el caso cuando $\vec{v}_0 \cdot \vec{a}_0 = 0$.

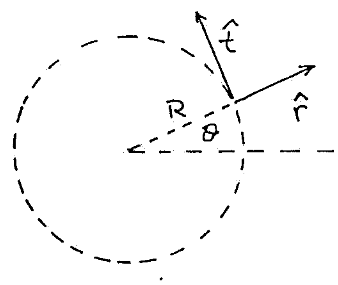
b) el movimiento es plano: el vector posición está siempre contenido en el plano definido por los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$.

c) la curva hodógrafa es una línea recta.

En el contexto de una amplia gama de movimientos uniformemente acelerados están los que ocurren cerca de la superficie de la Tierra bajo la acción de la fuerza gravitacional terrestre, cuando no se considera el efecto de roce viscoso del aire: $\vec{a}_0 = \vec{g}$, $|\vec{g}| = 9.81$ m s^{-2}

Las aplicaciones más comunes en este caso son el análisis de movimientos de caída libre y de trayectoria de proyectiles.

• **Movimiento circular**



En este tipo de movimiento la magnitud del vector posición permanece constante, entendiendo que el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de la circunferencia:

$$|\vec{r}(t)| = \text{constante} = R$$

El vector posición se expresa como: $\vec{r} = R\,\hat{r}$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial. La trayectoria es un círculo de radio R.

La velocidad se obtiene de $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t}$, donde

$$v(t) = \frac{d\ s(t)}{d\,t} = \dot{s}$$

El camino recorrido sobre la curva, s(t), a partir de un cierto punto sobre ella es:

$$s(t) = R\,\theta(t)$$

Por lo tanto

$$v(t) = R\,\omega(t)$$

donde $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ es la velocidad angular de la partícula.

La aceleración se puede expresar en términos de sus componentes tangencial ($\vec{a}_t$) y normal ($\vec{a}_n$) a la trayectoria: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

donde $\vec{a}_t = R\,\alpha(t)\,\hat{t}\,;\ \vec{a}_n = -R\,\omega^2(t)\,\hat{r}$

$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t)$ es la aceleración angular, y $\vec{a}_n$ es la aceleración centrípeta. Observar que ésta existe siempre en el movimiento circular y su origen reside en el cambio de dirección de la velocidad. La magnitud de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = R\,(\alpha^2 + \omega^4)^{1/2}$$

Casos especiales de movimiento circular:

a) movimiento circular uniforme: $\dot{\theta} = \omega_o$ (constante). En este caso:

$$\theta(t) = \theta_o + \omega_o\,t$$

b) movimiento circular uniformemente acelerado, $\ddot{\theta} = \alpha_o$ (constante). En este caso:

$$\dot{\theta}(t) = \omega_o + \alpha_o\,t$$

$$\theta(t) = \theta_o + \omega_o\,t + 1/2\,\alpha_o\,t^2$$

I.4 Sistemas de coordenadas

La resolución de muchos problemas cinemáticos requiere de un sistema de coordenadas explícito respecto al cual se refiere el movimiento. Uno de los sistemas posibles, descrito en la Sección I.1, corresponde a las coordenadas intrínsecas, en término de las cuales se determinaron expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula. Existen otros sistemas de coordenadas que son de gran utilidad para el análisis de problemas mecánicos. En esta sección estudiaremos en particular las coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

• Coordenadas cartesianas

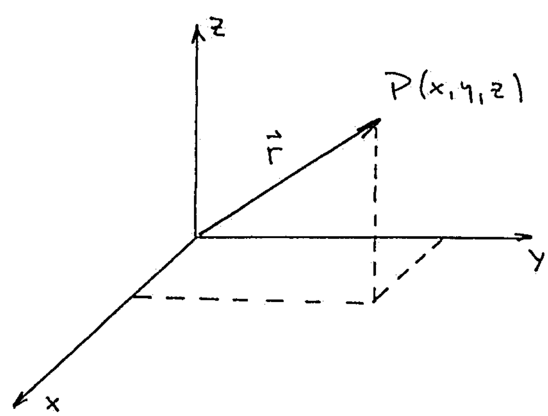
En este caso el vector posición $\vec{r}$, que describe la trayectoria de una partícula, se refiere a una base tri-ortogonal, unitaria, $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, fija en el espacio,

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

en que: $x(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\imath}$

$y(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\jmath}$

$z(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{k}$



La velocidad se expresa como:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} + v_z(t)\,\hat{k}$$

en que: $v_x(t) = \dot{x}$; $v_y(t) = \dot{y}$; $v_z(t) = \dot{z}$.

