

# 1. Ley de Coulomb

1. Compare la repulsión eléctrica de dos electrones separados por una distancia  $d$  con la atracción gravitacional entre las mismas dos partículas. Indicación: En el Sistema Internacional de Unidades, la carga del electrón está dada por  $q_e = -1,6 \times 10^{-19}$  Cb, la masa del electrón por  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg, la constante de gravitación universal por  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  Nt m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> y la constante que aparece en la ley de Coulomb por  $k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$  Nt m<sup>2</sup>/Cb<sup>2</sup>.

## Solución:

El módulo de la fuerza eléctrica entre los dos electrones está dado por

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{d^2}, \quad (1)$$

en que  $d$  es la distancia entre ellos. Por otra parte el módulo de la fuerza de atracción gravitacional entre ellos está dado por

$$F_g = G \frac{m_e^2}{d^2} \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{q_e^2}{m_e^2} \approx 4,16 \times 10^{42}$$

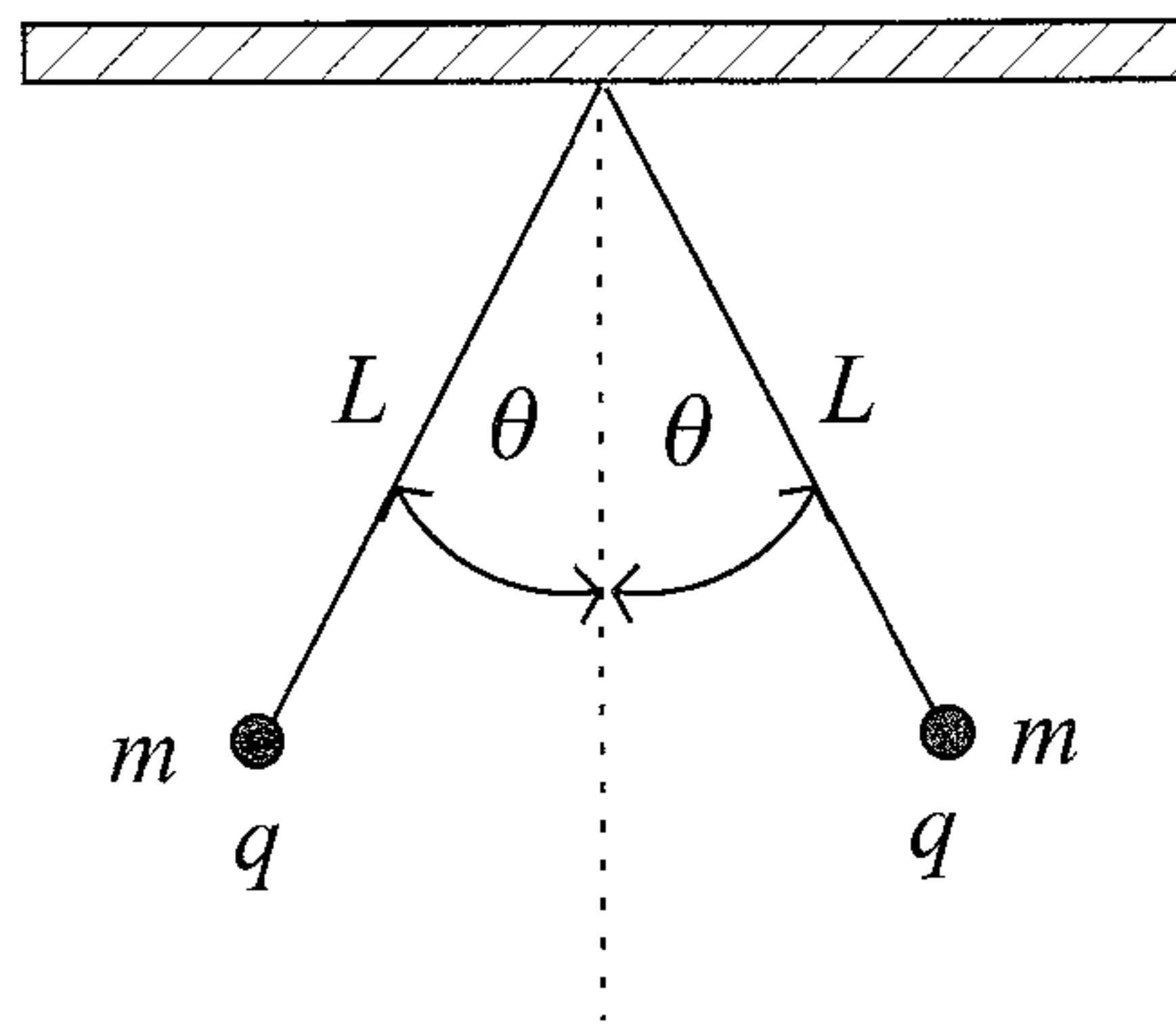
La fuerza eléctrica es mucho mayor que la atracción gravitacional, pero como la materia es eléctricamente neutra no la percibimos como ocurre con la fuerza de gravedad.

2. Dos pequeñas esferas de masa  $m$  están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud  $L$ . Cuando cada una de las esferas tiene

carga  $q$ , cada cuerda forma un ángulo  $\theta$  con la vertical como indica la figura. Demuestre que la carga  $q$  viene dada por

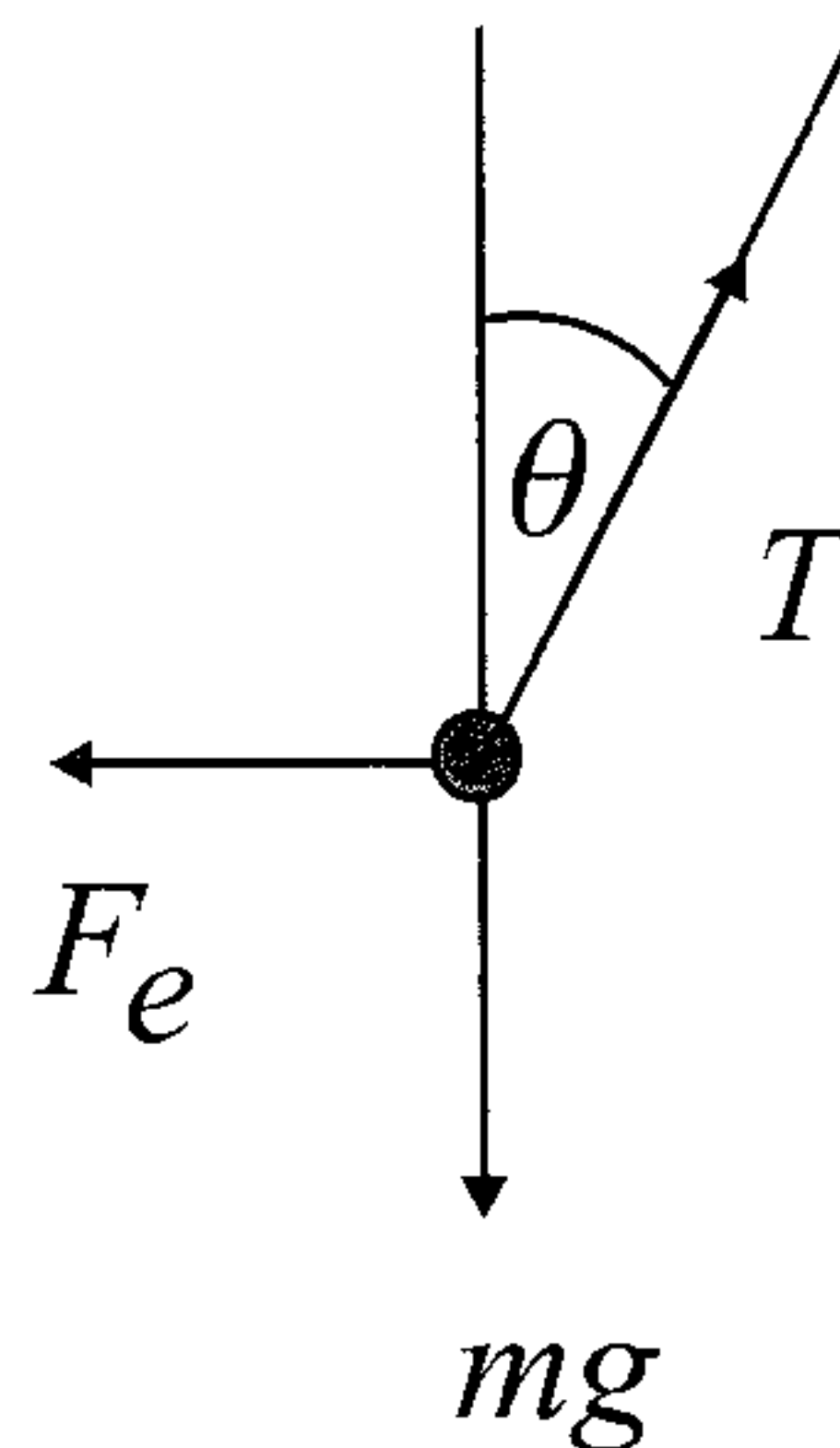
$$q = 2L \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k}}$$

donde  $k$  es la constante  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Determine  $q$  si  $m = 10$  [g],  $L = 50$  [cm] y  $\theta = 10^\circ$ .



### Solución:

Sobre cada una de las esferas actúan tres fuerzas: su peso, la repulsión eléctrica entre las esferas, y la tensión de la cuerda (ver diagrama de fuerzas en la figura). Si el sistema se encuentra en equilibrio, la fuerza



total sobre cada una de las esferas debe ser cero. La suma de las fuerzas

sobre cualquiera de las esferas en la dirección vertical es  $T \cos \theta - mg$ , en tanto que la suma de las fuerzas en la dirección horizontal es  $T \sin \theta - F_e$ , en que

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

Aquí  $r$  es la separación entre las esferas y está dado en términos de  $L$  por  $r = 2L \sin \theta$ . Entonces, por equilibrio de fuerzas

$$T \cos \theta = mg, \quad (1)$$

y

$$T \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4L^2 \sin^2 \theta}. \quad (2)$$

Dividiendo (2) por (1) obtenemos

$$\tan \theta = \frac{1}{mg} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4L^2 \sin^2 \theta},$$

de donde finalmente se tiene

$$q = 2L \sin \theta \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k}}.$$

Para el ejemplo numérico del problema se obtiene  $q = 2,4 \times 10^{-7}$  Cb.

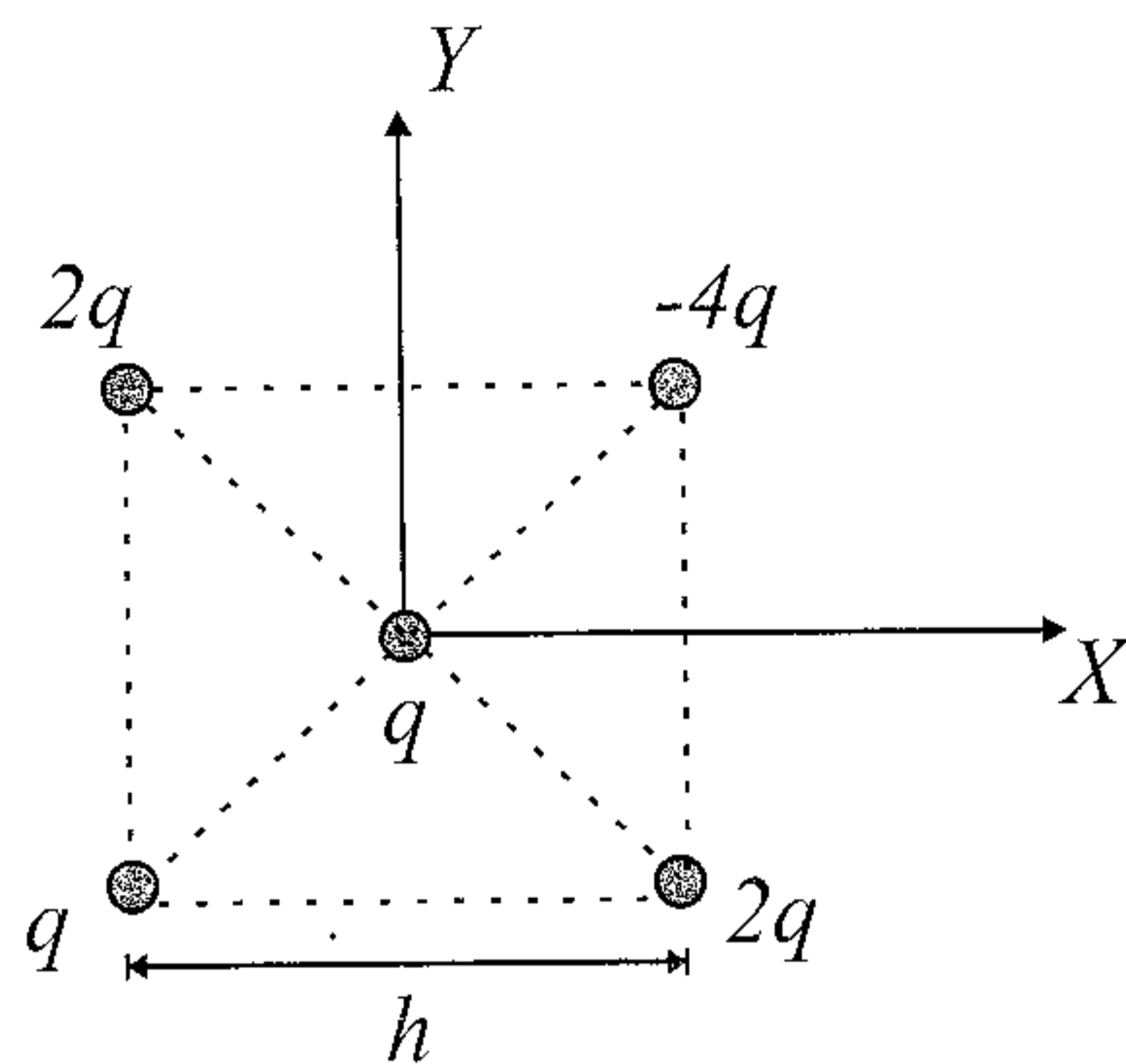
**3.** Cuatro cargas puntuales  $q$ ,  $2q$ ,  $-4q$  y  $2q$  están fijas en los vértices de un cuadrado de lado  $b$ . En el centro del cuadrado se coloca una quinta carga  $q$ . a) Indique en que dirección apunta la fuerza que actúa sobre la carga central  $q$ . b) Calcule explícitamente la fuerza (magnitud y dirección).

**Solución:**

Usemos los índices  $i = 1, \dots, 4$  para denotar a las cargas  $q$ ,  $2q$ ,  $-4q$  y  $2q$  respectivamente. Asignemos el índice  $i = 5$  a la carga central  $q$ . Por el principio de superposición, la fuerza total sobre la carga central es:

$$\vec{F} = \vec{F}_{51} + \vec{F}_{52} + \vec{F}_{53} + \vec{F}_{54}, \quad (1)$$

en que  $\vec{F}_{5i}$  denota la fuerza que hace la carga  $i$  sobre la carga central. Obviamente las fuerzas que ejercen las dos cargas  $2q$  sobre la carga central se anulan entre ellas ya que se encuentran sobre una misma línea. A pesar



de que este problema es fácil de resolver simplemente por inspección, lo haremos formalmente a modo de práctica.

Usemos coordenadas cartesianas en el plano con el origen en la carga central. Elegimos el eje  $x$  paralelo a la línea que une las cargas 1 y 2, y el eje  $y$  paralelo a la línea que va desde la carga 1 hacia la carga 4. La distancia de cualquiera de las cargas hasta la carga central es  $b\sqrt{2}/2$ , i.e.,  $|\vec{r}_i - \vec{r}_5| = b\sqrt{2}/2$ , para  $i = 1, \dots, 4$ . De (1) y de la ley de Coulomb, obtenemos,

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}, \quad (2)$$

en que

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{b^2} \cos 45^\circ (2q + q + 4q - 2q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5\sqrt{2}q^2}{b^2}. \quad (3)$$

Similarmente, se obtiene

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5\sqrt{2}q^2}{b^2}. \quad (4)$$

La fuerza total es, entonces,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5\sqrt{2}q^2}{b^2} (\hat{i} + \hat{j}).$$

La magnitud de  $\vec{F}$  está dada por

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10q^2}{b^2}. \quad (5)$$

4. Dos cargas puntuales están colocadas sobre el eje  $x$ .  $Q_1 = q$  en  $x = a$  y  $Q_2 = -4q$  en  $x = -a$ . Encuentre una expresión vectorial en coordenadas cartesianas para la fuerza que actúa sobre una carga de prueba  $Q$ , ubicada en un punto cualquiera del plano  $xy$ . Encuentre las coordenadas  $(x, y)$  de todos los puntos en los cuales la carga de prueba está en equilibrio. Discuta si el equilibrio es estable o inestable.

**Solución:**

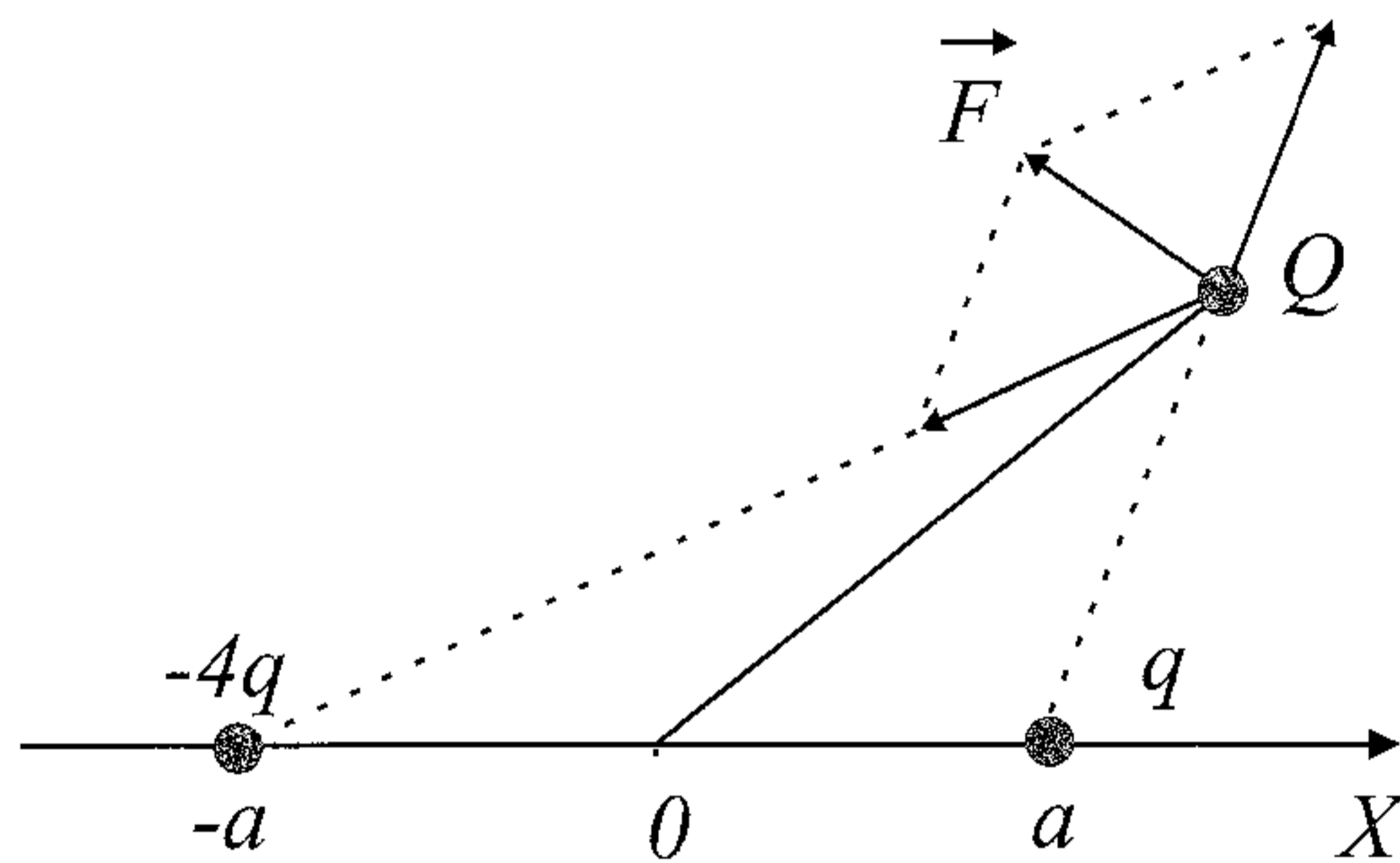
La fuerza que ejercen  $Q_1$  y  $Q_2$  sobre la carga  $Q$  está dada por

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left( \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{R}_1|^3} (\vec{r} - \vec{R}_1) - \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{R}_2|^3} (\vec{r} - \vec{R}_2) \right) \quad (1)$$

En este caso  $Q_1 = q$ ,  $\vec{R}_1 = a\hat{i}$ ,  $Q_2 = -4q$ ,  $\vec{R}_2 = -a\hat{i}$ , y  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ . Reemplazando estos valores en (1) obtenemos,

