III. TRABAJO Y ENERGIA

En el caso de una partícula sometida a una fuerza arbitraria F, no existe un método lo suficientemente general para resolver la ecuación de movimiento,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

y encontrar, en todos los casos, las soluciones correspondientes en forma analítica. Sin embargo, hay muchas situaciones en las cuales por métodos simples se puede obtener información importante acerca del movimiento. Uno de ellos es el método del trabajo y la energía que está basado en el análisis de la primera integral de la ecuación de movimiento (sección II.3). En efecto, suponiendo que la masa es constante, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, m\, v^2\right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

ecuación que alternativamente se puede escribir como

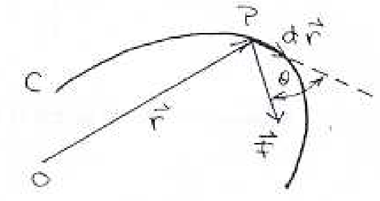
$$d\left(\frac{1}{2}\, m\, v^2\right) = \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Asociados a las ecuaciones previas existen los conceptos de trabajo, energía cinética y potencia, cuyo desarrollo será la parte central de este capítulo.

III.1 Conceptos básicos

• Trabajo

Consideremos una partícula que describe la trayectoria (c) al moverse bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$. La partícula de masa m en el punto P de la trayectoria experimenta un cambio de posición $d\vec{r}$ debido a la acción de la fuerza $\vec{F}$. Se dice que la fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre la partícula realiza un trabajo infinitesimal dW



$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

llamando θ el ángulo entre la fuerza y la dirección del desplazamiento, podemos expresar dW como:

$$dW = |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\,\cos\theta$$

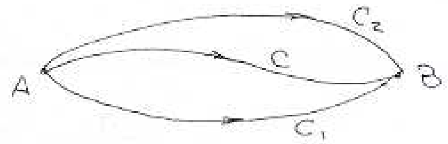
esto es, el trabajo infinitesimal realizado por la fuerza sobre la partícula es igual al producto entre el desplazamiento de ésta y la magnitud de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. En particular, si la fuerza es perpendicular al desplazamiento ésta no realiza trabajo. Ejemplos de esta situación son la fuerza de gravedad en la superficie de la tierra para desplazamientos horizontales, la fuerza normal de reacción de una superficie sobre un cuerpo, la tensión de una cuerda que sujeta una masa describiendo un movimiento circular, etc.

En general el trabajo puede ser positivo o negativo dependiendo de la dirección relativa de la fuerza con respecto a la dirección del desplazamiento. El trabajo total realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula cuando ésta se desplaza a lo largo de la trayectoria (c) del movimiento desde un punto A a un punto B es:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

El término de la derecha en la ecuación anterior corresponde a una integral de línea y muestra que en general el trabajo realizado para ir de A a B **depende de la trayectoria** elegida,

$W_{AB}(C) \neq W_{AB}(C_1) \neq W_{AB}(C_2)$



Esto se debe a la geometría de la trayectoria elegida y al hecho que la fuerza **F** es, en general, una función de posición.

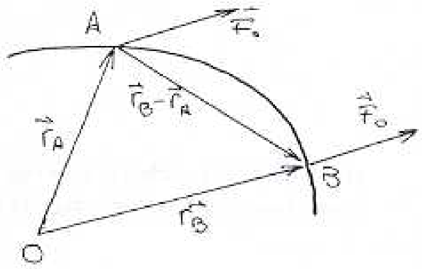
Unidades: la unidad del trabajo corresponde, por definición, al producto de una unidad de fuerza por una unidad de longitud. En el sistema SI, la unidad de trabajo se denomina **joule**, y se define como:

$$[W] = \text{joule} = \text{newton-m}$$

y corresponde al trabajo realizado por la fuerza de 1 newton para desplazar la partícula en 1 metro, en la dirección de acción de la fuerza.

Ejemplo: trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}_o$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_o \bullet d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{F}}_o \bullet (\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A)$$



En este caso particular, el trabajo depende sólo de la posición inicial y final de la partícula, siendo independiente de la trayectoria seguida.

- **Potencia**

Se define como la tasa de variación temporal del trabajo realizado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la partícula,

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Recordando que $dW = \vec{\mathbf{F}} \bullet d\vec{\mathbf{r}}$

se tiene que $P = \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{v}}$

También interesa definir la potencia media en un intervalo de tiempo T,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{W(t)}{T}$$

es decir, corresponde al trabajo total realizado en el periodo T dividido por el tiempo que se tardó en realizarlo.