De igual forma, la aceleración se expresa como:

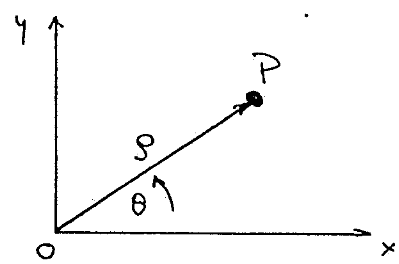
$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{\imath} + a_y(t)\,\hat{\jmath} + a_z(t)\,\hat{k}$$

en que: $a_x(t) = \ddot{x}$; $a_y(t) = \ddot{y}$; $a_z(t) = \ddot{z}$.

Al expresar el movimiento en coordenadas cartesianas se obtienen componentes independientes para la posición, velocidad y aceleración según cada uno de los ejes tri-ortogonales. De este modo, estas componentes pueden ser analizadas en forma independiente, con sus correspondientes condiciones de borde.

• Coordenadas polares

Este tipo de coordenadas es útil en ciertos casos para describir el movimiento de una partícula en un plano. En efecto, la ubicación del punto P asociado a una partícula puede determinarse, con respecto a un origen O, en términos de la distancia ρ del punto P al origen O (radio polar) y del ángulo θ que forma el radio polar con un eje arbitrario de referencia OX (ángulo polar).



Si el eje de referencia OX coincide con el eje X de un sistema cartesiano centrado en O, se tiene que:

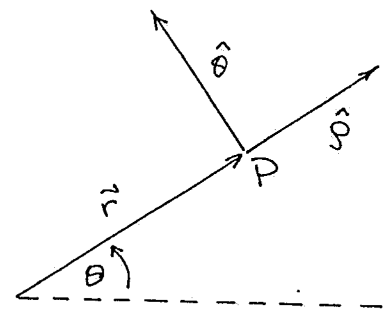
$x = \rho \cos\theta$ $\qquad$ $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$y = \rho \ \mathrm{sen}\,\theta$ $\qquad$ $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(y/x)$

El vector posición queda determinado por: $\vec{r}(t) = \rho(t)\,\hat{\rho}(t)$

en que $\hat{\rho}(t)$ es un vector unitario en la dirección radial. Las variables del movimiento $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ se expresan en este sistema en función de sus componentes a lo largo de los vectores unitarios y ortogonales $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$, este último definido en la dirección de crecimiento de θ .

La velocidad queda determinada por:



$$\vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\,\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

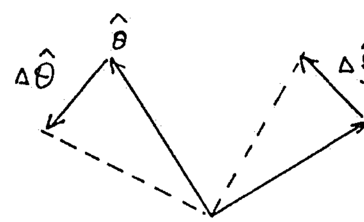
Analizamos ahora la derivada temporal del vector unitario $\hat{\rho}$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}\,\frac{d\hat{\rho}}{d\theta}$$

por otra parte como

$$\frac{d(\hat{\rho}\bullet\hat{\rho})}{dt} = 0 = 2\,\hat{\rho}\bullet\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

se deduce que la derivada de $\hat{\rho}$ es perpendicular a $\hat{\rho}$. Del análisis geométrico de la figura adjunta concluye que



$$\frac{|d\hat{\rho}|}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta\hat{\rho}|}{\Delta\theta} = 1$$

y que

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

Reemplazando en la expresión para la velocidad, resulta finalmente: $\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

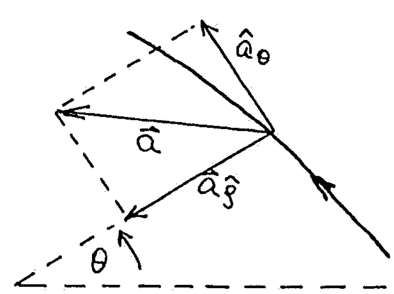
En el cálculo de la aceleración en coordenadas polares, se requiere de una expresión para $d\hat{\theta}/dt$. De la figura anterior se observa que:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\hat{\rho}$$

Luego,

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

es decir, la aceleración puede expresarse en términos de una componente radial $\vec{a}_\rho$ y una transversal $\vec{a}_\theta$.