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x-a)\hat{i} + y\hat{j}}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} - 4 \frac{(x+a)\hat{i} + y\hat{j}}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \quad (2)$$

Observando la figura se deduce que el (los) único (s) puntos de equilibrio



se pueden encontrar sobre el eje  $x$  (si  $Q$  se encuentra fuera del eje  $x$  la suma de las fuerzas que  $Q_1$  y  $Q_2$  ejercen sobre  $Q$  no puede ser cero). Ahora bien, si  $Q$  se encuentra sobre el eje  $x$ ,  $y = 0$  y de (2) tenemos

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x-a)}{|x-a|^3} - 4 \frac{(x+a)}{|x+a|^3} \right] \hat{i} \quad (3)$$

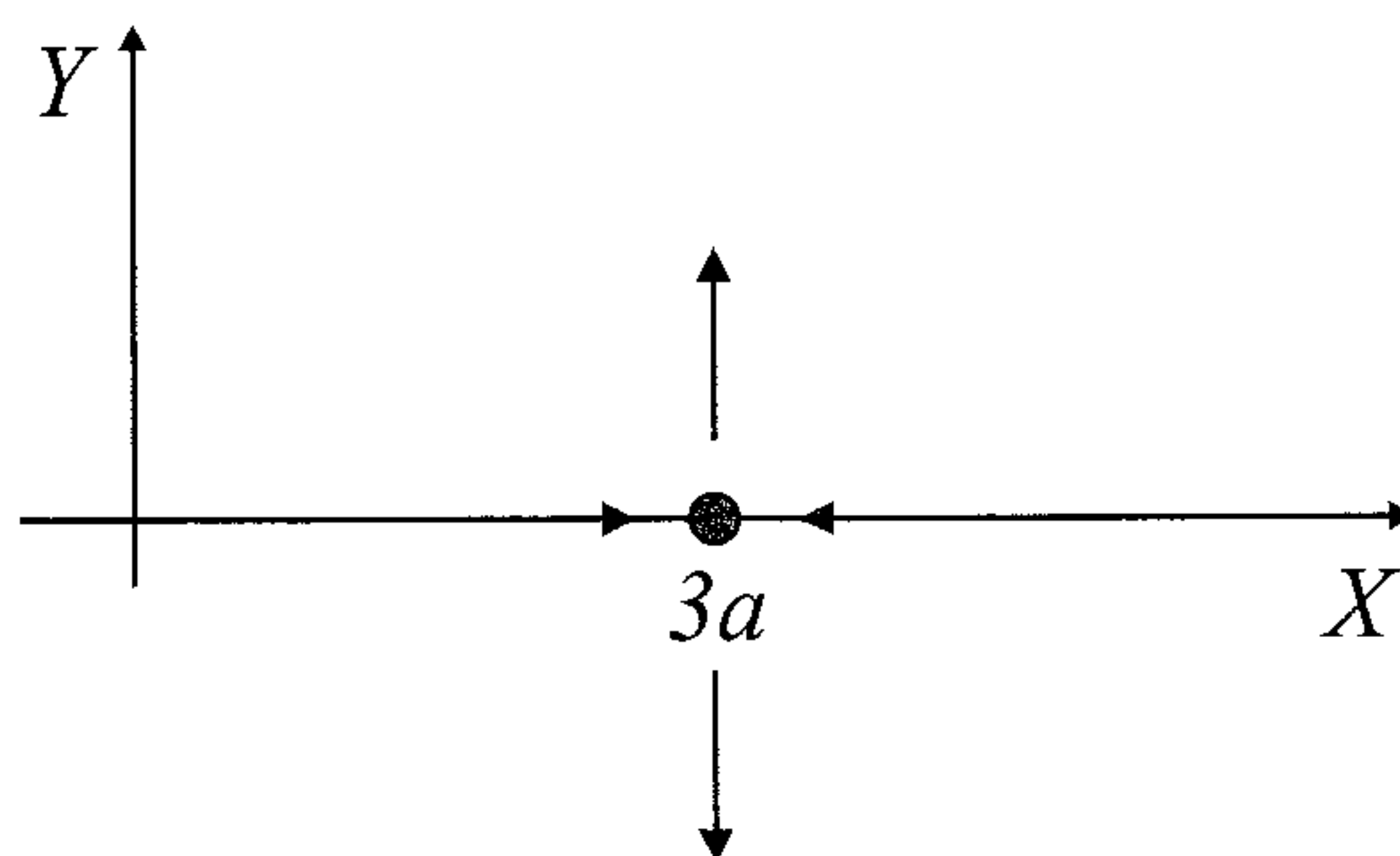
La fuerza se anula en los puntos de equilibrio. Si  $-a < x < a$  el primer término es negativo ya que  $x - a$  es negativo. No puede haber solución

en esta situación, pero si  $|x| > a$  tenemos términos de signo opuesto que se pueden cancelar. Resolviendo la ecuación  $\vec{F} = (x+a)^2 - 4(x-a)^2 = 0$  se encuentra que hay solamente un punto de equilibrio y se encuentra en  $(x, y) = (3a, 0)$ .

La estabilidad del punto de equilibrio la podemos determinar efectuando un pequeño desplazamiento de la carga  $Q$  de la posición de equilibrio. El punto es estable si la fuerza que se ejerce sobre la carga la redirige a su posición de equilibrio, es inestable si la aleja. Hay un teorema de validez general, el teorema de Earnshaw, que prueba que el punto de equilibrio es necesariamente inestable. Su demostración se incluye en el capítulo 2 ya que es una aplicación sencilla del teorema de Gauss. Aquí lo haremos explícitamente. Nos preguntamos por la fuerza que se ejerce sobre la carga  $Q$  al alejarse una cantidad pequeña del punto de equilibrio. Es decir, supongamos que la carga  $Q$  se encuentra en la posición  $x = 3a + \delta$  e  $y = \epsilon$ . Reemplazando estos valores en la ecuación (2) y desarrollando en serie para  $\delta$  y  $\epsilon$  pequeños, considerando términos hasta primer orden, obtenemos,

$$\vec{F} = \frac{qQ}{64\pi\epsilon_0 a^3} [-8\delta\hat{i} + \epsilon\hat{j}].$$

La fuerza sobre la carga  $Q$  al ser desplazada de la posición de equilibrio a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  apunta en la dirección señalada en la figura. Como vemos, si se la desplaza en la dirección  $x$  vuelve al equilibrio, pero si se desplaza a lo largo del eje  $y$ , se aleja del equilibrio, por lo que concluimos que es inestable.



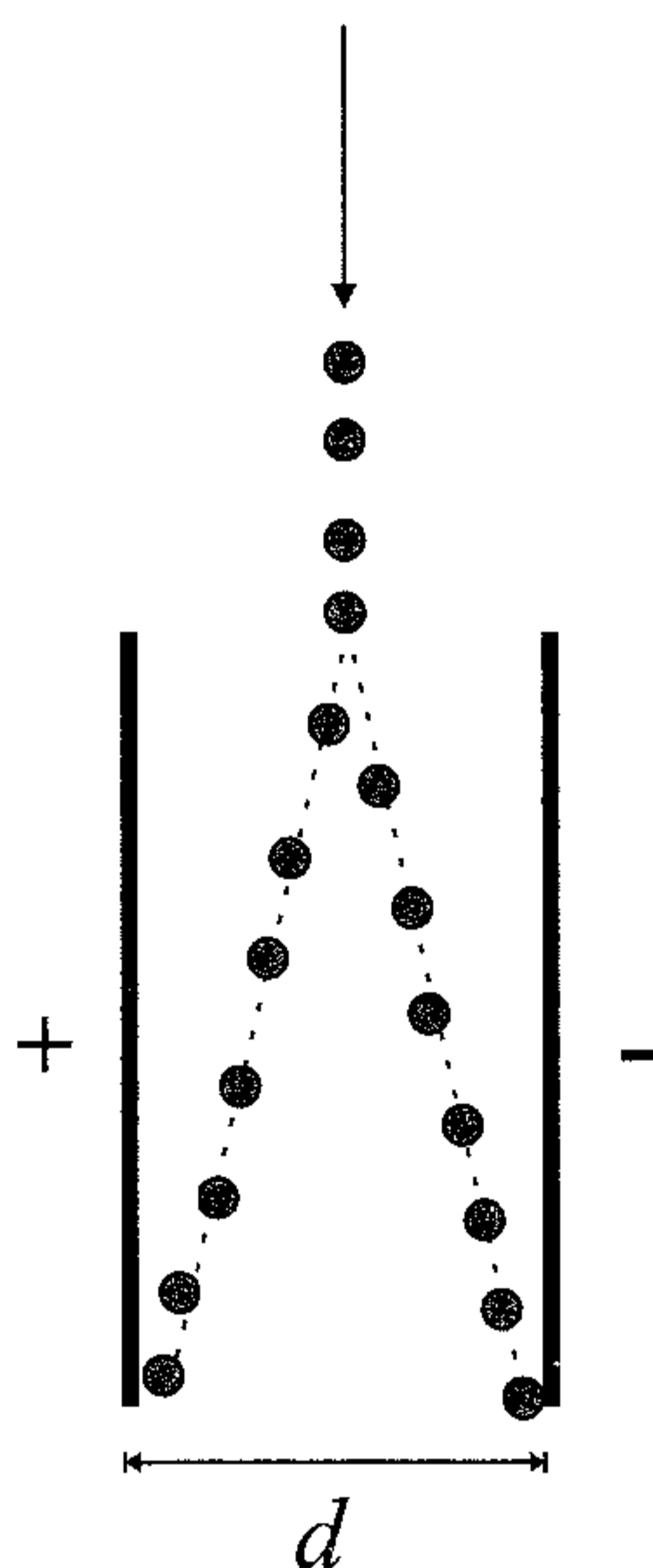
5. El material extraído de un mineral de fosfato consiste en una mezcla de partículas de cuarzo y piedras de fosfato. Si la mezcla se hace vibrar, el cuarzo se carga negativamente y el fosfato positivamente. Suponga que

la razón entre el módulo de la carga y la masa es la misma para todas las partículas:

$$\frac{|q_1|}{m_1} = \frac{|q_2|}{m_2} = \dots = \gamma$$

Entonces, el fosfato se puede separar del cuarzo dejándolo caer entre dos placas de largo  $L$  cargadas con densidades  $\sigma$  y  $-\sigma$ , como se muestra en la figura. Determine la longitud mínima de las placas que crean el campo eléctrico (que separa las partículas) de modo que al llegar a los colectores las partículas de fosfato y cuarzo estén separadas por una distancia  $d$ .

Nota: Las partículas parten del reposo. No considere los efectos de borde de los planos.



### Solución:

Las partículas al caer por el *separador* son aceleradas verticalmente por la fuerza de gravedad y horizontalmente por el campo eléctrico producido por las placas. Si despreciamos los efectos de borde el campo entre las placas es uniforme. Llamemos  $E$  a la magnitud del campo. La aceleración vertical de las partículas (tanto de las de cuarzo como de las de fosfato) es  $g$ , uniforme. La aceleración horizontal de las partículas está dada por:

$$a = \frac{F}{m} = \pm \frac{qE}{m} = \pm \gamma E \quad (1)$$

Las partículas de cuarzo son aceleradas en la dirección del campo (signo + en (1)) en tanto que las partículas de fosfato son aceleradas en la dirección contraria al campo (signo - en (1)). Como ambos tipos de partículas parten desde el reposo, y efectúan un movimiento uniformemente acelerado tanto en la dirección vertical como en la dirección horizontal, si llamamos  $T$  al tiempo que tardan en llegar a los colectores, debemos tener

$$L = \frac{1}{2}gT^2, \quad (2)$$

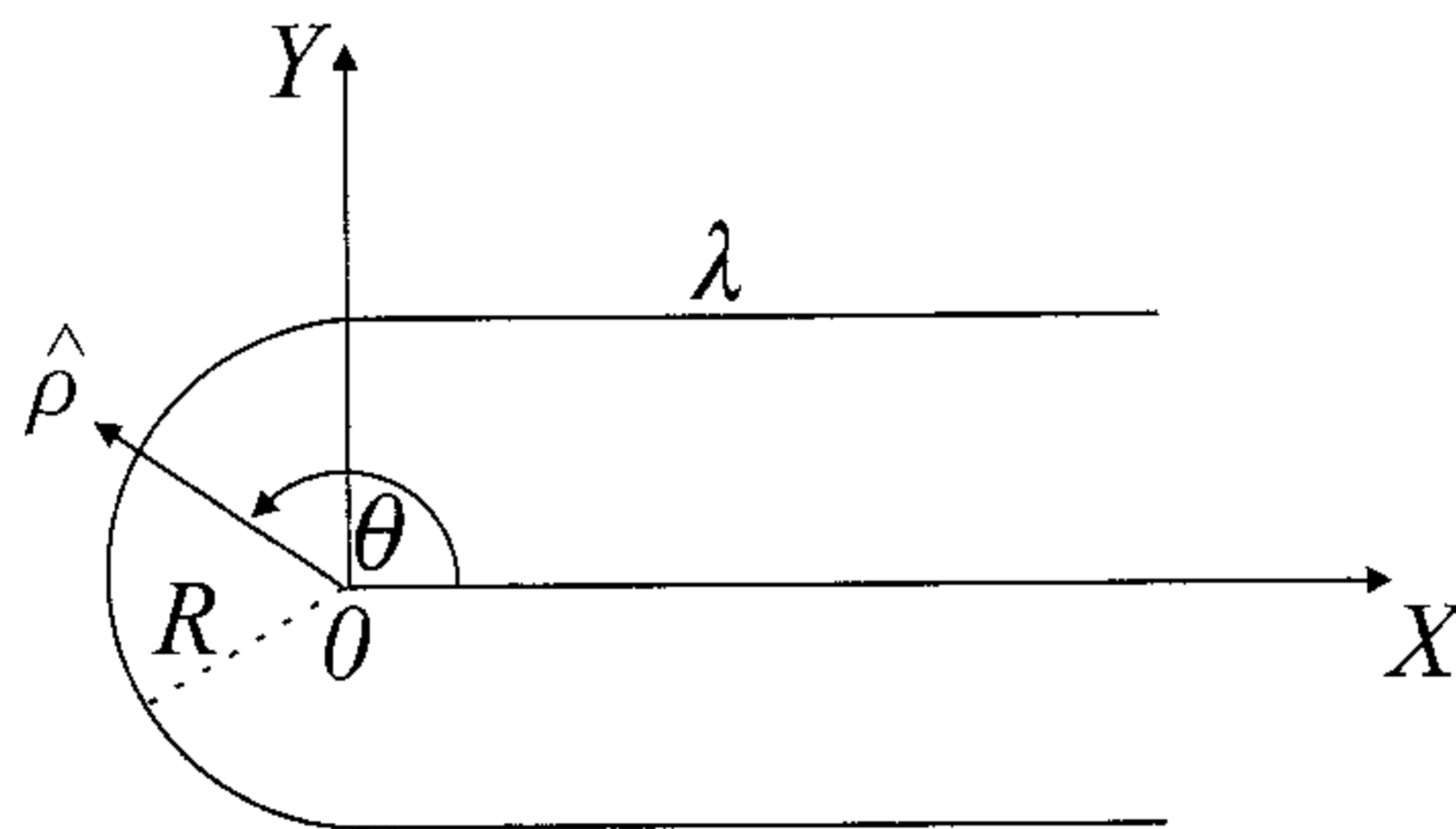
y,

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\gamma ET^2. \quad (3)$$

Aquí hemos supuesto que las partículas caen en la mitad del dispositivo (a distancia  $d/2$  de cada placa). Dividiendo (2) por (3) obtenemos el resultado pedido,

$$L = \frac{1}{2} \frac{g}{\gamma E}.$$

**6.** Un alambre infinito con densidad lineal de carga  $\lambda$  se dobla en forma de horquilla como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto  $O$ .



### Solución:

Pongamos el origen de coordenadas en el punto  $O$ , y elijamos el plano  $(x, y)$  de modo que el alambre doblado esté contenido en éste. Finalmente elegimos el eje  $x$  como se indica en la figura.

Primero calcularemos el campo eléctrico producido por la semicircunferencia, luego el campo producido por los dos semiejes y finalmente usaremos el principio de superposición para calcular el campo total en  $O$ . Para



calcular cada una de estas tres contribuciones usaremos la expresión del campo eléctrico producido por una distribución lineal de cargas, es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \lambda(\vec{R}) ds \quad (1)$$

en que  $\lambda(\vec{R})$  denota la densidad lineal de carga,  $\vec{r}$  es el punto donde deseamos calcular el campo,  $\vec{R}$  recorre los puntos de la distribución y  $ds$  es el elemento de longitud de la línea donde se encuentra la carga.

En este problema, por nuestra elección del origen,  $\vec{r} = 0$ . Primero calculamos el campo producido por la circunferencia. En este caso  $\vec{R} = R\hat{\rho}$  y  $ds = R d\theta$ . Reemplazando  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{R} = R\hat{\rho}$  y  $ds = R d\theta$  en (1) obtenemos,

$$\vec{E}_1(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{\rho}(\theta) d\theta. \quad (2)$$

Con el objeto de hacer esta última integral expresamos  $\hat{\rho}$  en coordenadas cartesianas:  $\hat{\rho}(\theta) = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$ . Reemplazando esta expresión en (2) y calculando las integrales, finalmente obtenemos,

$$\vec{E}_1(0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{i}. \quad (3)$$

Ahora calcularemos la contribución al campo debida al alambre que se ubica en el semieje  $y = R$  y que se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = \infty$ . En este caso  $\vec{R} = x\hat{i} + R\hat{j}$  y  $ds = dx$ . Reemplazando en (1) esta vez encontramos,

$$\vec{E}_2(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} + R \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} \right], \quad (4)$$

pues  $|\vec{R}| = \sqrt{x^2 + R^2}$ . Ahora,

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}. \quad (5)$$

Entonces de (4) y (5) obtenemos la contribución del alambre superior:

$$\vec{E}_2(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} \hat{i} + \frac{1}{R} \hat{j} \right]. \quad (6)$$

Un cálculo completamente análogo para el alambre inferior (i.e., para el alambre que se ubica en el semieje  $y = -R$  entre  $x = 0$  y  $x = \infty$ ) da:

$$\vec{E}_3(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R}\hat{i} - \frac{1}{R}\hat{j} \right]. \quad (7)$$

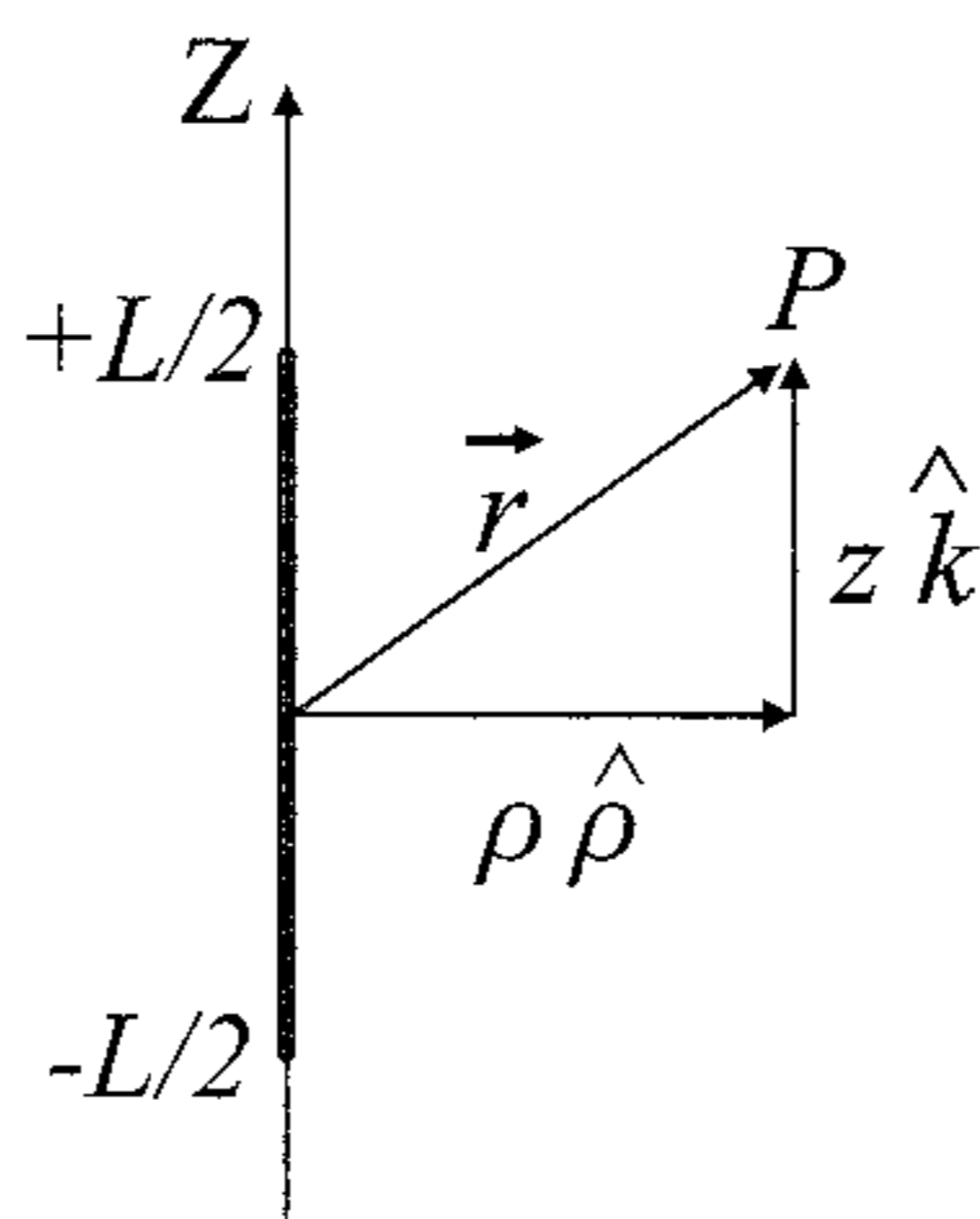
Finalmente, el campo eléctrico total producido por la distribución de carga se calcula sumando las tres contribuciones (3), (6), y (7). De este modo obtenemos,

$$\vec{E}(0) = 0.$$

7. Considere un segmento de recta de largo  $L$  cargado con densidad uniforme  $\lambda$ , ubicado a lo largo del eje  $Z$ , con el origen en el centro del segmento. a) Encuentre el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en todo el espacio. b) Calcule los límites  $r \ll L$  y  $r \gg L$ .