Unidades: la unidad del potencia corresponde, por definición, al cuociente entre una unidad de trabajo y una unidad de tiempo. En el sistema SI, la unidad de potencia se denomina **watt**, y se define como:

$$[P] = \text{Watt} = \frac{\text{Joule}}{\text{seg}}$$

y corresponde al trabajo de 1 joule realizado en un tiempo de 1 segundo. Una unidad práctica de potencia es el HP (1 HP = 746 watt). Otra unidad práctica de trabajo es el kw-hora que equivale a $3.6\ 10^6$ j

• **Energía cinética (K)**

Definición: la energía cinética (K) de una partícula de masa m que se mueve con velocidad **v** es:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

en que $\vec{p}$ es el momentum lineal de la partícula. Es simple comprobar que la unidad en que se mide la energía cinética corresponde a la unidad de trabajo.

III.2 Teorema de las fuerzas vivas

Podemos ahora interpretar la integral de la ecuación de movimiento discutida en la introducción de este capítulo. En efecto, se había obtenido que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

ecuación que en términos de la energía cinética y de la potencia se expresa como:

$$\frac{dK}{dt} = P$$

Esta es la llamada ecuación de la potencia y expresa que la potencia asociada al trabajo realizado por la fuerza F sobre la partícula es igual a la tasa de variación temporal de su energía cinética. Recordando que:

$$P\,dt = dW = \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

e integrando desde un punto A a un punto B a lo largo de una trayectoria (c), se tiene que

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

resultado conocido como el **teorema de las fuerzas vivas** y que expresa que el trabajo realizado por la fuerza resultante $\vec{F}$ sobre una partícula para ir desde el punto A al punto B a lo largo de una trayectoria (c) es igual a la variación de su energía cinética entre los puntos A y B, respectivamente.

III.3 Fuerzas conservativas. Energía potencial

Las fuerzas conservativas se caracterizan por ser estáticas (es decir, independientes del tiempo) y porque la integral de trabajo es **independiente** de la trayectoria de integración, es decir

$$\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

no depende de la trayectoria seguida por la partícula al desplazarse entre las posiciones A y B. Para que esta integral sea independiente de la trayectoria es necesario que $\vec{F} \bullet d\vec{r}$ sea un diferencial exacto,

$$\vec{F} \bullet d\vec{r} = -\,dV$$

en que $V = V(\mathbf{r})$ es una función escalar. Como $V = V(x,y,z)$, podemos expresar el diferencial dV como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Además $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$. Entonces exigiendo que $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$, y como dx, dy y dz son independientes, concluimos que si F es conservativa

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

La función V(x,y,z) se denomina función energía potencial. Observar que la función V queda determinada salvo una constante. Introduciendo el operador diferencial gradiente,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se puede expresar la fuerza como

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

El cálculo de la función energía potencial V se obtiene a partir del trabajo infinitesimal dW

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\nabla V\cdot \mathbf{dr}$$

$$dW = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial x}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right] = -dV$$

Integrando a lo largo de una trayectoria desde un punto A a un punto B se obtiene que

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{r}$$

Es interesante hacer notar que la función energía potencial queda determinada en forma relativa al punto con respecto al cual se calcula el trabajo (A). Se puede escoger arbitrariamente el valor de la energía potencial en ese punto, con lo cual V en cualquier otro punto (B, por ejemplo) queda medido con respecto al valor de referencia.

• Teorema de conservación de la energía mecánica

Este teorema corresponde a una forma particular del teorema de las fuerzas vivas cuando el trabajo es realizado sólo por fuerzas conservativas. En efecto, teníamos que

$$dK = dW = -dV$$

Por tanto

$$d(K + V) = 0$$

es decir, la suma de las variacione de energía cinética y energía potencial es nula. En consecuencia, si llamamos energía mecánica total a:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V$$

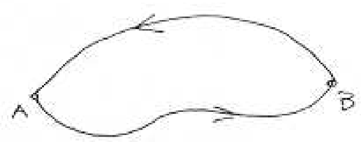
se concluye que ésta se conserva cuando sólo acúan fuerzas conservativas

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x,y,z) = E_o \ \text{(constante)}$$

• **Propiedades de las fuerzas conservativas.**

a) Si la trayectoria es cerrada, el trabajo realizado por la fuerza conservativa es nulo. En efecto,

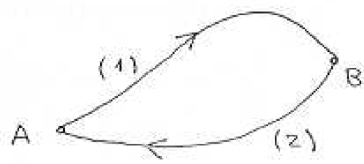
$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \bullet d\vec{r}$$



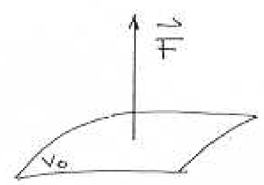
$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0$$

Este resultado implica que

$$\int_{A_{(1)}}^{B} \vec{F} \bullet d\vec{r} = - \int_{B_{(2)}}^{A} \vec{F} \bullet d\vec{r}$$



b) En cada punto de una superficie equipotencial, la fuerza conservativa es perpendicular a la superficie.