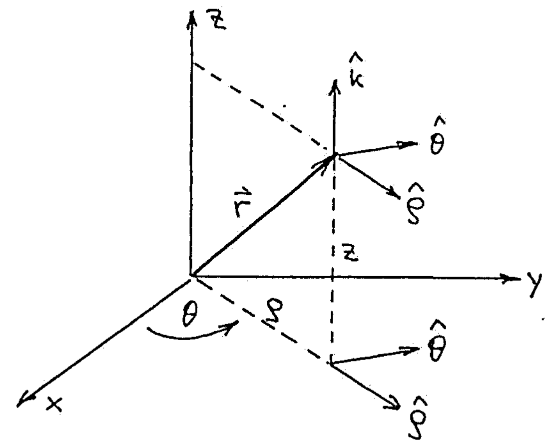
Observación: El cálculo de la velocidad y aceleración pueden hacerse, alternativamente, en una base cartesiana, refiriendo luego los resultados a la base polar (ρ, θ). En efecto, si expresamos el vector posición $\vec{r}$ en coordenadas cartesianas tenemos:

$$\vec{r}(t) = x\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} = \rho\cos\theta\,\hat{\imath} + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} = \rho\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) = \rho\,\hat{\rho}$$

$$\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt = \rho\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) + \rho\,\dot{\theta}\,(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

La aceleración se obtiene en forma análoga.



• Coordenadas cilíndricas

En el caso de un movimiento tri-dimensional, la posición de una partícula puede describirse en términos de las coordenadas cilíndricas ρ, θ, z, que corresponde a una mezcla entre un sistema de coordenadas polares (que describe el movimiento en un plano) y un sistema cartesiano para representar el movimiento en la dirección perpendicular al plano.

El vector posición es: $\vec{r}(t) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{k}$

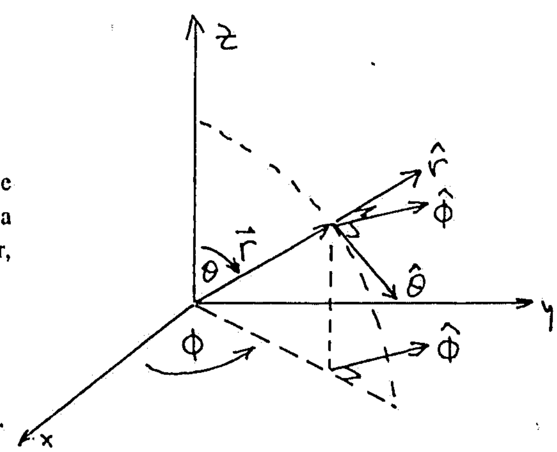
En el extremo del vector posición se asocia una tríada tri-ortogonal unitaria ($\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$, $\hat{k}$) de modo tal que:

$$\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k};\quad \hat{\theta} \times \hat{k} = \hat{\rho};\quad \hat{k} \times \hat{\rho} = \hat{\theta}$$

Recordando las expresiones para la velocidad y aceleración en coordenadas polares y teniendo en cuenta que $\hat{k}$ es un vector constante resultan las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{k}$$



• Coordenadas esféricas

En una forma alternativa el movimiento tri-dimensional se puede describir mediante coordenadas esféricas. En este caso la posición de la partícula queda determinada por las coordenadas r, θ y φ, donde:

r : distancia del punto P al origen del sistema de coordenadas.

θ : ángulo medido con respecto al eje Z y que varía entre 0 y π.

φ : ángulo que forma el eje X con la proyección del vector $\vec{r}$ sobre el plano definido por los ejes X e Y. Varía entre 0 y 2π.

Como estrategia para encontrar expresiones para la velocidad y la aceleración utilizamos la relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas.

$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$
$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$
$z = r \cos\theta$

De estas relaciones se pueden deducir las expresiones inversas:

$$r = \left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}\right] \qquad \phi = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

Asociamos una tríada tri-ortogonal y unitaria $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ al vector posición $\vec{r}(t)$ tal que:

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}; \qquad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}; \qquad \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial creciente, mientras que $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ corresponden a vectores unitarios en la dirección creciente de θ y ϕ, respectivamente. En consecuencia, el vector posición queda definido por $\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}(t)$

En el cálculo de la velocidad y aceleración se requiere obtener expresiones para las derivadas temporales de los vectores base $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$. Para esto expresamos estos vectores con respecto a una base cartesiana centrada en el origen O. Las derivadas temporales calculadas en este sistema son posteriormente expresadas en el sistema de coordenadas esféricas. Analizando la figura anterior es posible concluir que:

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}\\
\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}\\
\hat{\phi} &= -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Al derivar estas expresiones con respecto al tiempo se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi}\\
\dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\,\hat{r} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\phi}\\
\dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\theta}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad se expresa por: $\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}}$ y finalmente,

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi}$$

y la aceleración $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$, como :

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) = {} & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \\
& + (2\dot{r}\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta + r\ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\,\hat{\phi}
\end{aligned}$$