**Solución:**

Queremos calcular en un punto  $P(\vec{r})$  cualquiera en el espacio, el campo producido por una distribución de carga uniforme  $\lambda$  sobre un segmento de largo  $L$ . Esta distribución tiene simetría axial alrededor del eje que contiene la distribución lineal de carga. Por este motivo es conveniente usar coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  para rotular el punto  $P$ . Entonces,



el vector  $\vec{r}$  de la figura está dado por:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}. \quad (1)$$

Para rotular un punto sobre la distribución, utilizamos la coordenada  $Z$ . Aquí  $Z$  varía entre  $-L/2$  y  $L/2$ . Entonces, el vector  $\vec{R}$  que recorre los

puntos de la distribución está dado por  $\vec{R} = Z\hat{k}$ . Entonces, el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \lambda dZ \quad (2)$$

pero de (1) y (2) obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho \hat{\rho} + E_z \hat{k} \quad (3)$$

en que

$$E_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} dZ \quad (4)$$

y

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{(z - Z)}{[\rho^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} dZ. \quad (5)$$

Haciendo el cambio de variables  $z - Z = \rho u$  en las integrales anteriores, obtenemos,

$$E_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \int_{(-2z-L)/2\rho}^{(-2z+L)/2\rho} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Finalmente, utilizando

$$\int_a^b \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{b}{(1 + b^2)^{1/2}} - \frac{a}{(1 + a^2)^{1/2}}$$

(para efectuar esta integral se recurre a un cambio trigonométrico) obtenemos,

$$E_\rho = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{(-2z + L)}{(\rho^2 + (z - \frac{L}{2})^2)^{1/2}} + \frac{(2z + L)}{(\rho^2 + (z + \frac{L}{2})^2)^{1/2}} \right\} \quad (7)$$

Ahora, el mismo cambio de variable en  $E_z$  da:

$$E_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \int_{(-\frac{L}{2}-z)\frac{1}{\rho}}^{(\frac{L}{2}-z)\frac{1}{\rho}} \frac{udu}{(1 + u^2)^{3/2}}$$

y finalmente,

$$E_z = +\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(\rho^2 + (L/2 - z)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(\rho^2 + (L/2 + z)^2)^{1/2}} \right). \quad (8)$$

Nótese que como es de esperar  $E_z = 0$  para  $z = 0$ . Además, sobre el eje, y para  $z \notin (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ ,  $E_\rho = 0$

A partir de este ejemplo podemos recuperar la expresión del campo producido por una recta infinita. En efecto, si suponemos  $z \in (-L/2, L/2)$  y  $\rho \ll L$ , podemos despreciar el término  $\rho$  frente a los términos  $(L/2 + z)$  o  $(-L/2 - z)$  en los denominadores de (7) y (8). Entonces, en este límite, de (7) obtenemos,

$$E_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{(-2z + L)}{((z - \frac{L}{2})^2)^{1/2}} + \frac{(2z + L)}{((z + \frac{L}{2})^2)^{1/2}} \right\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho},$$

que es efectivamente la componente radial del campo producido por la línea infinita. (Aquí hemos usado que  $\sqrt{z^2} = z$  si  $z > 0$  y  $\sqrt{z^2} = -z$  si  $z < 0$ ). En el mismo límite ( $L \rightarrow \infty$ ), de (8) obtenemos  $E_z = 0$  como era de esperar.

Por otra parte, a grandes distancias del segmento de carga, dicho segmento se ve como un punto cargado, y entonces esperamos que el campo corresponda al campo producido por una carga puntual. A modo de ejemplo, si tomamos un punto sobre el plano  $z = 0$  (i. e., el plano bisectriz del segmento),  $E_z = 0$  como ya hemos visto y,

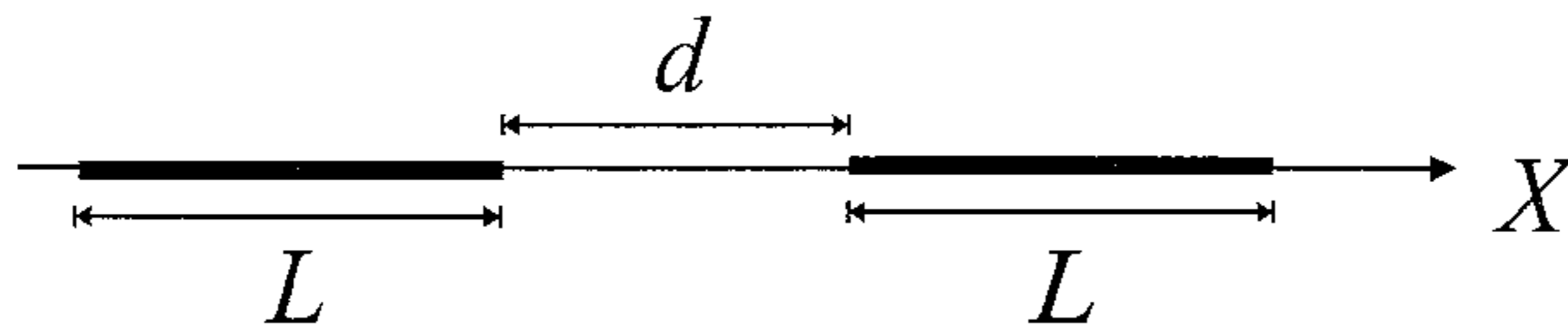
$$E_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{\rho} \frac{1}{(\rho^2 + (L/2)^2)^{1/2}}.$$

Para grandes distancias del segmento,  $\rho \gg L$  y entonces, de la expresión anterior obtenemos,

$$E_\rho \approx \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0\rho^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho^2},$$

que corresponde precisamente a la expresión para el campo producido por una partícula con carga  $Q$ . En este caso  $Q = \lambda L$  corresponde a la carga total depositada en el segmento.

**8.** Dos cargas lineales uniformes e iguales de longitud  $L$  están situadas sobre el eje  $x$  separadas por una distancia  $d$  como se indica en la figura. a) ¿Cuál es la fuerza que una carga lineal ejerce sobre la otra? b) Demuestre que cuando  $d \gg L$ , la fuerza tiende al resultado esperado  $(\lambda L)^2 / (4\pi\epsilon_0 d^2)$ , que es la interacción entre dos cargas puntuales.

**Solución:**

a) Elijamos el eje  $x$  de modo que ambas cargas lineales se encuentren sobre él, la primera extendiéndose entre  $x = 0$  y  $x = L$  en tanto que la segunda desde  $x = L + d$  hasta  $X = 2L + d$ . Para calcular la fuerza entre ambas distribuciones primero calcularemos el campo producido por la distribución de la izquierda sobre un punto cualquiera del eje  $x$  y luego calcularemos el efecto de este campo sobre la distribución de la derecha. El campo producido por la distribución de la izquierda sobre un punto  $x > L$  del eje  $x$  está dado por:

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda}{(x - X)^2} dX \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{x(x - L)} \hat{i}. \quad (1)$$

La fuerza que este campo ejerce sobre un elemento  $dx$  de la distribución de la derecha está dada por:

$$d\vec{F} = \vec{E}(x) \lambda dx$$

en que  $\vec{E}(x)$  es el campo obtenido en (1). Entonces, la fuerza total sobre la distribución de la derecha es:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda^2 \int_{d+L}^{d+2L} \left( \frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) dx \hat{i} \quad (2)$$

Calculando las integrales en (2) finalmente obtenemos,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda^2 \ln \left( \frac{(d + L)^2}{d(d + 2L)} \right) \hat{i} \quad (3)$$

b) Para calcular la magnitud de la fuerza calculada en a), para  $d \gg L$ , primero notemos que el argumento del logaritmo al lado derecho de (3) se puede escribir como:

$$f(s) \equiv \frac{(1 + s)^2}{1 + 2s},$$

en que  $s = L/d \ll 1$ . Luego expandimos  $f(s)$  en serie de Taylor alrededor de  $s = 0$ . Hasta segundo orden en  $s$  obtenemos,

$$f(s) \approx 1 + s^2 \quad (4)$$

Así, para grandes distancias entre las distribuciones lineales de carga, de (3) y (4) obtenemos,

$$\vec{F} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda^2 \ln(1 + s^2) \hat{i} \quad (5)$$

Finalmente, usando la expansión de la función  $\ln(1+x) \approx x$  para  $x \ll 1$ , obtenemos de (5),

$$\vec{F} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda^2 s^2 \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\lambda L)^2}{d^2} \hat{i}$$

como era de esperar. En efecto, si la distancia entre las distribuciones de carga es mucho mayor que la longitud de éstas, la fuerza entre las distribuciones se puede aproximar muy bien suponiendo que éstas son *cargas puntuales* de magnitud  $\lambda L$  cada una.

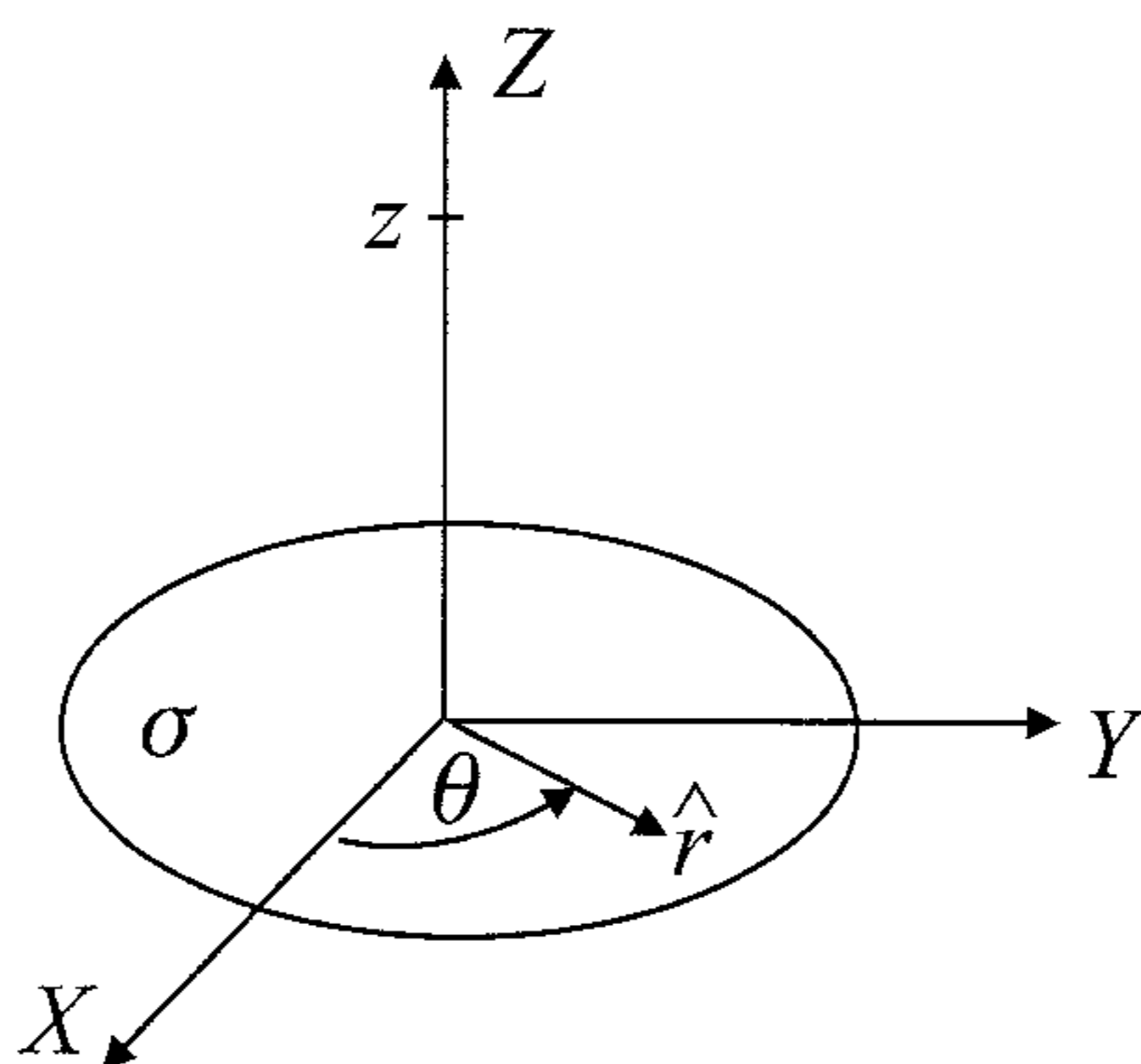
**9. a)** Un disco circular de radio  $a$  tiene una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$ . Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una distancia  $z$  del plano de dicho disco. **b)** Obtenga, a partir del resultado anterior, el campo creado por un plano infinito con densidad de carga  $\sigma$ .

**Solución:**

a) Para calcular el campo eléctrico producido por el disco en un punto cualquiera de su eje, conviene usar coordenadas cilíndricas, eligiendo el eje  $z$  como el eje de simetría del disco. Además ubicamos el disco en el plano  $z = 0$  y usamos coordenadas polares  $(r, \theta)$  para describir los distintos puntos del disco. El campo eléctrico producido por una distribución superficial de carga en un punto cualquiera  $\vec{r}$  está dado en forma general por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} (\vec{r} - \vec{R}) dS \quad (1)$$

en que  $\vec{R}$  recorre los distintos puntos de la superficie  $S$ . Para el disco en cuestión  $\sigma$  es uniforme,  $\vec{r} = z\hat{k}$  y  $\vec{R} = r\hat{r}$ . Entonces,  $\vec{r} - \vec{R} = z\hat{k} - r\hat{r}$ , de



modo que  $|\vec{r} - \vec{R}| = \sqrt{z^2 + R^2}$ . El elemento de superficie en coordenadas polares está dado por  $dS = r dr d\theta$ . Para el disco,  $0 \leq r \leq a$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Reemplazando todas estas cantidades en (1) obtenemos,

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{k} - r\hat{r}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} r dr d\theta. \quad (2)$$

El integrando en el lado derecho de (2) solo depende de la variable  $\theta$  a través del vector unitario  $\hat{r}$ . En efecto, si expresamos este vector en coordenadas cartesianas tenemos:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j},$$

y vemos que

$$\int_0^{2\pi} \hat{r}(\theta) d\theta = 0. \quad (3)$$

Utilizando (3), y  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ , (2) se puede escribir simplemente como:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{z r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \hat{k} \quad (4)$$

El integrando es una derivada exacta,  $r/(z^2 + r^2)^{3/2} = -d(z^2 + r^2)^{-1/2}/dr$ , por lo que podemos calcular fácilmente el lado derecho de (4). Así, obtenemos,

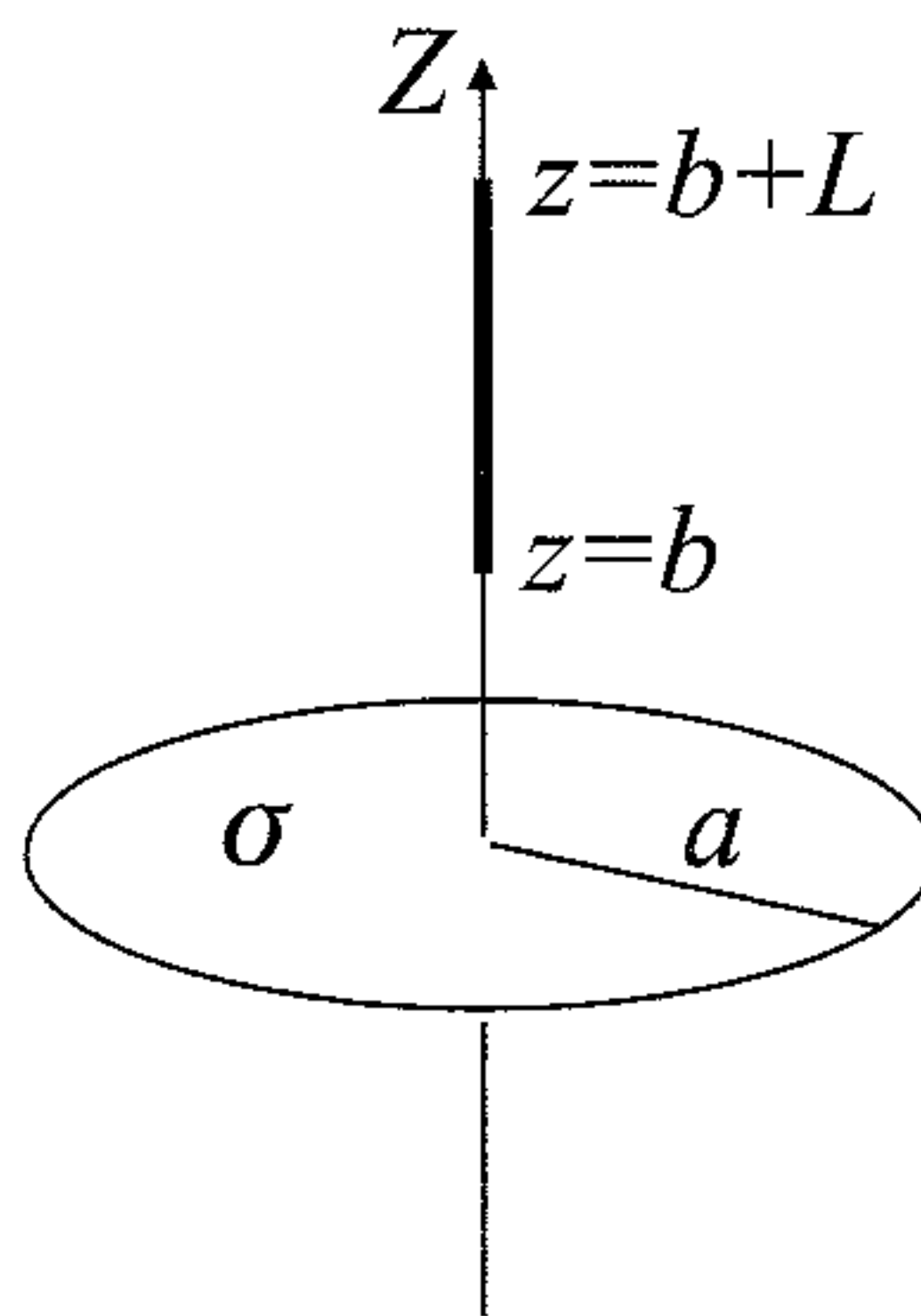
$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{k} \quad (5)$$

Aquí hemos usado  $\sqrt{z^2} = |z|$

b) Un plano infinito con densidad de carga  $\sigma$  lo podemos considerar como un disco de radio infinito. Como  $\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow \infty$ , encontramos que el campo eléctrico es constante, pero cambia su dirección al atravesar el plano cargado en  $z = 0$ ,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}.$$

**10.** Determine la fuerza entre un disco de radio  $a$  cargado con densidad uniforme de carga  $\sigma$  y una varilla de largo  $L$  colocada en el eje del disco a una distancia  $b$  de él, con densidad lineal  $\lambda$ .



### Solución:

Elijamos un sistema de coordenadas de modo que el disco se encuentre en el plano  $x-y$  y cuyo eje de simetría sea el eje  $z$ . Entonces el campo producido por el disco en un punto  $z > 0$  del eje está dado por:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \hat{k} \quad (1)$$

Hemos usado la ecuación (5) del problema anterior, y como  $z$  es positivo,  $z/|z| = 1$ . La fuerza que este campo ejerce sobre un elemento de longitud  $dz$  de la varilla está dada por:

$$d\vec{F} = \vec{E}(z) dq = \vec{E}(z) \lambda dz = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] dz \hat{k} \quad (2)$$



A partir de (2) podemos calcular la fuerza total ejercida por el disco sobre la varilla.