Se entiende por superficie equipotencial aquella formada por todos los puntos en que la función energía potencial tiene el mismo valor. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza conservativa sobre una partícula, al desplazarse ésta en dr sobre la superficie equipotencial es

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = -dV = 0$$

por tratarse de una superficie equipotencial. Luego, $\vec{\mathbf{F}}$ es perpendicular a cualquier desplazamiento sobre la superficie equipotencial y, por consiguiente a ésta.

c) Una fuerza conservativa es irrotacional: $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$

es decir, el operador diferencial rotor (∇ **x**) actuando sobre una fuerza conservativa produce un vector nulo. Explícitamente se satisface que:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{i}\left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]$$

Recordando que $F_x = -\partial V/\partial x$, es fácil comprobar que $\nabla \times \vec{F} = 0$

III.4 Casos particulares de fuerzas conservativas

a) Fuerza unidireccional: $\vec{F} = f(z)\,\hat{k}$. Es fácil comprobar que $\nabla \times \vec{F} = 0$

Ejemplo: campo gravitacional cercano a la superficie terrestre: $\vec{F} = -mg\,\hat{k}$

La función energía potencial queda determinada a partir de

$$V(z) = V(0) - \int_0^z (-mg\,\hat{k}) \bullet (dz\,\hat{k}) = V(0) + mgz$$

Si se considera un potencial nulo para el nivel de referencia z=0 se tiene que la energía potencial referida a la superficie de la tierra es:

$$V(z) = mg\,z$$

Este resultado indica que la energía potencial varía linealmente con la altura sobre la superficie.

b) Fuerza central: $\vec{F} = f(r)\,\hat{r}$. En este caso $\hat{r}$ corresponde a la dirección del radio vector. Para examinar el carácter de una fuerza central calculamos

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{fx}{r} & \frac{fy}{r} & \frac{fz}{r} \end{bmatrix}$$

en que

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Se puede verificar que $\nabla \times \vec{F} = 0$, con lo cual se demuestra que toda fuerza central es conservativa.

Ejemplo : fuerza gravitacional (caso general)

Consideremos dos partículas de masas M y m tal que el origen de coordenadas coincidan con la partícula de masa M, que está fija. La fuerza gravitacional gravitacional que actúa sobre la masa m es:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

La energía potencial se determina a partir del trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para mover una partícula desde una posición inicial r_o hasta el punto de coordenada r:

$$V(r) - V(r_o) = -\int_{r_o}^{r} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{r_o}^{r} G\frac{Mm}{r'^2}dr'$$

$$V(r) - V(r_o) = -G\,Mm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right)$$

Es usual elegir un potencial de referencia nulo en un punto infinitamente alejado: $V(r_o \text{-->} \infty) = 0$

con lo cual la función energía potencial, referida a un punto en el infinito, se expresa por

$$V(r) = -G\frac{M\,m}{r}$$

Si $M = M_T$ (masa de la Tierra), la expresión obtenida corresponde a la energía potencial de una partícula de masa m en una posición $r > R_T$ (radio de la tierra)

En el caso de movimientos cercanos a la superficie de la tierra, es costumbre tomar un punto de referencia distinto para medir la energía potencial. En efecto, si elegimos como referencia un potencial nulo en la superficie ($V(R_T) = 0$) entonces el potencial gravitacional toma la forma,

$$V(r) = -G\,M_T\,m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right) \qquad (r \geq R_T)$$

Es fácil verificar que en este caso V coincide con la expresión para el potencial gravitatorio cerca de la superficie terrestre discutido anteriormente. Así, si llamamos $r = R_T + z$, tenemos que

$$V(z) = -G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T + z} - \frac{1}{R_T}\right)$$

$$V(z) = \frac{G\,M_T\,m}{R_T^2}\,z = mg\,z$$

donde se ha utilizado el teorema de Taylor para expandir V(z) a primer orden en torno a $z = R_T$..

c) Fuerza lineal de restitución: $\vec{F} = -k\vec{r}$

Corresponde a un caso especial de fuerza central, y por lo tanto es conservativa. La función energía potencial en un punto r, medida con respecto a un punto de referencia r_o, es:

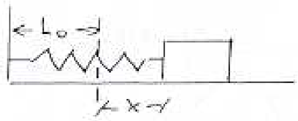
$$V(r) = V(r_o) + \frac{1}{2}k\left(r^2 - r_o^2\right)$$

La posición $r = r_o$ corresponde a la posición de equilibrio. Si $r_o = 0$ y se elige $V(r_o) = 0$, tenemos que

$$V(r) = \frac{1}{2} k r^2$$

es la función energía potencial con respecto a la posición de equilibrio $r_o = 0$.