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \int_b^{b+L} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] dz \hat{k}$$

Calculando la integral obtenemos,

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \left[ L + \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{(b+L)^2 + a^2} \right] \hat{k} \quad (3)$$

*Comentarios:* i) Dejamos como ejercicio para el lector calcular la fuerza ejercida por la varilla sobre el disco. Para hacer este último cálculo primero se debe encontrar el campo producido por la varilla (resuelto en un problema anterior) y después se debe calcular la acción de este campo sobre el disco. Por el principio de acción y reacción de Newton, la fuerza de la varilla sobre el disco debe ser igual a menos la fuerza encontrada en (3).

ii) Si la distancia entre la varilla y el disco es mucho mayor que las dimensiones del disco y de la varilla (i.e., si  $b \gg a$  y  $b \gg L$ ) la fuerza encontrada en (3) debería ser aproximadamente:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\pi a^2 \sigma)(L\lambda)}{b^2},$$

que es la fuerza entre dos *cargas puntuales* de magnitudes  $(\pi a^2 \sigma)$  y  $(L\lambda)$  respectivamente, separadas por una distancia  $b$ . Dejamos como ejercicio para el lector verificar que efectivamente se obtiene este resultado en el límite  $b \gg a, L$ .

**11.** Calcule el campo eléctrico, en todo el espacio, creado por una franja de ancho  $2a$  y densidad de carga superficial  $\sigma$ .

**Solución:**

Ubiquemos la franja en el plano  $y = 0$  y centrada en el eje  $z$  de tal forma que se extienda entre  $x = -a$  y  $x = a$ . Por simetría, como la franja es de largo infinito, el campo no depende de  $z$  y lo podemos calcular en  $z = 0$ . Consideraremos la franja como un continuo de alambres de espesor  $dx'$  cada uno.

Recordemos que el campo eléctrico debido a un alambre de densidad de carga lineal  $\lambda$  a una distancia  $\rho$  de éste es:

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\rho}}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\rho}}{\rho^2}$$

Esta fórmula supone un alambre ubicado coincidiendo con el eje  $z$ , por lo que  $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$  es el vector radial en coordenadas polares.

Si consideramos un “alambre” de ancho  $dx'$  ubicado en  $x'$ , la carga por unidad de longitud es  $\sigma dx'$  y  $\vec{\rho} = (x - x')\hat{x} + y\hat{y}$  y el campo eléctrico creado por este “alambre” en un punto  $(x, y)$  es

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\sigma dx' (x - x')\hat{x} + y\hat{y}}{2\pi\epsilon_0 (x - x')^2 + y^2}$$

y el campo total creado por la franja es la suma de todos estos “alambres”, esto es:

$$\vec{E}(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx' [(x - x')\hat{x} + y\hat{y}]}{(x - x')^2 + y^2} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (I_x\hat{x} + I_y\hat{y}).$$

Las integrales  $I_x$  e  $I_y$  están dadas por:

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{(x - x')dx'}{(x - x')^2 + y^2} = \ln \sqrt{\frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}}$$

$$I_y = \int_{-a}^a \frac{y dx'}{(x - x')^2 + y^2} = \arctan\left(\frac{a - x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{a + x}{y}\right)$$

Podemos verificar que obtenemos algunos límites correctos. Por ejemplo, si  $x = 0$  estamos observando puntos frente al centro de la franja y por simetría esperamos que el campo esté dirigido a lo largo del eje  $y$ . Vemos que  $I_x(x = 0, y) = \ln(1) = 0$ . Por otra parte, si observamos sobre el plano de la franja, o sea con  $y = 0$ , esperamos que para  $x > a$  el campo este dirigido al lo largo del eje  $x$ . Efectivamente  $I_y(x > a, 0) = 0$ , ya que

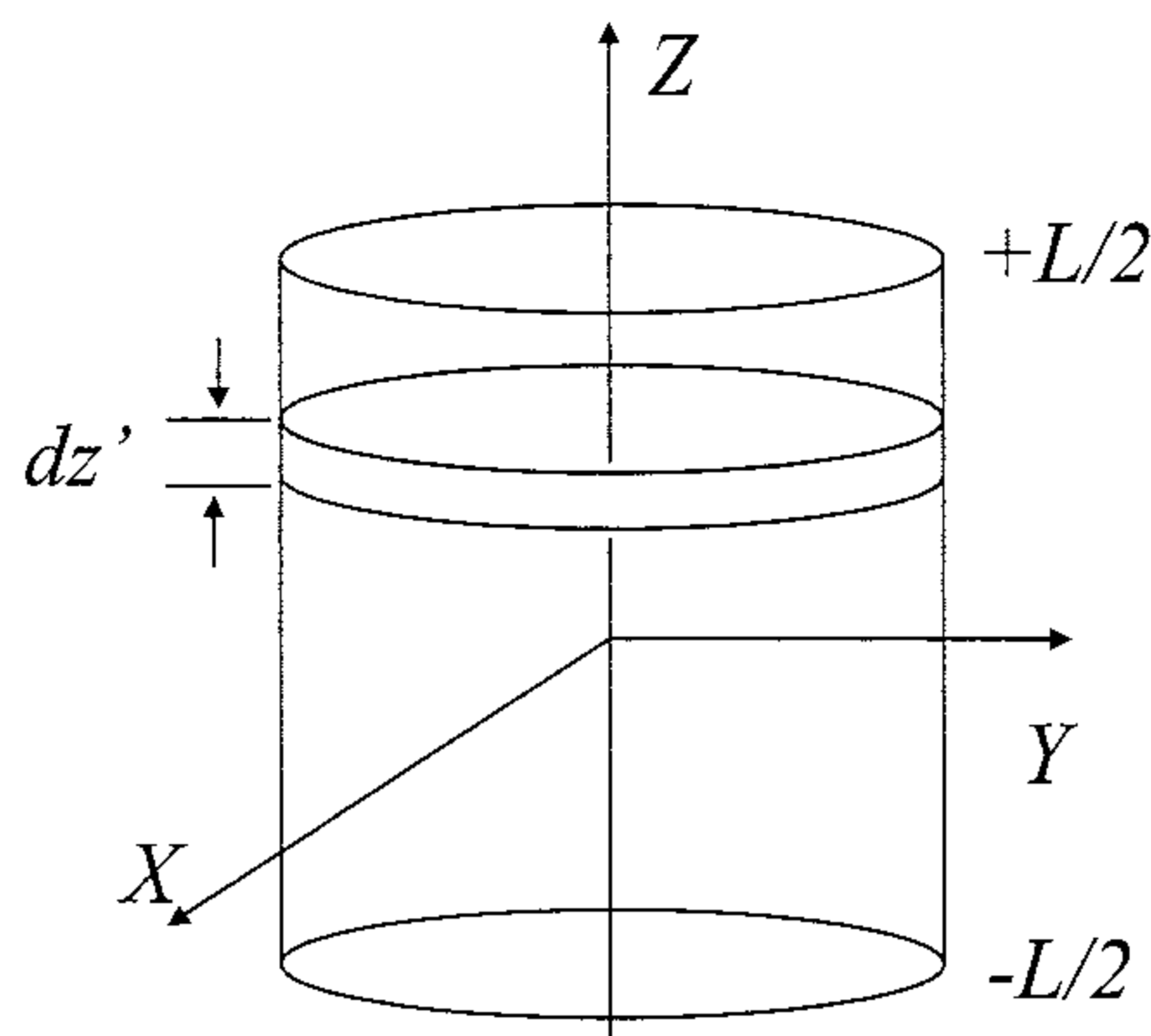
$$\lim_{y \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{a - x}{y}\right) = \arctan(-\infty) = -\pi/2$$

y

$$\lim_{y \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{a + x}{y}\right) = \arctan(\infty) = \pi/2$$

por lo que la componente según  $\hat{y}$  del campo eléctrico se anula.

**12. a)** Calcule el campo eléctrico creado por un cilindro de largo  $L$  y radio  $a$ , con densidad de carga  $\rho$ , en puntos sobre su eje, pero fuera de la



distribución de carga. b) Repita el cálculo anterior para el caso en que el cilindro tiene una densidad de carga no uniforme dada por  $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$  con respecto a un origen en el centro del cilindro.

### Solución:

Sabemos que el campo eléctrico creado por un disco de radio  $a$  y densidad de carga superficial  $\sigma$  es, en puntos sobre su eje,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \hat{z},$$

donde hemos supuesto que el disco está en el plano  $xy$ .

Consideremos ahora un disco ubicado en  $z'$  y de ancho  $dz'$  (ver figura). Podemos asignarle una densidad de carga superficial  $\rho dz'$  (la carga de un disco de área  $S$  y espesor  $dZ$  es  $dq = \rho S dZ$ , o expresado como una densidad superficial es  $dq = \sigma S$ . Comparando vemos que  $\sigma = \rho dz'$ ). El punto  $P$  está a una distancia  $z - z'$  de este disco, por lo que el campo en  $P$  es:

$$\vec{E} = \frac{\rho dz'}{2\epsilon_0} \left[ \frac{(z - z')}{|z - z'|} - \frac{(z - z')}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} \right] \hat{z}$$

Para un punto  $P$  sobre el cilindro  $(z - z')/|z - z'| = 1$ . El cilindro es una superposición de discos entre  $-L$  y  $L$ , por lo que el campo total es:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \left[ 1 - \frac{(z - z')}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} \right] \hat{z}$$

Luego de evaluar la integral obtenemos para el campo eléctrico sobre el cilindro,

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ L + \sqrt{(z - L/2)^2 + a^2} - \sqrt{(z + L/2)^2 + a^2} \right] \hat{z}$$

El campo bajo el cilindro es igual en módulo, pero en la dirección opuesta.

b) Al igual que en el caso anterior,

$$\vec{E}(z) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{z - z'}{|z - z'|} - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + a^2}} \right) (\rho_0 + \beta z') dz' \quad (6)$$

Dejamos como ejercicio para el lector el cálculo de las integrales que aparecen en (6). Conviene distinguir 4 casos al hacer las integrales en cuestión: i)  $z > L/2$ , ii)  $L/2 > z > 0$ , iii)  $0 > z > -L/2$  y, iv)  $z < -L/2$ .

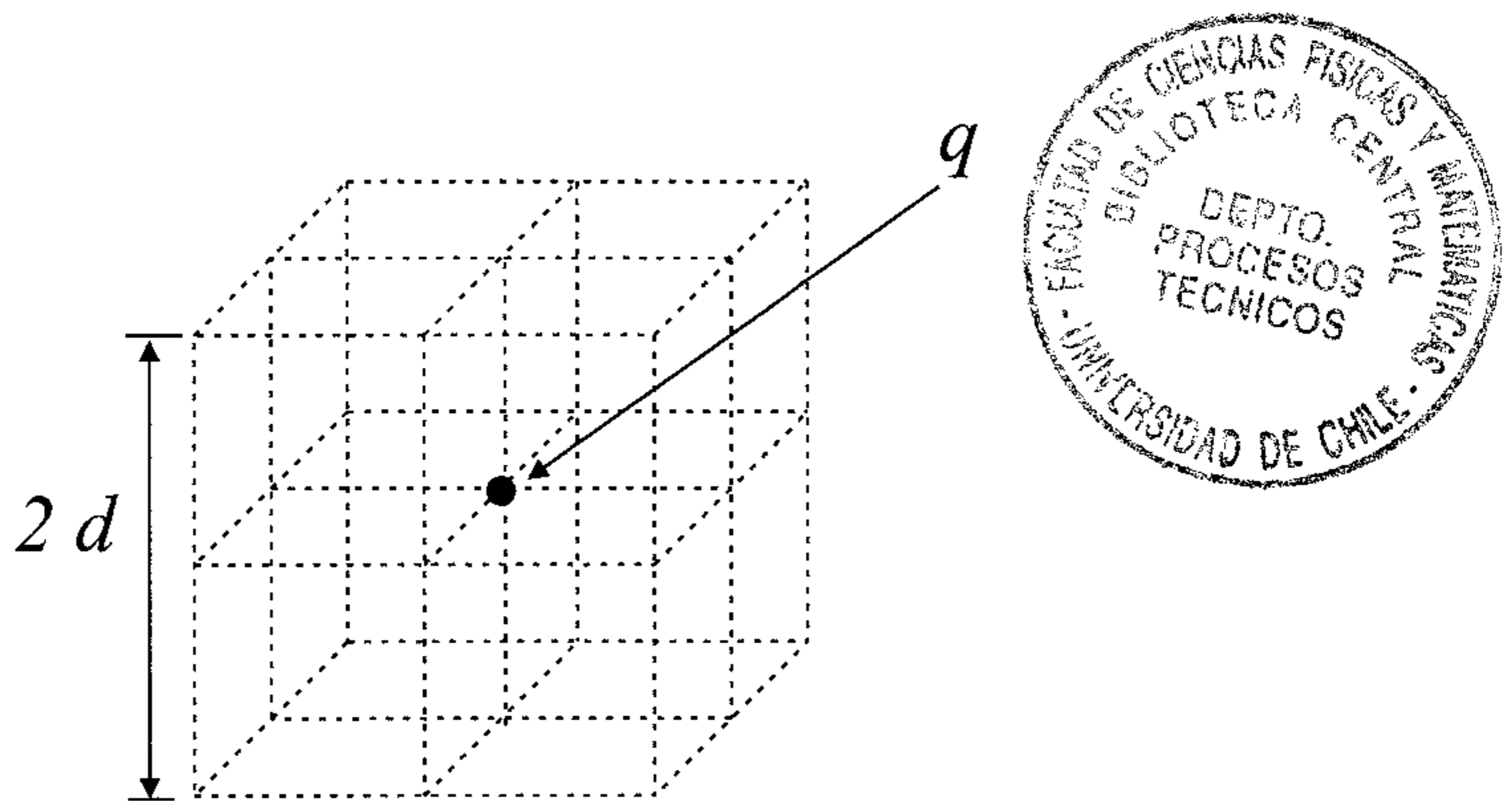
## 2. Ley de Gauss

1. a) Una carga puntual  $q$  está situada en el centro de un cubo de lado  $d$ . Calcule el valor del flujo a través de una cara del cubo. b) Poniendo la carga  $q$  en un vértice del cubo se pide calcular el valor del flujo a través de cada una de las caras del cubo.

### Solución:

a) Por el teorema de Gauss, el flujo que atraviesa toda la superficie del cubo (es decir las seis caras) es  $q/\epsilon_0$ . Como la carga  $q$  está ubicada justo al centro del cubo, por cada cara atraviesa sólo un sexto del flujo total, es decir,  $q/(6\epsilon_0)$ .

b) Si ahora la carga se ubica en un vértice del cubo, el flujo que atraviesa



las caras adyacentes al vértice donde se encuentra la carga es cero. En efecto, el campo eléctrico producido por la carga sobre una cara adyacente está contenido en la cara y por lo tanto es perpendicular a la normal a la cara. Así pues el flujo por las caras adyacentes es 0. Para calcular el flujo por las caras no adyacentes (opuestas) conviene adherir otros siete

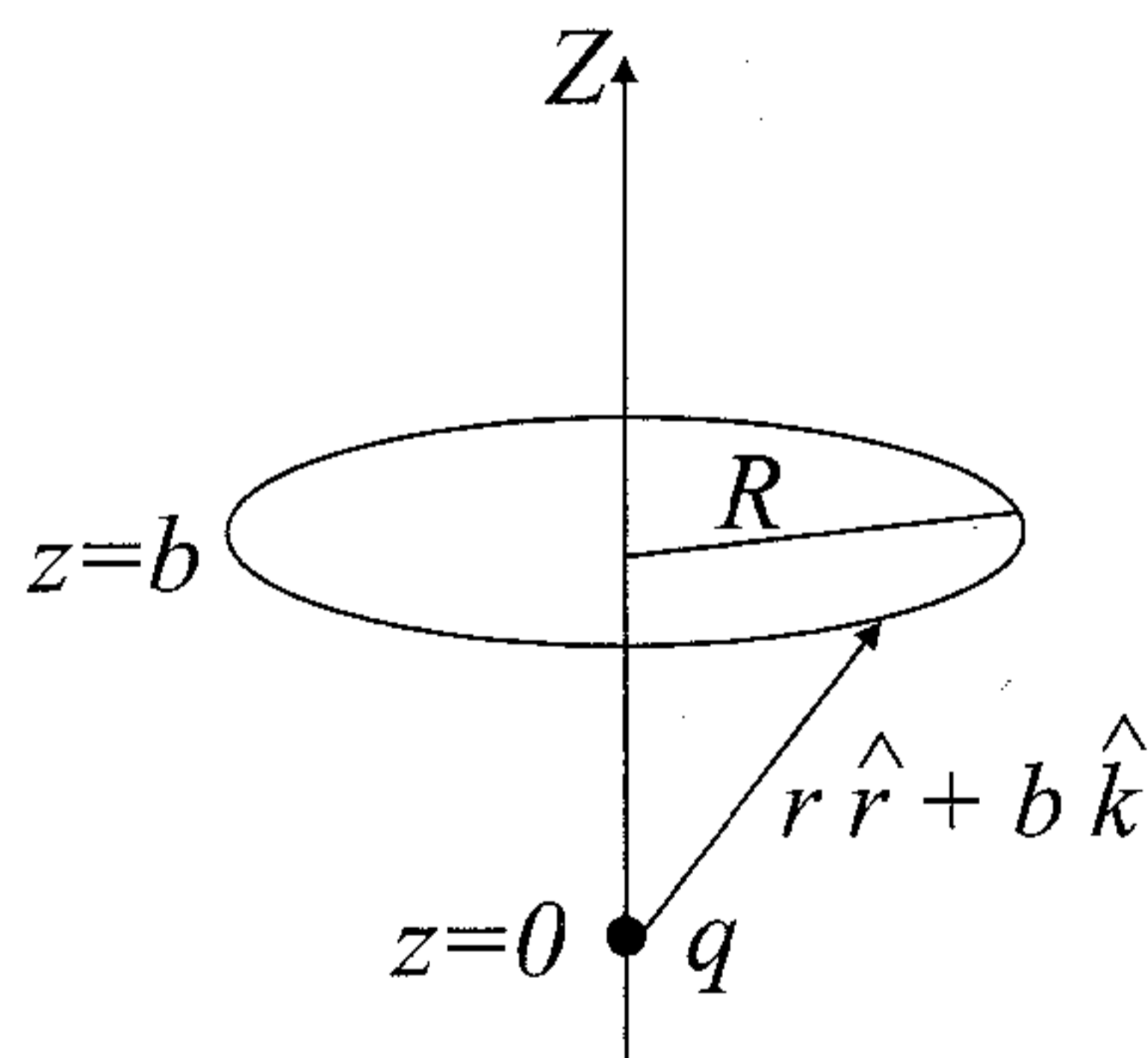
cubos al cubo en cuestión, de modo tal que se construye un nuevo cubo del doble de lado y con la carga (que originalmente estaba en un vértice del cubo chico) en el centro del cubo grande.

Por la parte a) el flujo por cualquier cara del cubo grande es  $q/(6\epsilon_0)$ . Vemos que cada cara no adyacente del cubo chico es un cuarto de la cara del cubo grande. Además por la manera como construimos el cubo grande, por cada cara no adyacente del cubo chico pasa justo un cuarto del flujo que pasa por una cara del cubo grande (ver figura). Entonces, el flujo que pasa por una cara cualquiera, no adyacente, del cubo original es  $q/(24\epsilon_0)$ .

2. a) Una carga puntual  $q$  está ubicada a una distancia  $b$  de un disco de radio  $R$  sobre el eje de simetría del disco. Calcule por integración directa el flujo debido al campo coulombiano de la carga  $q$  a través del disco.  
 b) Suponga que la carga  $q$  se ubica en el centro de un cilindro de largo  $L$  y radio  $R$  sobre el eje de simetría del cilindro. Calcule, usando a), el flujo a través del manto del cilindro. c) Si se retira la carga del cilindro, dejándola fuera del mismo y sobre el eje de simetría a una distancia  $h$  de la tapa más cercana, calcule el flujo a través del cilindro.

### Solución:

- a) Elijamos coordenadas cilíndricas, con la carga  $q$  en el origen y el eje  $z$  perpendicular al disco. Entonces el disco se encuentra en  $z = b$ .



Los distintos puntos sobre el disco están rotulados por las coordenadas  $z = b$ ,  $0 \leq r \leq R$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . El campo eléctrico, producido por la carga  $q$ , sobre el disco está dado (en coordenadas cilíndricas) por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(b^2 + r^2)^{3/2}} (b\hat{k} + r\hat{r}). \quad (1)$$

El elemento de superficie (en polares) del disco es:

$$d\vec{S} = r dr d\theta \hat{k} \quad (2)$$

en que hemos considerado como positiva la dirección  $+\hat{k}$ . De (1) y (2) podemos obtener de inmediato el flujo del campo eléctrico producido por la carga a través del disco,

$$\phi_d = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qb}{(b^2 + r^2)^{3/2}} r dr d\theta \quad (3)$$

Tanto la integral sobre  $\theta$  como la integral sobre  $r$  son simples de calcular. Así, de (3) obtenemos,

$$\phi_d = \frac{qb}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + R^2}} \right) \quad (4)$$

b) Llamemos  $\phi_m$  al flujo que atraviesa el manto. Puesto que la carga está ubicada justo al centro del cilindro, los flujos por ambas tapas son iguales, y están dados por  $\phi_d$  (calculado en a)). Como la carga total encerrada por el cilindro es  $q$ , por la ley de Gauss tenemos,

$$2\phi_d + \phi_m = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Entonces, de (4) y (5) obtenemos finalmente

$$\phi_m = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}.$$

c) Como la carga en esta oportunidad está fuera del cilindro en cuestión, por la ley de Gauss, el flujo neto a través del cilindro es nulo.

**3.** Una esfera sólida no conductora de radio  $R$  posee una densidad de carga en volumen proporcional a la distancia desde el centro, i.e.,  $\rho(r) = Ar$ , para  $r \leq R$ , y es nula fuera de la esfera, siendo  $A$  una constante. Encuentre el campo eléctrico producido por esta distribución en todo el espacio.

**Solución:**

Dada la simetría de la configuración de cargas, elegiremos coordenadas esféricas con el origen en el centro de la esfera. A priori podemos afirmar

que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio es de la forma  $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ . Entonces, el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio  $r$  cualquiera es, simplemente:

$$\phi(r) = 4\pi E(r) r^2 \quad (1)$$

es decir, el producto de la superficie de la esfera  $4\pi r^2$  por el módulo del campo sobre la superficie de la esfera  $E(r)$  (nótese que el campo es perpendicular a la superficie de la esfera). Por la ley de Gauss, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cualquiera es igual a la carga total encerrada dividido por  $\epsilon_0$ .

En el interior de la esfera de radio  $R$ , i.e., para  $r < R$ , la carga total encerrada por una esfera de radio  $r$  es:

$$Q(r) = \int \rho dv = 4\pi \int_0^r (A r') r'^2 dr' = \pi A r^4 \quad (2)$$

Por la ley de Gauss,  $\phi(r) = Q(r)/\epsilon_0$ , de modo que de (1) y (2) obtenemos

$$\vec{E} = \frac{A r^2}{4\epsilon_0} \hat{r} \quad \text{para } r \leq R \quad (3)$$

En el exterior de la esfera de radio  $R$ , la carga total encerrada es  $Q(R) = \pi A/R^4$ . Así es que usando nuevamente la ley de Gauss obtenemos finalmente,

$$\vec{E} = \frac{A R^2}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r \geq R \quad (4)$$

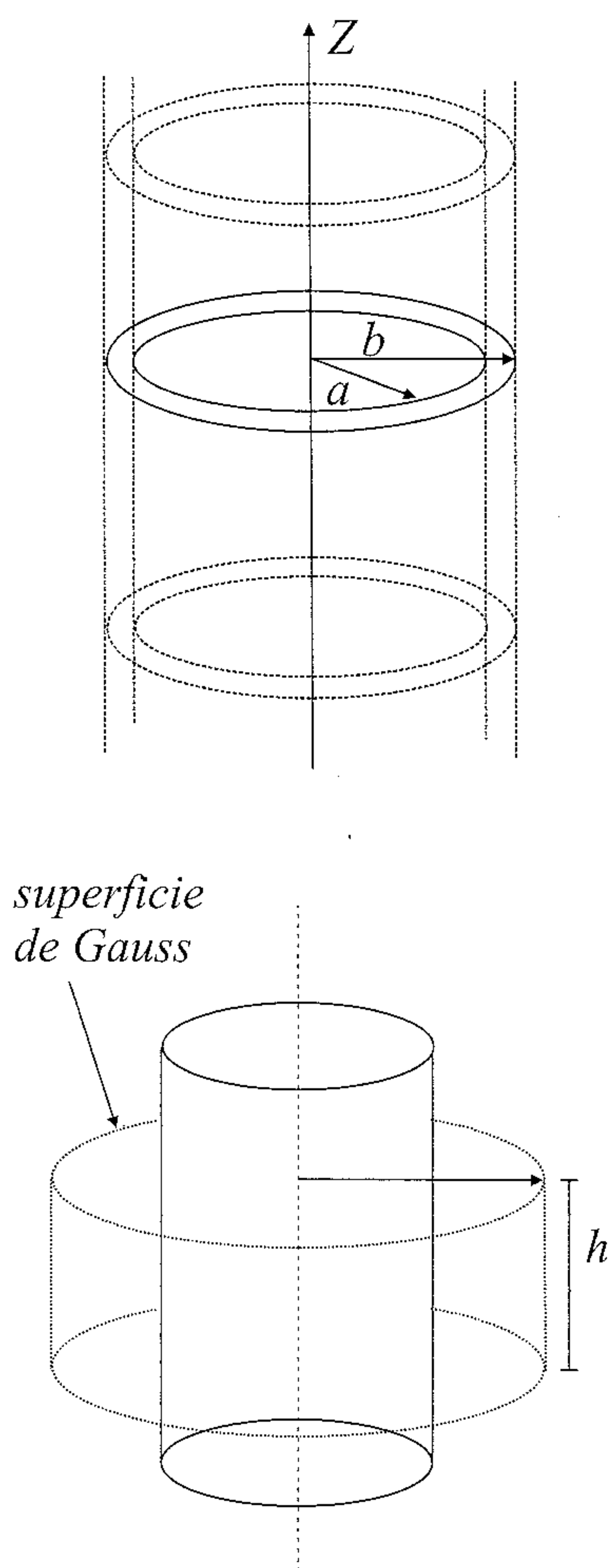
4. Una corteza cilíndrica no conductora, gruesa e infinitamente larga, de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , posee una densidad de carga en volumen uniforme  $\rho$ . Determine el campo eléctrico en todo el espacio.

### Solución:

Por la simetría de la distribución de cargas conviene usar coordenadas cilíndricas, con el eje  $z$  elegido de modo que coincida con el eje de simetría de la cáscara cilíndrica. Utilizando la simetría de la distribución, se puede determinar *a priori* la forma del campo eléctrico, que está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r} \quad (1)$$





en que  $r$  es la coordenada radial en cilíndricas. Si tomamos como superficie de Gauss un tambor cilíndrico de altura  $h$  y radio  $r$  concéntrico con la cáscara original (ver figura), el flujo por las tapas del tambor es cero (pues el campo eléctrico es perpendicular a la normal,  $\hat{k}$ , a las tapas), en tanto que el flujo por el manto está dado por:

$$\int_{\text{manto}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 2\pi r E(r) h. \quad (2)$$

Para obtener el lado derecho de (2) hemos usado que el elemento de superficie sobre el manto está dado en cilíndricas por  $d\vec{S} = r d\theta dz \hat{r}$ . También hemos usado la forma del campo dada por (1), y hemos integrado en  $z$  entre 0 y  $h$  y en  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$ . Por otra parte, usando el

teorema de Gauss, el lado izquierdo de (2) debe ser igual a la carga total encerrada por la superficie de Gauss dividida por  $\epsilon_0$ . En este punto conviene distinguir tres casos:

i)  $r < a$ . En este caso la superficie de Gauss no encierra carga alguna y por lo tanto el lado izquierdo de (2) es cero. Entonces,

$$E(r) = 0 \quad \text{si } 0 < r < a$$

ii)  $a < r < b$ . En este caso la carga encerrada por la superficie de Gauss está dada por:

$$Q(r) = \int_{\text{vol}} \rho \, dv \quad (3)$$

La integración en (3) debe hacerse sobre el volumen comprendido entre los cilindros de radios  $a$  y  $r$  y los planos  $z = 0$  y  $z = h$ . En cilíndricas el elemento de volumen está dado por  $dv = r \, dr \, d\theta \, dz$ . Entonces,

$$Q(r) = \int_0^h \int_a^r \int_0^{2\pi} \rho \, r \, dz \, dr \, d\theta = \pi \rho h (r^2 - a^2) \quad (4)$$

De (2) y (4) obtenemos entonces que:

$$E(r) = \frac{\rho}{r\epsilon_0} (r^2 - a^2) \quad \text{si } a < r < b$$

iii)  $r > b$ . En este caso la carga encerrada por la superficie de Gauss es  $Q(b)$ , es decir  $\pi \rho h (b^2 - a^2)$  (ver ecuación [4]) de modo que de (2) y (4) obtenemos,

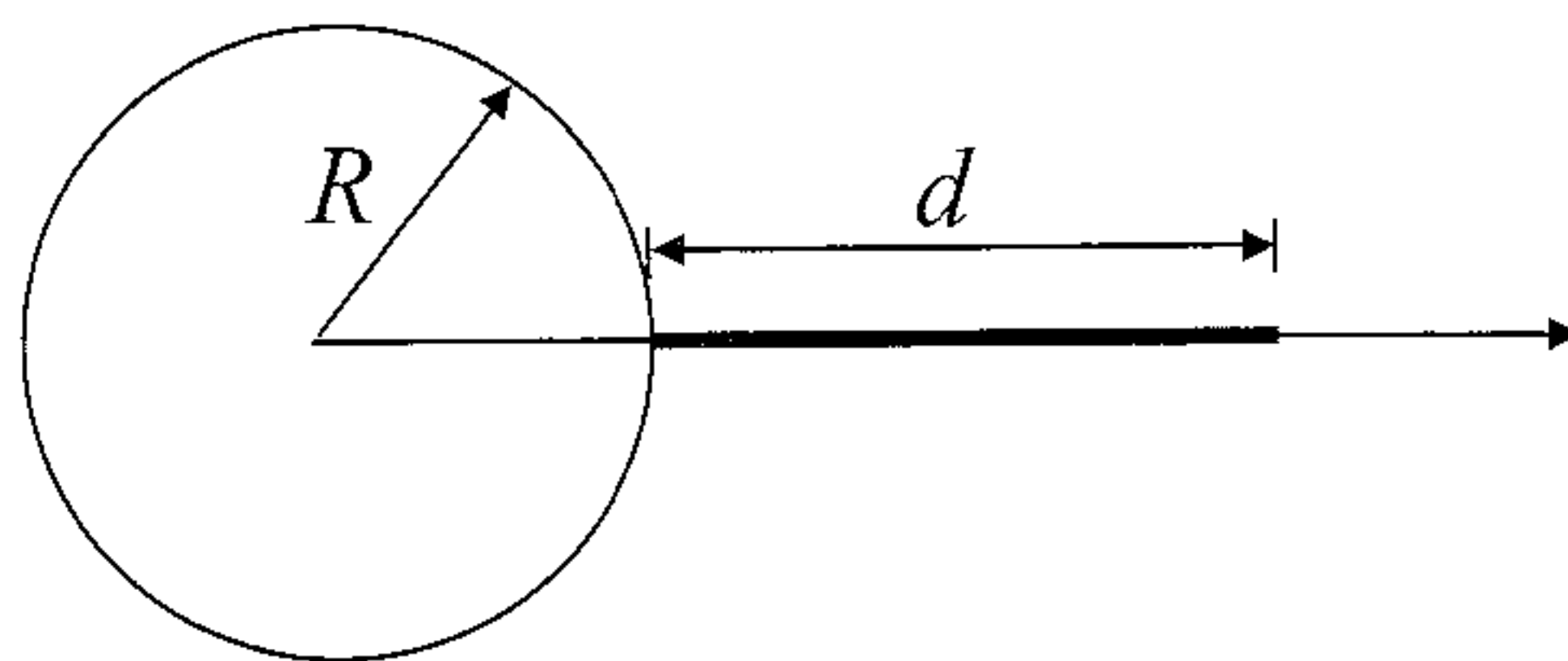
$$E(r) = \frac{\rho}{r\epsilon_0} (b^2 - a^2) \quad \text{si } r > b$$

**5.** Una esfera uniformemente cargada de radio  $R$  está centrada en el origen con una carga  $Q$ . Determine la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada, orientada radialmente y con una carga total  $q$  con sus extremos en  $r = R$  y  $r = R + d$ .

**Solución:**

Por el teorema de Gauss, el campo eléctrico producido por la esfera en un punto  $\vec{r}$  exterior a ella está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$



Aquí hemos elegido el origen de coordenadas en el centro de la esfera y hemos denotado por  $r = |\vec{r}|$  a la distancia al centro de la esfera. La fuerza que este campo ejerce sobre un elemento de la línea de carga es:

$$d\vec{F} = \vec{E}(\vec{r}) (\lambda dr) \quad (2)$$

en que  $\lambda = q/d$  es la densidad de carga (uniforme) de la línea. Entonces, de (1) y (2), la fuerza total que ejerce el campo eléctrico de la esfera sobre la línea es:

$$\vec{F} = \int_R^{R+d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda Q}{r^2} dr \hat{r} \quad (3)$$

Calculando la integral en el lado derecho de (3) finalmente obtenemos,

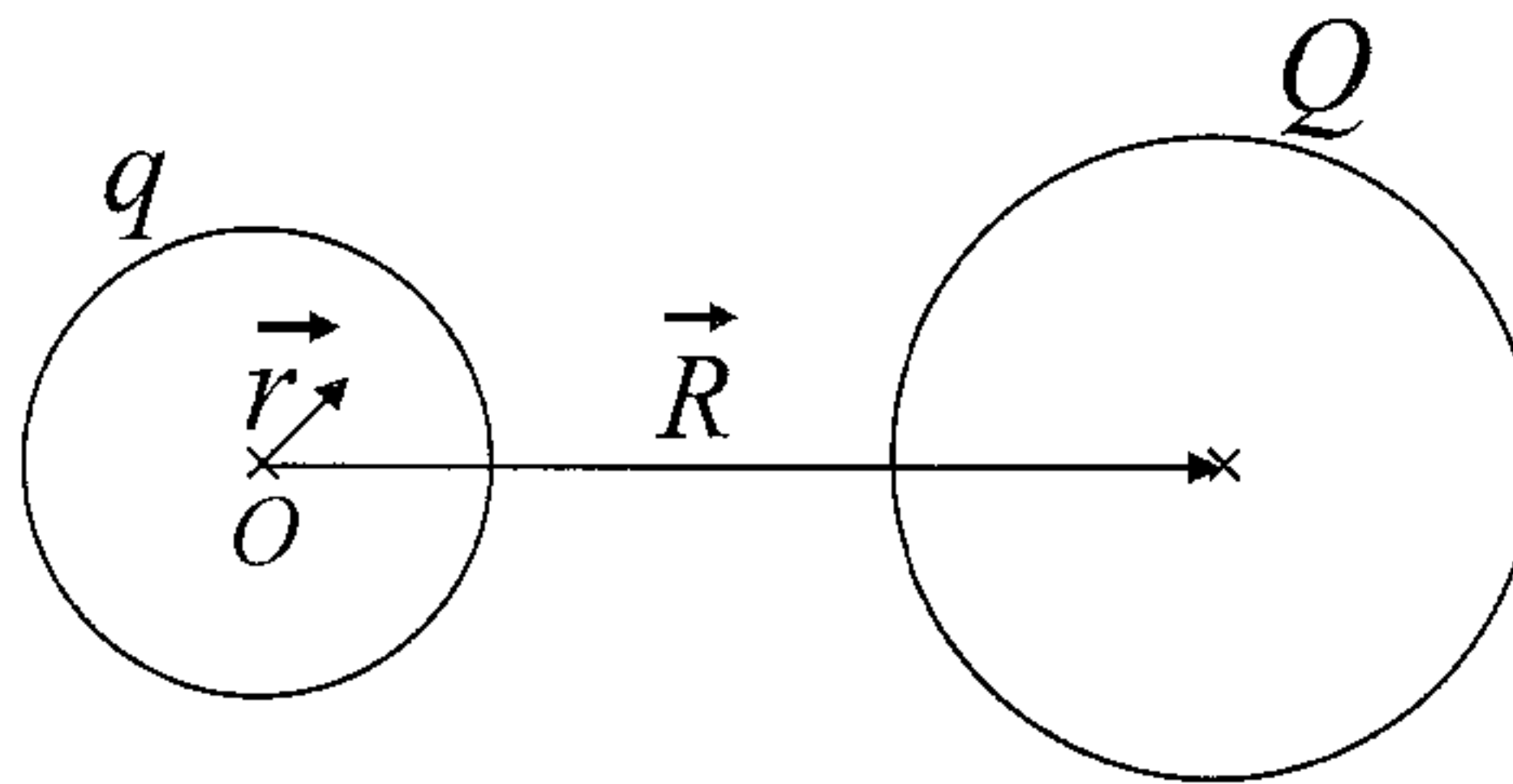
$$\vec{F} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R(R+d)} \hat{r}$$

en que hemos usado  $q = \lambda d$ .

**6.** Considere dos distribuciones de carga uniforme sobre sendas esferas que no se intersectan. Suponga que las cargas totales sobre cada una de las esferas son  $q$  y  $Q$  respectivamente y que las esferas están separadas por una distancia  $d$ . Calcule la fuerza entre ambas distribuciones.

Nota: Este resultado fue demostrado por Isaac Newton en el Principia, en el contexto de la atracción gravitacional (la ley de Gravitación Universal entre dos partículas puntuales también depende del inverso del cuadrado de la distancia, y por lo tanto la ley de Gauss también se aplica al caso gravitacional). Cabe notar que la ley de Gauss es más de siglo y medio posterior a la publicación del Principia, lo que hace más notable el descubrimiento de Newton. El resultado de este problema sigue siendo válido si las densidades de carga no son constantes pero tienen simetría radial con respecto a los respectivos centros de las esferas. Dejamos como ejercicio al lector la demostración de esta versión más general. El lector

interesado puede consultar la Proposition LXXV, Theorem XXXV, pag. 197, Book 1, *The Motion of Bodies*, Sir Isaac Newton's, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*, traducido al inglés en 1729 por Andrew Motte. Traducción revisada por Florian Cajori, University of California Press, Berkeley, California, 1934.



### Solución:

Como las esferas son disjuntas, para calcular la fuerza entre ellas basta conocer el campo eléctrico producido por una de ellas fuera de la esfera. Elijamos coordenadas de modo que el centro de la esfera de carga  $q$  está en el origen, en tanto que el centro de la esfera de carga  $Q$  se encuentra en el punto  $\vec{R}$  (de modo que  $d$  la distancia entre los centros es  $|\vec{R}|$ ). Por la ley de Gauss, el campo eléctrico producido por la esfera de carga  $Q$  en un punto cualquiera del espacio, exterior a ella, está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (1)$$

Llamemos  $\rho$  a la densidad de carga de la esfera puesta en el origen. Entonces la fuerza que la esfera de carga  $Q$  ejerce sobre la que se encuentra en el origen es:

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E}(\vec{r}) dv \quad (2)$$

En (2),  $dv$  representa el elemento de volumen de la esfera de carga  $q$ , y  $\vec{r}$  recorre todos los puntos interiores a ella. El campo eléctrico deriva de la función potencial, así es que podemos escribir (1) como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla_R \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} \quad (3)$$

(Nótese que en (3) estamos tomando gradiente con respecto a  $\vec{R}$  y no a  $\vec{r}$  como es habitual, y de ahí el cambio de signo). Reemplazando (3) en (2), y sacando la derivada con respecto a  $\vec{R}$  fuera de la integral (recuerde que la integral en (2) es sobre la variable  $\vec{r}$ ) obtenemos de inmediato,

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla_R \int \rho \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} dv \quad (4)$$

Nuevamente al usar el teorema de Gauss vemos que:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} dv = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{R}|} \quad (5)$$

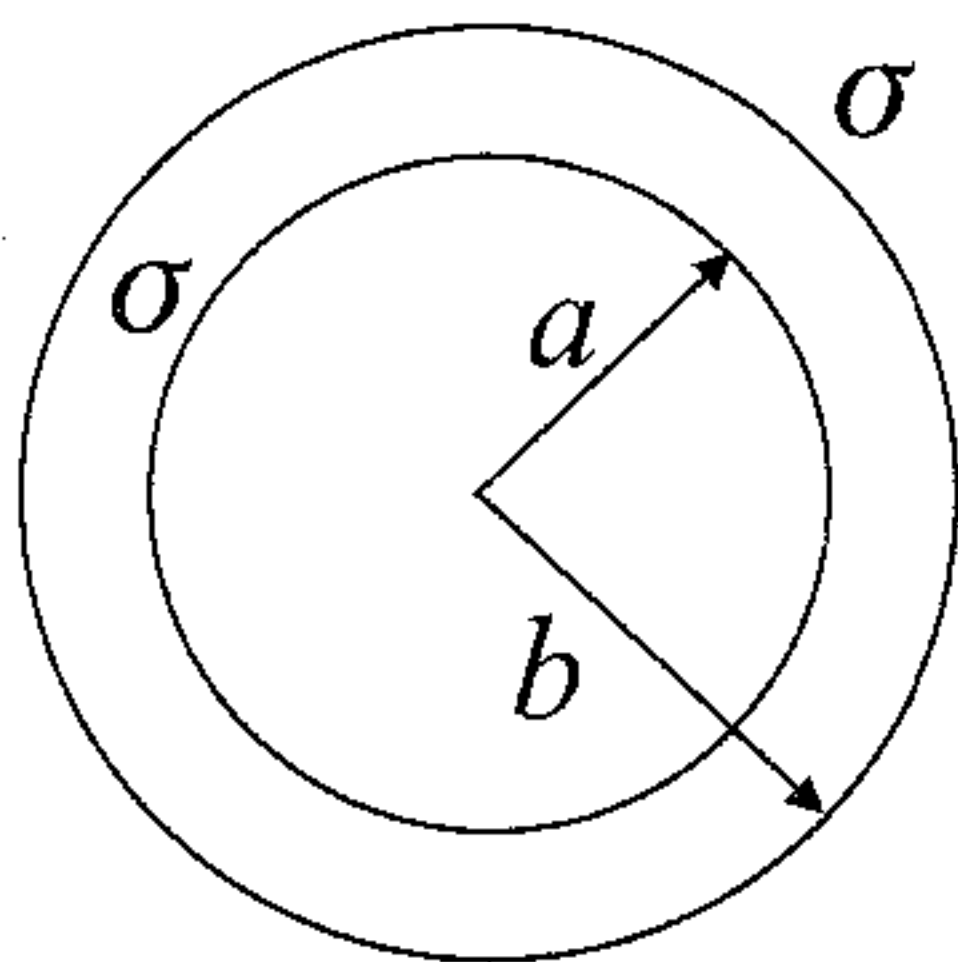
pues el lado izquierdo de (5) representa el potencial electrostático producido por la esfera centrada en el origen (aquella de carga  $q$ ) en el punto  $R$  y el punto  $R$  está fuera de la distribución (fuera de la esfera de carga  $q$ ).