Ejemplo: Resorte en régimen elástico



En este caso, la fuerza de restitución sigue la ley de Hooke, $\vec{F} = -k x \hat{x}$

Por lo tanto, la energía potencial de un resorte, medida con respecto a la posición de equilibrio, es

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \text{si } V(0) = 0$$

III.5 **Fuerzas no conservativas**

La situación física más común corresponde a la coexistencia de fuerzas conservativas y no conservativas. Ejemplos de estas últimas son las fuerzas de roce viscoso y deslizante, siendo ambos tipos fuerzas disipativas que realizan un trabajo negativo, $W < 0$. En general las fuerzas no conservativas son aquellas en que el trabajo realizado **depende** de la trayectoria seguida.

Es conveniente expresar el trabajo W_R realizado por la fuerza resultante sobre una partícula como la suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas W_C más el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas W_{NC}

$$W_R = W_C + W_{NC}$$

Recordando que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas para ir desde un punto A a un punto B es igual a la diferencia de energía potencial entre A y B se tiene que: $W_C = V(A) - V(B)$

Asi, el teorema de las fuerzas vivas se puede expresar como:

$$K(B) - K(A) = V(A) - V(B) + W_{NC}$$

o en forma alternativa,

$$\{ K(B) + V(B) \} - \{ K(A) + V(A) \} = W_{NC}$$

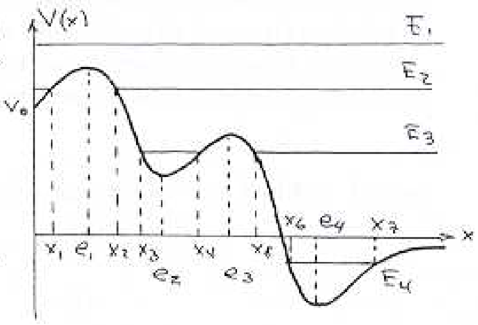
es decir, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica total.

III.6 **Energía potencial y movimiento. Equilibrio**

Al estudiar el movimiento de una partícula se puede obtener una cantidad importante de información a partir de la función energía potencial. Para simplificar la discusión, analizaremos el caso de un movimiento unidireccional. Considerando que sólo actúan fuerzas conservativas, es posible expresar la magnitud de la velocidad v de la partícula como:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Este resultado se deriva del teorema de conservación de la energía mecánica total E. Se observa que el movimiento sólo es posible cuando $E > V(x)$. Dependiendo de la función $V(x)$ y del valor de E, el movimiento queda restringido a un rango de valores de x.



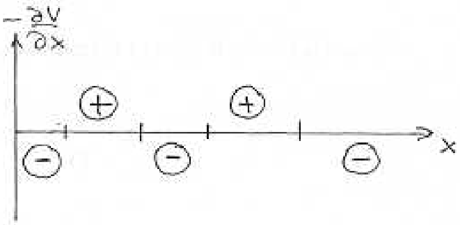
Para ilustrar las diferentes situaciones físicas que pueden producirse, supongamos una función de energía potencial como se muestra en la figura.

$V(x = 0) = V_0$

$V(x \to \infty) = 0$

Además, se ha graficado la magnitud de la fuerza que actúa en la dirección **x** utilizando la expresión:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{x}$$



A lo largo del eje x se muestra la dirección de la fuerza que se ejerce sobre la partícula.

Hay dos aspectos interesantes que analizar. El primero está relacionado con la región de la variable x donde el movimiento es posible para un nivel dado de energía mecánica E_o

Así, por ejemplo, observamos en el gráfico que para $E_o = E_1$ el movimiento es posible para todo x ya que siempre $E_1 > V(x)$. Para $E_o = E_2$, el movimiento es posible en el intervalo $[0, x_1]$ o en el intervalo $[x_2, \infty]$. Desde el punto de vista de la Mecánica clásica, nunca una partícula podría estar en el intervalo $[x_1, x_2]$, ya que la magnitud de la velocidad sería un número imaginario, lo cual no tiene sentido físico. Para $E_o = E_3$, el movimiento es posible en el intervalo $[x_3, x_4]$ o en el intervalo $[x_5, \infty]$. Finalmente, también es posible el movimiento para $E_o = E_4 < 0$ en el intervalo $[x_6, x_7]$.