Finalmente reemplazando (5) en (4) obtenemos,

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla_R \frac{q}{|\vec{R}|} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}. \quad (6)$$

Nótese que la fuerza que ejerce la esfera de carga  $Q$  sobre aquella de carga  $q$  (i.e., la ecuación [6]) coincide con la fuerza que ejerce una carga puntual  $Q$  puesta en  $\vec{R}$  sobre una carga  $q$  puesta en el origen.

7. Las superficies interior ( $r = a$ ) y exterior ( $r = b$ ) de un cascarón esférico no conductor tienen la misma densidad de carga  $\sigma$  constante. La densidad de carga en el resto del espacio es nula. Encuentre el campo eléctrico en las zonas  $r < a$ ,  $a < r < b$ , y  $r > b$ .



**Solución:**

Dada la simetría de la configuración de cargas, elegiremos coordenadas esféricas con el origen en el centro común de los dos cascarones. Podemos afirmar *a priori* que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio es de la forma  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ . Entonces, el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio  $r$  cualquiera es:

$$\phi(r) = 4\pi E(r) r^2 \quad (1)$$

es decir, el producto de la superficie de la esfera  $4\pi r^2$  por el módulo del campo sobre la superficie de la esfera  $E(r)$  (nótese que el campo es perpendicular a la superficie de la esfera). Por la ley de Gauss, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cualquiera es igual a la carga total encerrada dividida por  $\epsilon_0$ .

a) Para determinar el campo en la región  $r < a$ , tomamos como superficie de Gauss una esfera de radio  $r < a$ . Como la carga total encerrada por esta esfera es nula, la ley de Gauss y (1) implica que:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para } 0 \leq r < a \quad (2)$$

b) Para determinar el campo en la región  $a < r < b$ , tomamos como superficie de Gauss una esfera de radio  $r$ , en ese rango. En este caso la carga total encerrada es  $4\pi a^2 \sigma$ . Usando la ley de Gauss y (1) obtenemos,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{r} \quad \text{para } a \leq r < b \quad (3)$$

c) Finalmente, para determinar el campo en la región  $r > b$ , tomamos como superficie de Gauss una esfera de radio  $r$ , en ese rango. En este caso la carga total encerrada es  $4\pi(a^2 + b^2)\sigma$ . Entonces, aplicando la ley de Gauss y (1) obtenemos,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2 + b^2}{r^2}\right) \hat{r} \quad \text{para } r > b \quad (4)$$

8. En un día con buen tiempo, el campo eléctrico sobre la superficie de la tierra queda descrito adecuadamente por la expresión empírica  $\vec{E} = -(a e^{-\alpha z} + b e^{-\beta z})\hat{k}$ , donde  $a, b, \alpha > 0$ , y  $\beta > 0$  son constantes, y  $z$  denota la altura sobre la superficie de la Tierra. a) Utilice la forma diferencial

de la ley de Gauss para determinar la densidad de carga en función de la altura. b) Calcule la carga total contenida en una columna vertical de sección transversal  $A$  que va desde  $z = 0$  hasta  $z = \infty$ .

**Solución:**

a) El campo eléctrico es de la forma  $\vec{E} = E(z)\hat{k}$ . Por la forma diferencial de la ley de Gauss, la densidad de carga  $\rho$  en un punto cualquiera del espacio está dada por:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \quad (1)$$

Como en este caso el campo eléctrico sólo tiene componente no nula a lo largo del eje  $z$ , su divergencia está dada por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{dE}{dz} = a\alpha e^{-\alpha z} + b\beta e^{-\beta z} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos finalmente,

$$\rho(z) = \epsilon_0 (a\alpha e^{-\alpha z} + b\beta e^{-\beta z}) \quad (3)$$

b) La carga total  $Q$  contenida en una columna de sección  $A$  sobre la superficie de la Tierra es:

$$Q = \int \rho dv = A \int_0^{\infty} \rho(z) \quad (4)$$

Reemplazando la expresión de  $\rho(z)$  encontrada en a) en (4) e integrando obtenemos,

$$Q = \epsilon_0(a + b)A$$

9. En el interior de una distribución de carga uniforme y esféricamente simétrica de radio  $a$  se forma una burbuja vacía de radio  $\delta < a$ . Utilice el principio de superposición para demostrar que el campo eléctrico es uniforme en el interior de la cavidad.

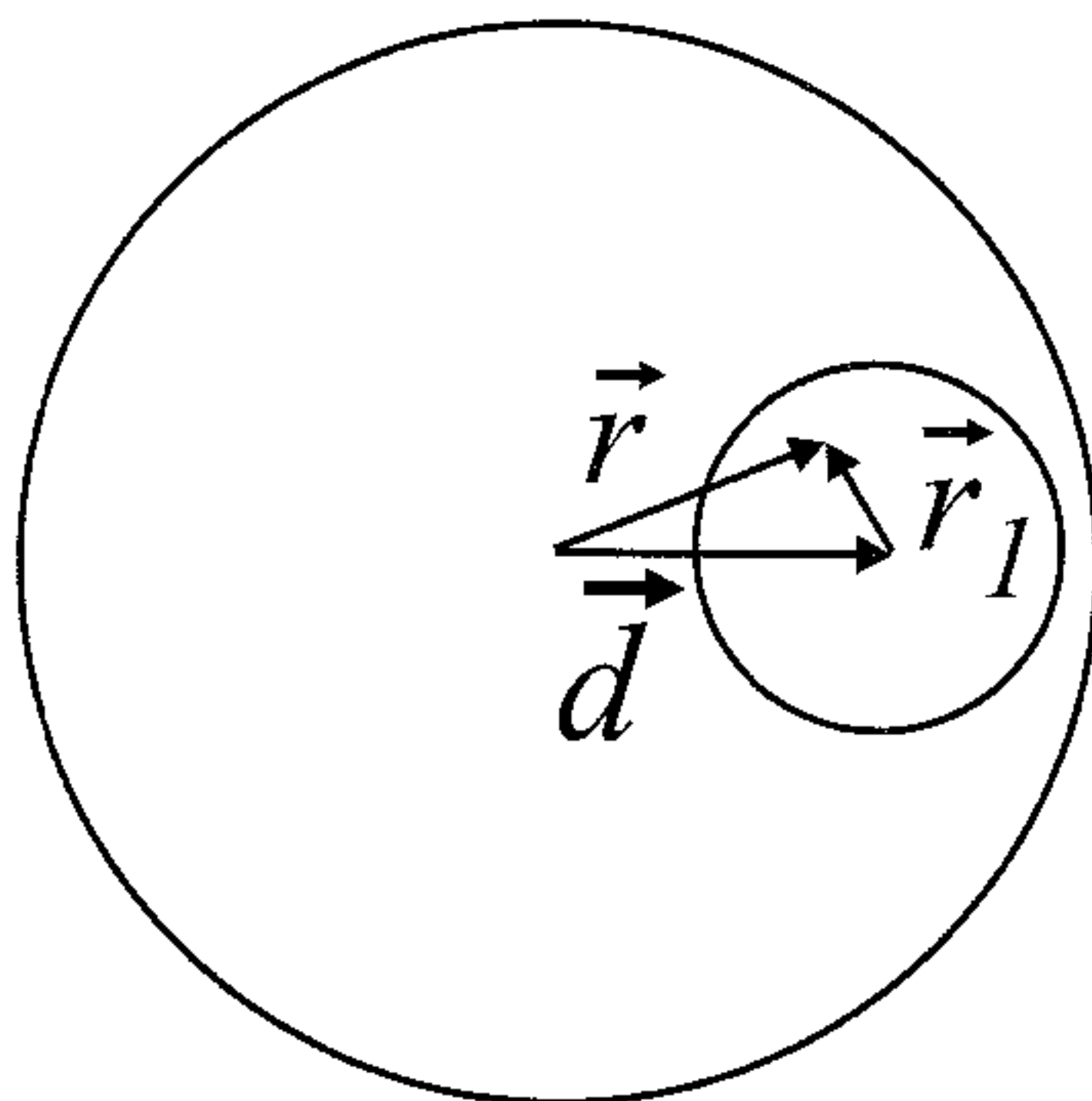
**Solución:**

Este problema es muy simple si se utiliza el principio de superposición. Podemos considerar la distribución de cargas dada (i.e., esfera con cavidad) como la superposición de una distribución uniforme  $\rho$  sobre una esfera maciza de radio  $a$  y de otra esfera maciza de densidad uniforme  $-\rho$  y radio  $\delta$ , con su centro desplazado con respecto a la primera esfera

en una distancia  $d$ . Entonces podemos calcular en forma separada los campos producidos por cada una de las esferas y luego sumar los resultados obtenidos, vectorialmente (se debe tener especial cuidado con el hecho que los centros de las esferas están desplazados). Como sólo tenemos que calcular el campo eléctrico en la cavidad, basta calcular el campo eléctrico de cada una de las esferas en su interior (pues la cavidad está en el interior de las dos esferas). Usando la ley de Gauss, es simple deducir que el campo eléctrico producido por una distribución uniforme de carga  $\rho$ , con simetría esférica, en el interior de la esfera está dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad (1)$$

en que  $\vec{r}$  está referido al centro de la esfera.



Usando (1), y refiriendo todos los campos al mismo origen, tenemos que el campo de la esfera de radio  $a$  y densidad  $\rho$ , en el interior de la esfera, es:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad (2)$$

en tanto que el campo producido por la esfera de densidad  $-\rho$  en su interior (teniendo en cuenta el desplazamiento de los centros) es:

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{d}) \quad (3)$$

en que  $\vec{d}$  es el vector que va desde el centro de la esfera al centro de la cavidad. De (2) y (3), usando el principio de superposición, finalmente obtenemos,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}.$$



### 3. Potencial y Energía

1. Calcule la diferencia de potencial entre dos cáscaras esféricas concéntricas de radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ) que tienen cargas  $q$  y  $Q$  respectivamente.

**Solución:**

Elijamos el origen en el centro de las dos esferas concéntricas. Usando el teorema de Gauss podemos concluir de inmediato que el campo eléctrico entre las dos cáscaras esféricas está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

en que  $r = |\vec{r}|$ . Para calcular la diferencia de potencial entre las dos cáscaras esféricas, usamos la interpretación física de la diferencia de potencial como trabajo por unidad de carga para mover una carga entre dos puntos, i.e.,

$$V(a) - V(b) = - \int_b^a \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

Como el campo es conservativo la integral de la derecha en (2) no depende del camino. Por la forma del campo (i.e., por la simetría del problema) conviene elegir el camino de integración a lo largo de un rayo. En este caso,  $d\vec{r} = dr \hat{r}$ , de modo que  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $d\vec{r}$  son colineales. Así,

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \quad (3)$$

Reemplazando (3) en el lado derecho de (2) e integrando, finalmente obtenemos,

$$\Delta V = V(a) - V(b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Observamos que la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  no depende de  $Q$  puesto que  $Q$  no produce campo eléctrico en la región  $r < b$ .

2. Las superficies interior ( $r = a$ ) y exterior ( $r = b$ ) de un cascarón esférico no conductor tienen la misma densidad de carga,  $\sigma$ . La densidad de carga en el resto del espacio es nula. Encuentre el potencial en las zonas  $r < a$ ,  $a < r < b$ , y  $r > b$ .

**Solución:**

Recordamos, del problema 7 del capítulo anterior, que el campo eléctrico está dado por:

$$E_I(r) = 0 \quad \text{si } r < a$$

$$E_{II}(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{si } a < r < b$$

y

$$E_{III}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (a^2 + b^2) \quad \text{si } r > b$$

Reemplazando en la definición

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

el valor del campo eléctrico en las distintas regiones, determinado más arriba, encontramos de inmediato

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_{III} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (a^2 + b^2) \frac{1}{r}, \quad \text{si } r > b$$

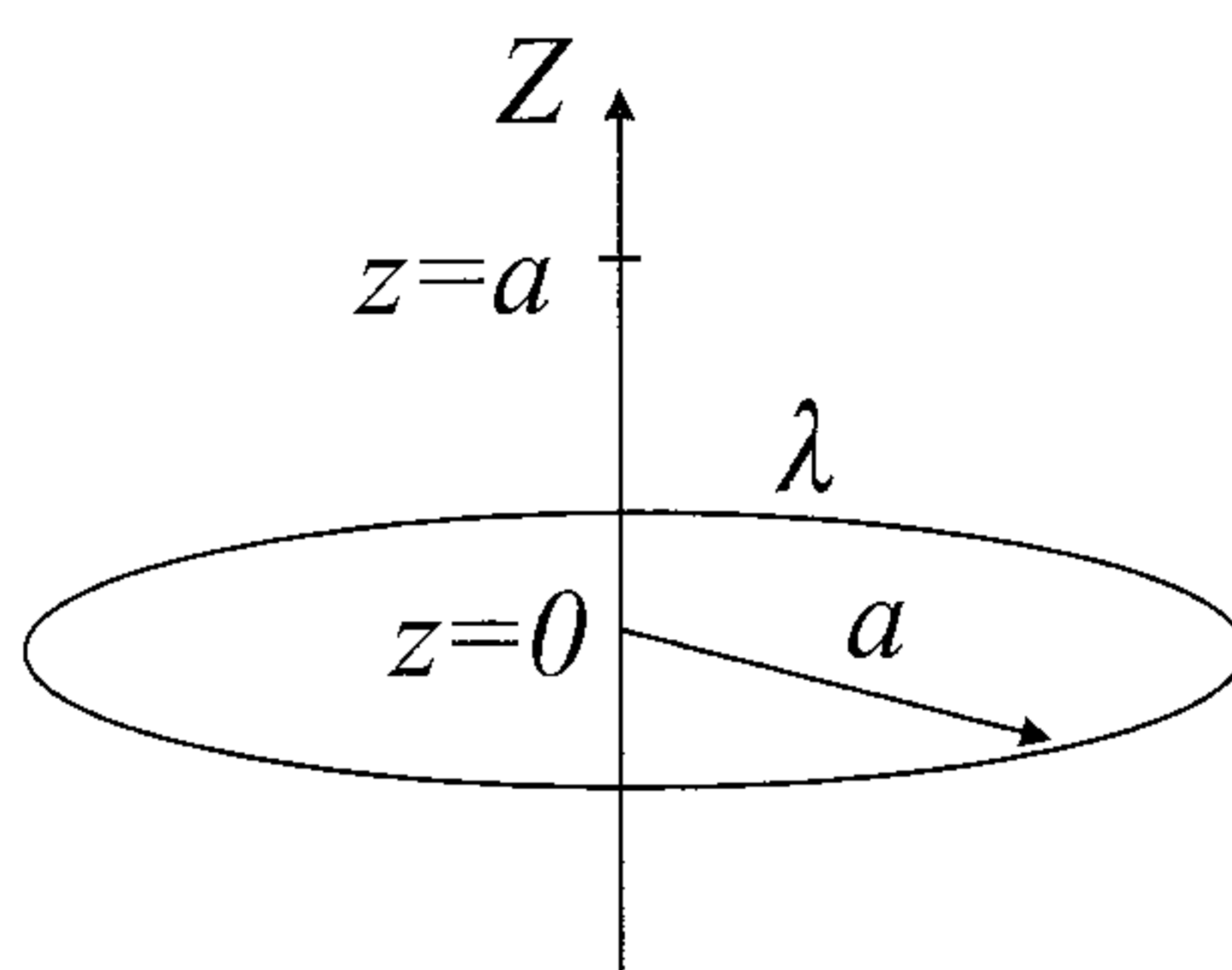
$$V(r) = - \int_{\infty}^b \vec{E}_{III} \cdot d\vec{r} - \int_b^r \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{r} + b \right), \quad \text{si } a < r < b$$

y finalmente, como el campo se anula para  $r < a$ , su valor es constante e igual al potencial en el borde  $V(a)$ ,

$$V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (a + b), \quad \text{si } r < a$$

3. Considere un aro de radio  $a$  cargado con densidad de carga  $\lambda$ .

- i) ¿Cuál es el trabajo que debe hacerse para traer una carga  $q$  desde infinito hasta un punto sobre el eje del aro, a distancia  $a$  del centro de éste?
- ii) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe darse a una partícula de carga  $q$  para que viajando desde  $+\infty$ , a lo largo del eje, logre traspasar el aro?
- iii) ¿En qué puntos del eje la fuerza ejercida por el aro sobre la carga  $q$  es máxima? y ¿en qué puntos es mínima?



### Solución:

i) Elijamos coordenadas de modo que el eje  $z$  coincida con el eje de simetría del aro. El trabajo para traer una carga  $q$  desde el infinito hasta un punto  $z$  sobre el eje es  $qV(z)$ , en que  $V(z)$  es el potencial eléctrico producido por el aro en  $z$ . El potencial producido por el aro en  $z$  está dado por:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{R}|}$$

Para el aro,  $dl = a d\theta$ ,  $\vec{r} = z\hat{z}$  y  $\vec{R} = a\hat{\rho}$ , por lo que la integral se hace en forma inmediata. Se encuentra que el potencial está dado por:

$$V(z) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{1/2}} \quad (1)$$

En particular  $V(0) = \lambda/(2\epsilon_0)$ . Nótese que el potencial es positivo; alcanza su máximo en  $z = 0$ , es simétrico en torno a  $z = 0$ , y es decreciente para  $z > 0$ . El trabajo para traer una carga  $q$  desde infinito hasta  $z = a$  es  $qV(a)$ .

ii) Como el campo eléctrico es conservativo, la energía de la partícula se conserva, i.e.,

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV(z) = E \quad (2)$$

en que  $E$ , la energía, es una constante de movimiento. Por conservación de energía, si queremos que la partícula, lanzada desde  $+\infty$  con velocidad  $v_{min}$  alcance a llegar justo hasta el centro del aro (donde  $V$  es máximo), es necesario que la energía cinética en  $+\infty$  (i.e., lejos del aro) sea igual a la energía potencial en  $z = 0$  (i.e.,  $qV(0)$ ). Así,

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 = qV(0) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \quad (3)$$

de donde obtenemos

$$v_{min} = \sqrt{\frac{q\lambda}{m\epsilon_0}}$$

iii) El campo eléctrico producido por el aro sobre el eje  $z$ , está dado por:

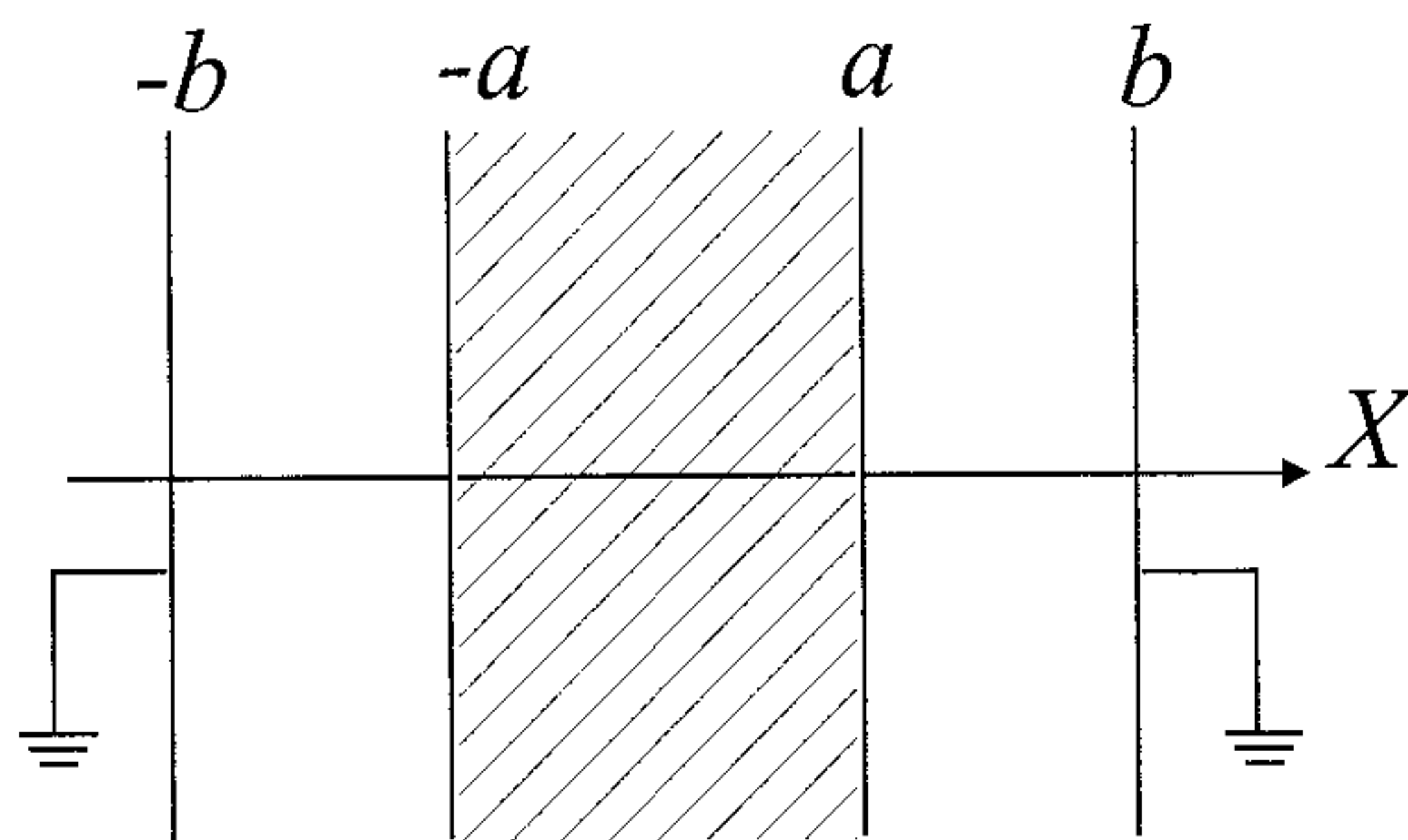
$$\vec{E}(z) = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\hat{k} = \frac{\lambda a z}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}\hat{k} \quad (4)$$

de modo que la fuerza ejercida por el aro sobre la partícula de carga  $q$  cuando ésta se encuentra en  $z$  es

$$\vec{F} = q\vec{E}(z) = \frac{\lambda a q z}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}\hat{k} \equiv F(z)\hat{k} \quad (5)$$

El máximo de la función  $F(z)$  ocurre para  $z = a/\sqrt{2}$  y vale  $q\lambda/(3\sqrt{3}\epsilon_0 a)$ . La función  $F(z)$  es antisimétrica con respecto a  $z = 0$ . Obviamente el módulo de la fuerza es mínimo en  $z = 0$ , en esta posición la fuerza es cero.

4. Encontrar el potencial y el campo eléctrico en la región  $-b \leq x \leq b$  de la configuración que se muestra en la figura.

**Solución:**

De la figura observamos que existen 3 regiones que debemos distinguir: la región  $-b \leq x \leq -a$  que llamamos región I, la región  $-a \leq x \leq a$  o región II y la región III dada por  $a \leq x \leq b$ .

Este problema se puede resolver usando la ecuación de Poisson (esto es en forma diferencial) o usando el teorema de Gauss (que no es sino una versión integral de la anterior).

Primero resolvámoslo usando la ecuación de Poisson. Por simetría en todas las regiones el potencial  $V = V(x)$ .

Las ecuaciones que el potencial satisface en cada región son:

$$\nabla^2 V_I = 0, \quad \nabla^2 V_{II} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \nabla^2 V_{III} = 0$$

Dado que  $V$  es solamente función de  $x$ ,  $\nabla^2 \equiv d^2/dx^2$ . La solución de estas ecuaciones es, entonces:

$$V_I = Ax + B \quad V_{II} = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + Cx + D \quad V_{III} = Gx + F$$

en que  $A, B, C, D, G$  y  $F$  son constantes que se determinan usando las condiciones de borde. Estas condiciones son la continuidad del potencial y del campo eléctrico  $\vec{E} = -(dV/dx)\hat{x}$ . Las 6 condiciones de borde son entonces  $V_I(-b) = 0$ ,  $V_I(-a) = V_{II}(-a)$ ,  $dV_I/dx(-a) = dV_{II}/dx(-a)$ ,  $V_{II}(a) = V_{III}(a)$ ,  $dV_{II}/dx(a) = dV_{III}/dx(a)$  y  $V_{III}(b) = 0$ . Al aplicar estas condiciones se determinan las constantes y se obtienen las siguientes expresiones para el potencial en cada región:

$$V_I = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(x + b)$$

$$V_{II} = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a}{2\epsilon_0}(2b - a)$$

y

$$V_{III} = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}(x - b)$$

El campo eléctrico en cada región es:

$$\vec{E}_I = -\frac{dV_I}{dx}\hat{x} = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{x}$$

$$\vec{E}_{II} = -\frac{dV_{II}}{dx}\hat{x} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\hat{x}$$

$$\vec{E}_{III} = -\frac{dV_{III}}{dx}\hat{x} = \frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{x}$$

A continuación resolvemos este problema usando el teorema de Gauss. Por simetría, el campo es de la forma  $\vec{E} = E(x)\hat{x}$  y  $E(-x) = -E(x)$ . Para aplicar el teorema de Gauss elegimos como superficie cerrada un cilindro centrado en el origen. De esta forma solamente las tapas del cilindro contribuyen a la integral de superficie ya que sobre el manto el campo eléctrico es perpendicular a la normal.

En la región II obtenemos,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E(x)\Delta S = \frac{\rho}{\epsilon_0}2x\Delta S$$

y entonces  $\vec{E}_{II}(x) = (\rho x/\epsilon_0)\hat{x}$ .

Cerrando el cilindro mediante tapas puestas en forma simétrica en las regiones I y III, obtenemos

$$2E(x)\Delta S = \frac{\rho}{\epsilon_0}2a\Delta S$$

y entonces  $\vec{E}_I(x) = -(\rho a/\epsilon_0)\hat{x}$  y  $\vec{E}_{III}(x) = (\rho a/\epsilon_0)\hat{x}$ .

Ahora podemos calcular el potencial,

$$V_I(x) = V_I(-b) - \int_{-b}^x \vec{E}_I \cdot d\vec{x} = \frac{\rho a(b+x)}{\epsilon_0}$$

en que hemos usado  $V_I(-b) = 0$ . En la región II tenemos que, usando la continuidad del potencial,

$$V_{II}(x) = V_I(-a) - \int_{-a}^x \vec{E}_{II} \cdot d\vec{x} = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a}{2\epsilon_0}(2b - a)$$

y, finalmente,

$$V_{III}(x) = V_{II}(a) - \int_a^x \vec{E}_{III} \cdot d\vec{x} = \frac{\rho a(b-x)}{\epsilon_0}$$

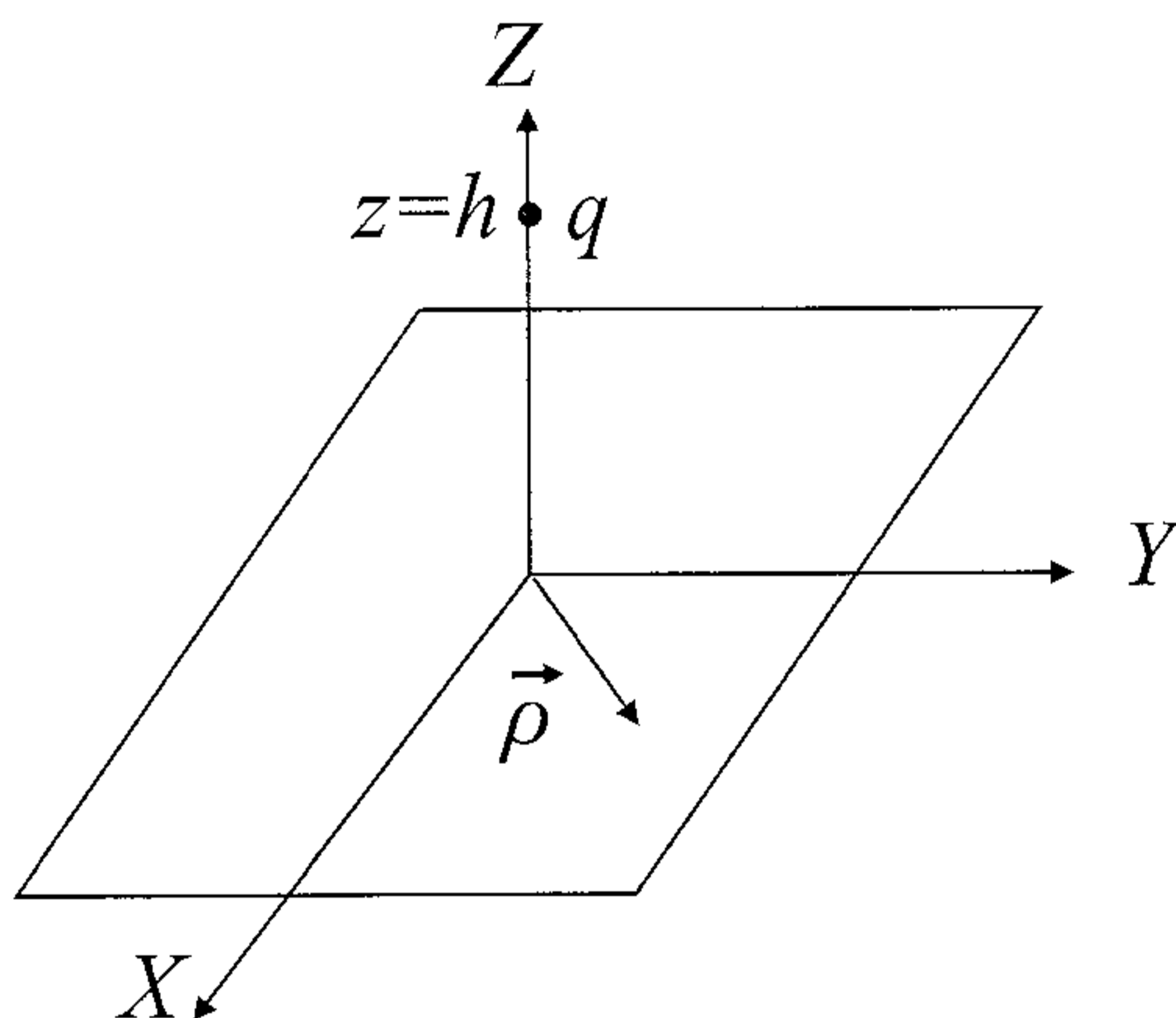
5. Sobre un plano cargado, ubicado en  $z = 0$ , se deposita una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  sobre el eje  $z$ . El plano tiene una densidad de carga  $\sigma$  con simetría cilíndrica respecto al eje  $z$  dada por:

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \quad \text{Cb m}^{-2}$$

donde  $\rho$  denota la distancia de un punto del plano al eje  $z$ .

a) Calcule la fuerza sobre la carga puntual  $q$ .

b) Determine con qué velocidad llegará la partícula al plano si se libera partiendo del reposo a una distancia  $h$  del plano.



### Solución:

a) La fuerza sobre la carga  $q$  está dada por  $\vec{F} = q\vec{E}$ , donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico debido al plano en la posición de la partícula.

El campo eléctrico en un punto del eje  $z$  está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (1)$$

En este problema  $\vec{R} = \rho\hat{\rho}$  es la posición de la carga que crea el campo eléctrico, y  $\vec{r}$  que es igual a  $z\hat{z}$  es el punto donde se calcula el campo eléctrico. Reemplazando en (1) la expresión para  $\sigma$ ,  $\vec{r}$  y  $\vec{R}$ , y recordando que el elemento de área sobre el plano en coordenadas polares es  $dS = \rho d\rho d\phi$ , tenemos,

$$\vec{E}(z\hat{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{qd}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho d\rho \frac{z\hat{z} - \rho\hat{\rho}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

Pero,

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi = \int_0^{2\pi} (\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) d\phi = 0$$

por lo que obtenemos,

$$\vec{E}(z\hat{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{qd}{2\pi} \right) 2\pi z \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Esta integral se puede hacer mediante técnicas usuales y resulta finalmente:

$$\vec{E}(z\hat{z}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z+h)^2} \hat{z}$$

La fuerza que actúa sobre la carga  $q$  ubicada en  $z = h$  es:

$$\vec{F} = q\vec{E}(h\hat{z}) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2} \hat{z}$$

b) La manera más fácil de calcular la velocidad es por conservación de energía.

El trabajo hecho para llevar la partícula desde  $z = h$  hasta  $z = 0$  es:

$$W_{h \rightarrow 0} = \int_0^h q\vec{E}(z) \cdot dz\hat{z} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \frac{dz}{(z+h)^2} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 h}$$

y por definición del potencial ( $\vec{E} = -\nabla V$ ) esto es igual a  $q[V(0) - V(h)]$ . La ecuación de conservación de la energía es:

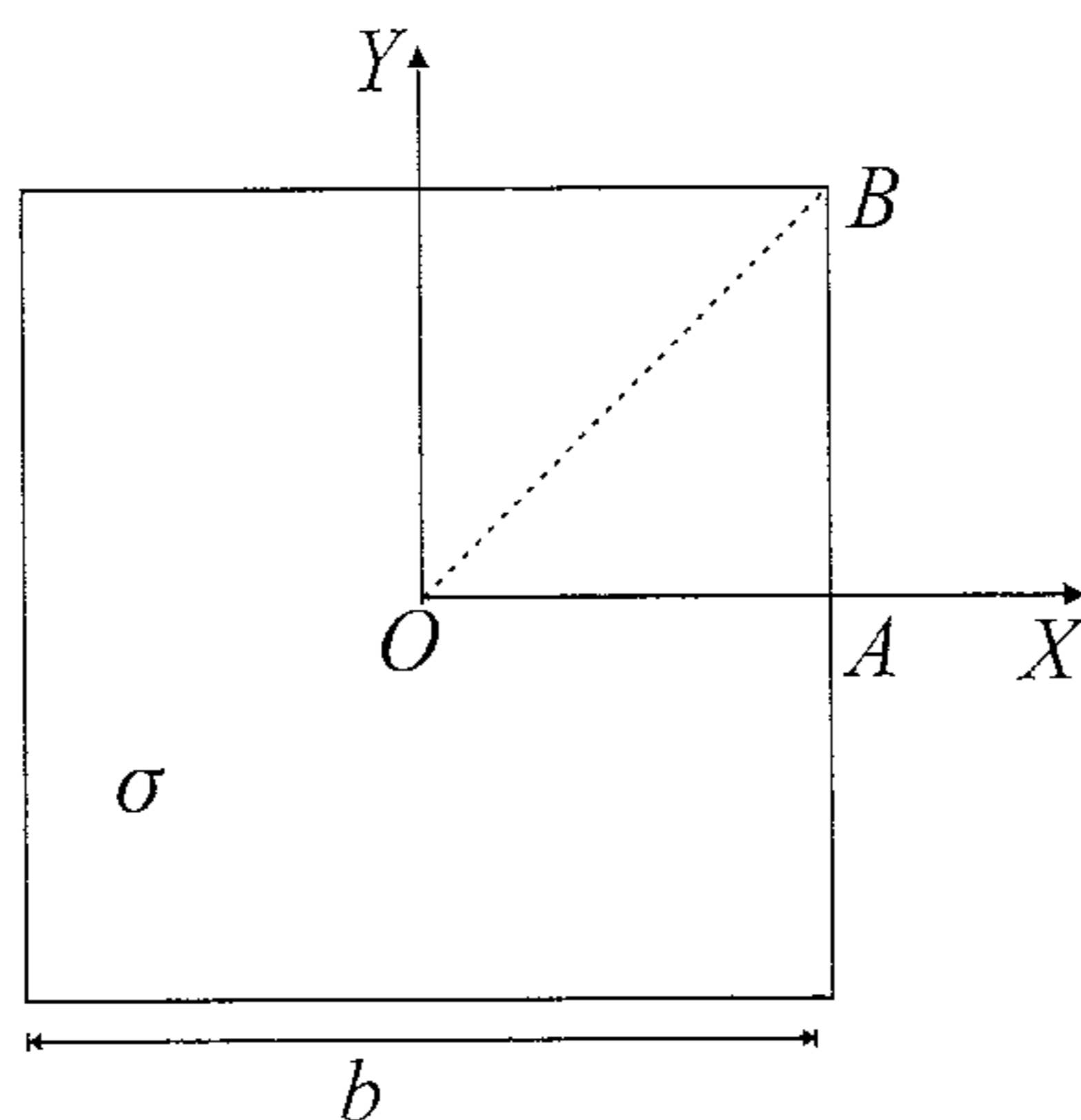
$$\frac{1}{2}mv^2(h) + qV(h) = \frac{1}{2}mv^2(0) + qV(0)$$

Parte del reposo en  $h$ , es decir  $\vec{v}(h) = 0$ , por lo que obtenemos,

$$v^2(0) = \frac{2q}{m}[V(h) - V(0)] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mh}$$

**6.** Calcule el potencial en el centro de un cuadrado de lado  $b$  en el cual se tiene una distribución uniforme de carga superficial  $\sigma$ .



**Solución:**

Usaremos coordenadas cartesianas y elegiremos el origen de modo que coincida con el centro del cuadrado. Ubicaremos el cuadrado en el plano  $x-y$ , de modo que sus lados sean paralelos a los ejes. Por la simetría del cuadrado, el potencial producido por éste en su centro es igual a ocho veces el potencial producido por el triángulo  $OAB$  de la figura (el cuadrado está formado por ocho triángulos idénticos a éste). Genéricamente, el potencial producido por una distribución superficial de carga  $\sigma$  en un punto  $\vec{r}$  está dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dS \quad (1)$$

en que  $\vec{R}$  recorre los distintos puntos de la distribución. En este problema  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j}$  y el elemento de superficie  $dS = dx dy$ . El borde del triángulo  $OAB$  está determinado por las rectas  $y = 0$ ,  $x = 1$  e  $y = x$ . Reemplazando en (1) obtenemos,

$$V(0) = \frac{8\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{b/2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx \quad (2)$$

La integral en  $y$ , i.e.,  $I \equiv \int_0^x (\sqrt{x^2 + y^2})^{-1} dy$ , es fácil de hacer usando el reemplazo trigonométrico  $y = x \tan u$ . Así obtenemos,

$$I \equiv \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \int_0^{\pi/4} \sec u du = \ln(\sec u + \tan u) \Big|_0^{\pi/4} \quad (3)$$

Evaluando el lado derecho de (3) obtenemos,

$$I = \ln(\sqrt{2} + 1) \quad (4)$$

Para obtener este resultado hemos usado las igualdades  $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$ ,  $d \tan u / du = \sec^2 u$ ,  $\tan(\pi/4) = 1$  y  $\sec(\pi/4) = \sqrt{2}$ . Finalmente, reemplazando el valor de  $I$  en (2) obtenemos,

$$V(0) = \frac{8\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{b/2} I dx = \frac{b\sigma}{\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

7. Se tiene un cilindro recto de base circular, de radio  $a$  y longitud  $L$  que contiene una densidad de carga uniforme en volumen  $\rho$ . Calcule el potencial electrostático en un punto del eje del cilindro, exterior a la distribución.