Consideremos con mayor detalle el caso de una partícula que se desplaza desde el infinito hacia el origen x=0, con una energía cinética inicial igual a $E = E_3$ (en el infinito la energía potencial es nula). La partícula es acelerada (ver dirección de la fuerza) hasta el punto donde se alcanza el mínimo de energía potencial V_{min} en $x = e_4$. Una vez traspasado ese punto, donde la rapidez es máxima, la partícula empieza a desacelerar hasta que se detiene en el punto $x = x_5$. En ese punto, la fuerza que se ejerce sobre la partícula tiene la dirección de **x** creciente, razón por la cual la partícula es nuevamente acelerada hacia la derecha, alejándose indefinidamente.

El segundo aspecto a considerar tiene que ver con el tipo de movimiento que se produce en el intervalo $[x_3, x_4]$ y $[x_6, x_7]$. En ambos casos, la fuerza que se ejerce sobre la partícula apunta hacia el punto definido por la coordenada $x = e_2$ y $x = e_4$ respectivamente. Se puede concluir que si la partícula queda confinada a un pozo de potencial, su movimiento será **oscilatorio** en torno al punto en que la fuerza se anula.

• **Estabilidad**

La discusión y el ejemplo previo sugieren una situación nueva para aquellos puntos en que la fuerza se anula. En el gráfico anterior se observa que hay cuatro puntos ($x= e_1, e_2, e_3$ y e_4) donde la fuerza es nula y corresponde a la situación en que:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

En general, se dice que una partícula está en equilibrio si la fuerza neta que actúa sobre ella es nula. En este caso tenemos que $dV = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, es decir, la variación infinitesimal de la energía potencial es nula en el punto de equilibrio. Por lo tanto, se puede concluir que la energía potencial es mínima, máxima, o constante en la coordenada respectiva (ver figura). Estas tres situaciones se pueden definir en terminos de tipos de equilibrio:

a) posición de **equilibrio estable** es aquella donde la función energía potencial es **mínima**. Esto se expresa mediante la condición

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{\text{punto de equilibrio}} > 0$$

b) posición de **equilibrio inestable** es aquella donde la función energía potencial es **máxima**. En este caso,

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{\text{punto de equilibrio}} < 0$$

c) posición de equilibrio **indiferente** es aquella donde la energía potencial es constante en la vecindad del punto de equilibrio.

III.7 Oscilaciones pequeñas

Analizamos aquí el movimiento oscilatorio de una partícula en torno a una posición de equilibrio estable. Supongamos que en el caso unidimensional se tiene una función energía potencial arbitraria y que $x = x_o$ corresponde a la posición de equilibrio estable. Por lo tanto

$$\left[\frac{dV}{dx}\right]_{x_o} = 0$$

por ser la posición de equilibrio y

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o} > 0$$

por ser el equilibrio estable.

Interesa estudiar que sucede con $V(x)$ en puntos cercanos a x_o. Desarrollando en serie de Taylor tenemos que

$$V(x) = V(x_o) + \left[\frac{dV}{dx}\right]_{x_o}(x - x_o) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o}(x - x_o)^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{d^3V}{dx^3}\right]_{x_o}(x - x_o)^3 + \ldots$$

esto es, podemos expresar la función energía potencial como una serie de potencias alrededor de $x = x_o$ con la precisión que queramos.

En puntos suficientemente cercanos al punto de equilibrio x_o se puede aproximar el potencial $V(x)$ por la expresión:

$$V(x) = V(x_o) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o}(x - x_o)^2$$

y la fuerza que se ejerce sobre la partícula es

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dx}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{F} = -\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o}(x - x_o)\,\hat{\mathbf{x}}$$

que es equivalente a la fuerza de restitución elástica de un resorte con una constante equivalente igual a ,

$$k = \left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o}$$

y un largo natural equivalente a x_o. Se concluye así que para oscilaciones pequeñas en torno a la posición de equilibrio estable, el movimiento es **armónico simple** con una frecuencia angular igual a:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o}}$$

y el periodo de la oscilación queda dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

Si la amplitud de la oscilación crece, los términos en $(x - x_o)^3$ y potencias superiores cobran importancia, y por lo tanto la expresión utilizada para $V(x)$ ya no es válida. En ese caso la oscilación sigue siendo periódica pero el movimiento no es armónico.