**Solución:**

Por la simetría de la distribución, conviene elegir coordenadas cilíndricas. Elegimos el origen en el centro del cilindro, y el eje  $z$  paralelo al eje del cilindro. El potencial electrostático producido por una distribución en volumen  $\rho$ , en un punto cualquiera del espacio  $\vec{r}$  está dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dv \quad (1)$$

en que  $\vec{R}$  recorre los puntos de la distribución y  $dv$  es el elemento de volumen de ésta. En nuestro caso  $\vec{r} = z\hat{k}$  (sólo se nos pide calcular el potencial en el eje, exterior a la distribución). Sin perder generalidad podemos suponer  $z \geq L/2$ , pues el potencial es simétrico con respecto al centro del cilindro. En coordenadas cilíndricas  $\vec{R} = r\hat{r} + Z\hat{k}$ . Aquí,  $\hat{r}$  es función de la coordenada angular  $\theta$  y  $0 \leq r \leq a$ ,  $-L/2 \leq Z \leq L/2$ , y  $0 \leq \theta < 2\pi$ . El elemento de volumen  $dv$  está dado en coordenadas cilíndricas por  $dv = r dr d\theta dZ$ . Reemplazando todas estas cantidades en (1) obtenemos,

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \rho \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - Z)^2}} r dr d\theta dZ \quad (2)$$

Las integrales en  $\theta$  y en  $r$  se pueden hacer sin dificultad. Así, de (2) se obtiene

$$V(z) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} |z - Z| dZ - \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{a^2 + (z - Z)^2} dZ \right] \quad (3)$$

Llamemos  $I$  y  $II$  respectivamente a las integrales que aparecen en (3). La primera integral es simple de hacer. Como estamos suponiendo  $z \geq L/2$ , se tiene

$$I = zL \quad (4)$$

Con el objeto de hacer la segunda integral, usamos el reemplazo trigonométrico  $z - Z = a \tan \theta$ . Con este reemplazo, la segunda integral es de la forma

$$\int a^2 \sec^3 \theta d\theta$$

cuya primitiva es:

$$\frac{1}{2} [\sec \theta \tan \theta + \ln(\sec \theta + \tan \theta)] \quad (5)$$

En este caso los límites de integración son respectivamente  $\tan^{-1}((z - (L/2))/a)$  y  $\tan^{-1}((z + (L/2))/a)$ . Introduciendo la notación  $m = z + (L/2)$  y  $n = z - (L/2)$  y utilizando los resultados anteriores se obtiene,

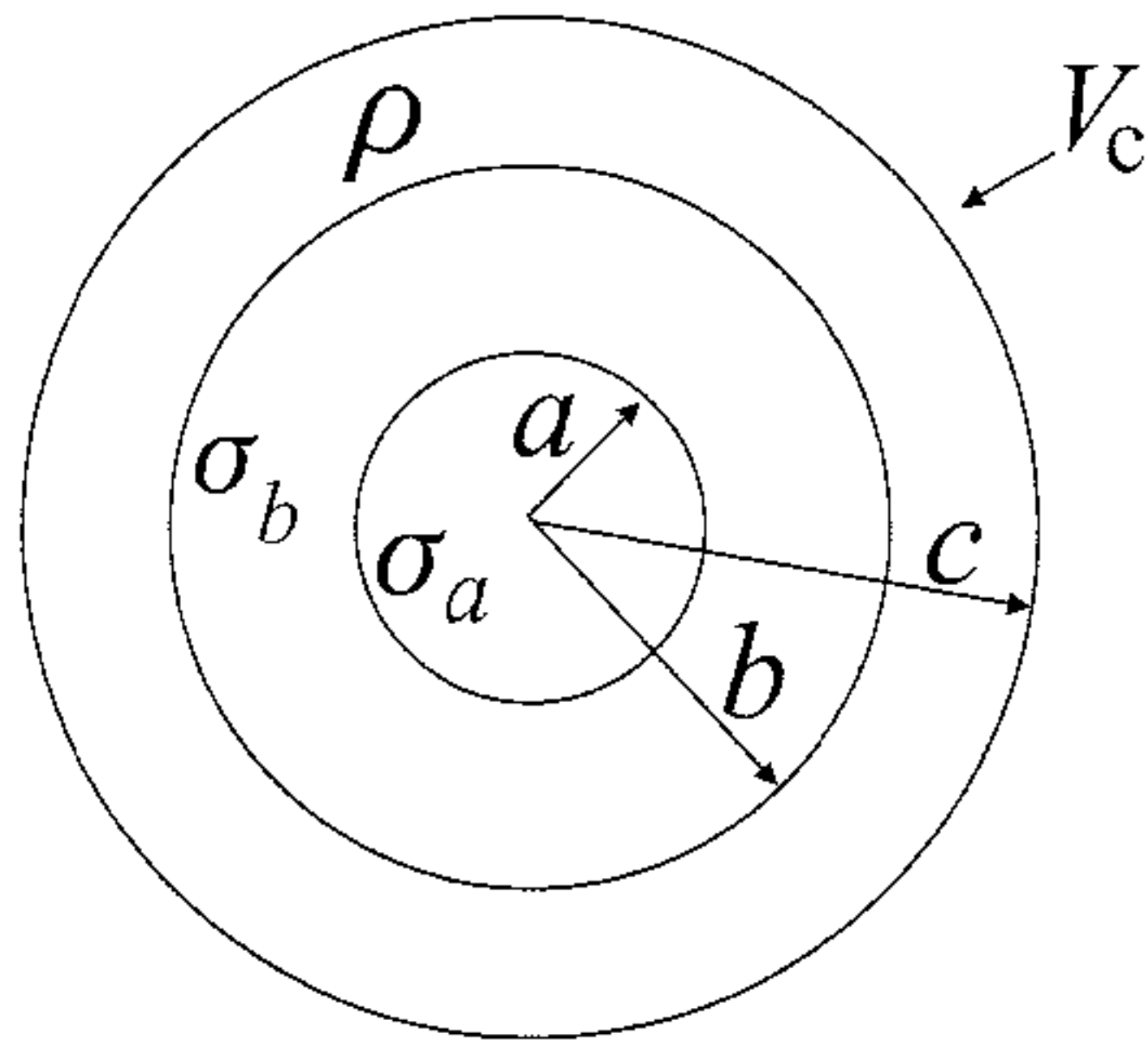
$$II = \frac{1}{2} \left( m\sqrt{m^2 + a^2} - n\sqrt{a^2 + n^2} + a^2 \ln \left[ \frac{m + \sqrt{m^2 + a^2}}{n + \sqrt{n^2 + a^2}} \right] \right) \quad (6)$$

Finalmente, el potencial  $V(z)$  está dado por:

$$V(z) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (I + II)$$

en que  $I$  y  $II$  están dados por (4) y (6) respectivamente. Sugerimos al lector que calcule el límite del potencial para valores de  $z$  mucho mayores que  $L$  (es decir para grandes distancias del cilindro en cuestión). Debería obtener la expresión correspondiente al potencial de una carga puntual con carga igual a  $\rho\pi a^2 L$ .

**8.** Considere un sistema formado por dos cilindros conductores de largo infinito y de radios  $a$  y  $c$  respectivamente ( $a < c$ ). Sobre el cilindro de radio  $a$  hay una densidad superficial de carga  $\sigma_a$ . El cilindro conductor de radio  $c$  está a potencial  $V_c$ . En el espacio entre los cilindros también hay cierta distribución de carga: en  $r = b$  ( $a < b < c$ ) existe una distribución superficial  $\sigma_b$  y en la región entre  $b$  y  $c$  hay una distribución volumétrica de carga  $\rho = -\rho_0 r$ . Un corte transversal de los cilindros se muestra en la figura. Se pide calcular el potencial entre  $a$  y  $c$ .

**Solución:**

Podemos resolver este problema resolviendo la ecuación de Poisson para el potencial directamente o, calculando primero el campo eléctrico usando el teorema de Gauss. Aquí lo haremos por este último camino.

Por la simetría del problema el campo es radial. Tomaremos como superficie de integración del teorema de Gauss cilindros concéntricos con los del problema y de largo  $L$ .

El campo eléctrico en la región I ( $a < r < b$ ):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_I(r) 2\pi r L = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} 2\pi a L$$

por lo que,

$$\vec{E}_I = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r} \hat{r}$$

De igual forma, para la región II ( $b < r < c$ ) tenemos,

$$E_{II}(r) 2\pi r L = \frac{(a\sigma_a + b\sigma_b)}{\epsilon_0} 2\pi L + \frac{1}{\epsilon_0} \int_b^r (-\rho_0 r) 2\pi r dr L$$

ya que si el manto del cilindro está en la región II, la carga encerrada es la carga superficial en  $a$ , en  $b$  y la carga volumétrica entre  $b$  y  $r$ . Al integrar obtenemos,

$$\vec{E}_{II} = \frac{1}{3\epsilon_0 r} (3a\sigma_a + 3b\sigma_b + b^3\rho_0) \hat{r} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r^2 \hat{r}$$

Ahora podemos calcular el potencial. Sabiendo que  $V(c) = V_c$  dado,

$$V(r) - V_c = - \int_c^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Para el potencial en la región II tenemos,

$$V_{II} = V_c - \int_c^r \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r}$$

que es igual a

$$V_{II}(r) = V_c + \frac{\rho_0}{9\epsilon_0}(r^3 - c^3) - \frac{(3a\sigma_a + 3b\sigma_b + b^3\rho_0)}{3\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{c}\right)$$

En la región I el potencial es:

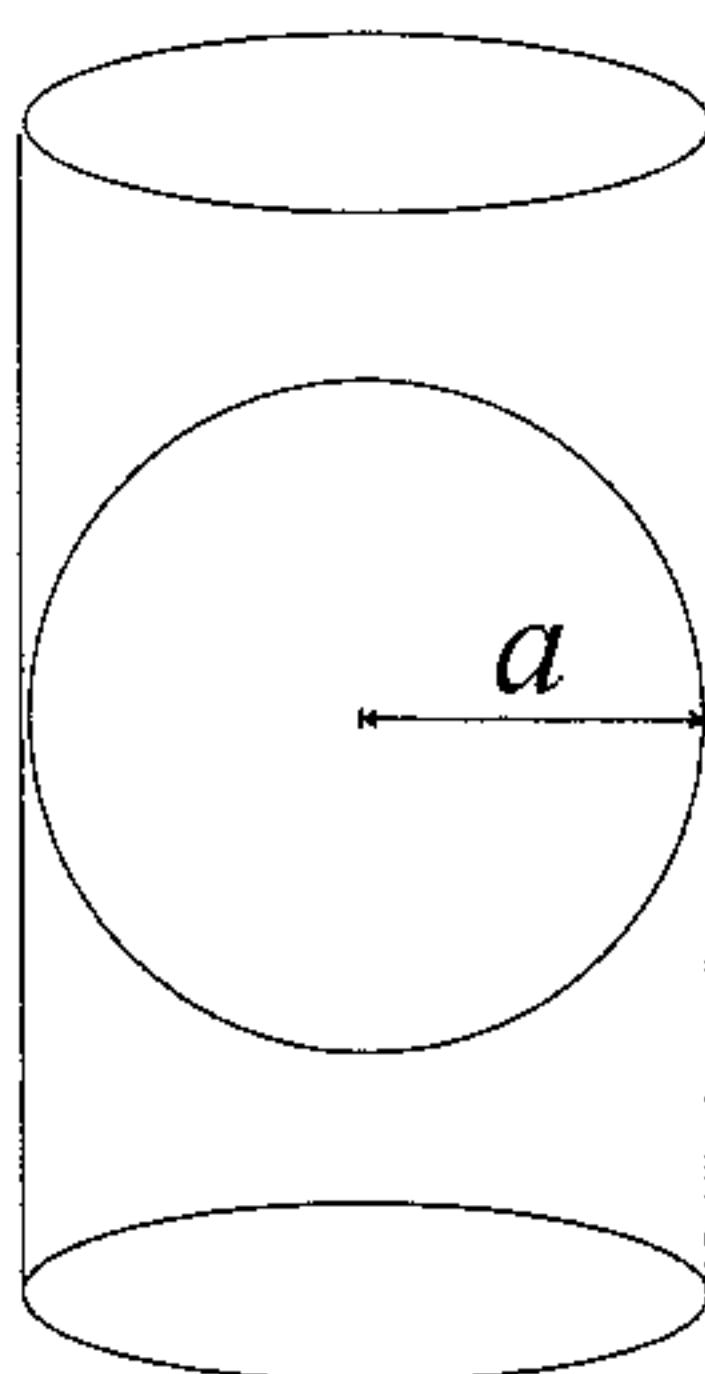
$$V_I = V_c - \int_c^b \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} - \int_b^r \vec{E}_I \cdot d\vec{r}$$

que es

$$V_I = V_{II}(b) - \int_b^r \vec{E}_I \cdot d\vec{r} = V_{II}(b) - \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right).$$

Dejamos como ejercicio la solución de este problema usando la ecuación de Poisson.

**9.** Considere un cilindro muy largo, de radio  $a$ , cargado con densidad uniforme volumétrica  $\rho_0$ , al que se le ha practicado una cavidad esférica de radio  $a$  como se ve en la figura. Calcule el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio exterior al cilindro.



### Solución:

Para resolver este problema conviene usar el principio de superposición: el campo creado por el cilindro con la cavidad es igual al campo creado por un cilindro uniforme de densidad  $\rho_0$  **menos** el campo creado por una

esfera también con densidad  $\rho_0$ . El campo creado por la esfera y por el cilindro se calculan fácilmente usando la ley de Gauss. Para calcular el campo fuera del cilindro usamos como superficie cerrada un cilindro de altura  $h$  concéntrico con el anterior de radio mayor que  $a$ . Por simetría sabemos que el campo será de la forma  $\vec{E}_c = E_c(\rho)\hat{\rho}$  (no confundir la coordenada cilíndrica  $\rho$  con la densidad de carga uniforme  $\rho_0$ ). Aplicando el teorema de Gauss sobre esta superficie obtenemos,

$$\oint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = E_c(\rho)2\pi\rho h = \frac{\pi a^2 h \rho_0}{\epsilon_0}$$

y el campo creado por el cilindro es:

$$\vec{E}_c = \frac{a^2 \rho_0}{2\epsilon_0 \rho} \hat{\rho}$$

El potencial creado por el cilindro también tiene simetría cilíndrica y lo obtenemos integrando  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . En este caso esto es

$$\frac{\partial V_c}{\partial \rho} = -\frac{a^2 \rho_0}{2\epsilon_0 \rho}$$

de donde obtenemos,

$$V_c = -\frac{a^2 \rho_0 \ln \rho}{2\epsilon_0} + \text{cte.}$$

El campo de la esfera, también fácil de calcular, es:

$$E_e = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

y el potencial es

$$V_e = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r} + \text{cte}$$

Ahora, para obtener el resultado deseado, restamos estos campos. El problema tiene simetría cilíndrica por lo que debemos expresar el campo de la esfera en estas coordenadas. Tenemos que  $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z}$ , por lo que  $r^2 = \rho^2 + z^2$  y el vector unitario  $\hat{r} = \vec{r}/|r|$  es:

$$\hat{r} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \hat{\rho} + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \hat{z}$$

Expresando todo en coordenadas cilíndricas el campo resultante es

$$\vec{E} = \vec{E}_c - \vec{E}_e = \left( \frac{a^2 \rho_0}{2\epsilon_0 \rho} - \frac{\rho_0 a^3 \rho}{3\epsilon_0(\rho^2 + z^2)} \right) \hat{\rho} - \frac{\rho_0 a^3 z}{3\epsilon_0(\rho^2 + z^2)} \hat{z}$$

El potencial resulta, de la misma forma,

$$V(\rho, z) = V_c - V_e = -\frac{a^2 \rho_0 \ln \rho}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}} + \text{cte}$$

en que hemos reemplazado la suma de las dos constantes por una sola constante. Esta constante la podemos determinar eligiendo como referencia, por ejemplo,  $V(a, 0) = 0$ . Dejamos este último paso como ejercicio.

**10.** Considere una carga  $Q$  distribuida uniformemente en el volumen de una esfera de radio  $R$ . Calcule la energía potencial eléctrica almacenada en la esfera.

**Solución:**

Para calcular la energía necesitamos el campo eléctrico o el potencial. Aquí lo haremos por los dos métodos.

Una esfera de carga  $Q$  distribuida uniformemente, tiene densidad de carga

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad (1)$$

El campo eléctrico que produce esta distribución se calcula fácilmente usando el teorema de Gauss y está dado por:

$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r > R$$

y

$$\vec{E}_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad \text{para } r < R$$

El potencial resulta igual a

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}, \quad \text{si } r \geq R \quad (2)$$

y en la región interior es:

$$V(r) = -\int_{\infty}^R \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} - \int_R^r \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) \quad \text{si } r \leq R \quad (3)$$

La energía almacenada en la esfera está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V dv \quad (4)$$

donde la integral se extiende sobre el volumen de la esfera, o en términos del campo eléctrico, por:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv \quad (5)$$

donde la integral se extiende sobre todo el espacio. Calculemos primero la energía a partir del potencial. Reemplazando la expresión para el potencial en el interior de la esfera (i.e., la ecuación (3)) en (4), usando que el elemento de volumen en coordenadas esféricas está dado por  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  obtenemos,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (6)$$

La integral sobre los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  es, como ya sabemos,  $4\pi$ . Entonces (6) se reduce a

$$U = \frac{2\pi \rho^2}{\epsilon_0} \int_0^R \left[ \frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{6} \right] dr \quad (7)$$

y efectuando la integral en  $r$  obtenemos,

$$U = \frac{4\pi R^5}{15\epsilon_0} \rho^3 = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \right) \quad (8)$$

Para obtener la última igualdad en (8) hemos reemplazado  $\rho$  en términos de  $Q$ , usando (1).

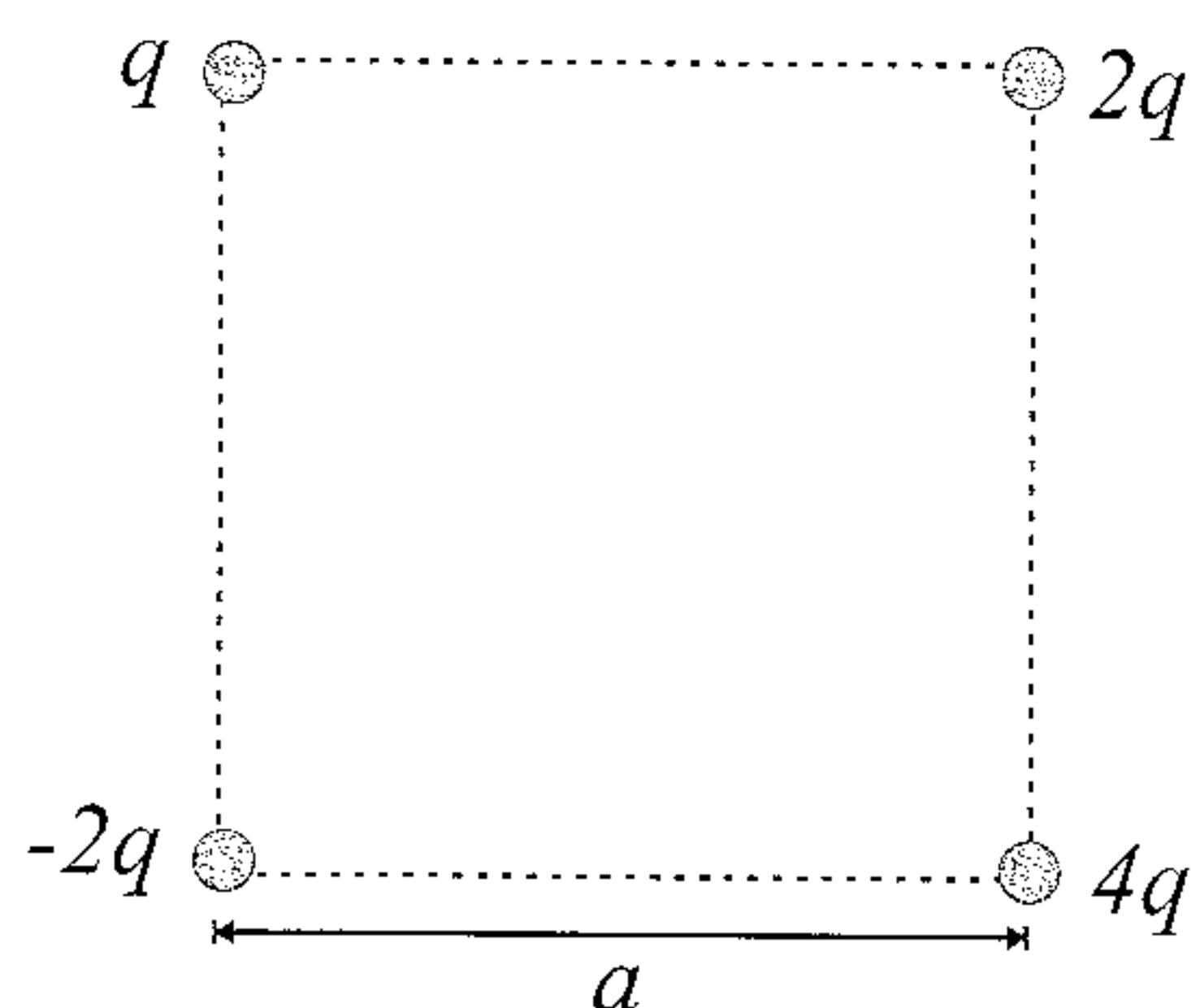
También podríamos haber calculado la energía a partir del campo eléctrico,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_{\text{int}}^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi + \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_{\text{ext}}^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \right)$$

El resultado es nuevamente la expresión (8) para la energía.



11. Encuentre el trabajo necesario para poner las cuatro cargas de la figura en un cuadrado de lado  $a$ .



### Solución:

La energía almacenada por un sistema de  $N$  cargas puntuales  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ubicadas respectivamente en las posiciones  $\vec{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|} \quad (1)$$

Esta energía es equivalente al trabajo necesario para armar dicha configuración. En este problema la configuración consiste en 4 cargas puestas en los vértices de un cuadrado de lado  $a$  como se ilustra en la figura. Si rotulamos las 4 cargas de izquierda a derecha y desde arriba hacia abajo, tenemos

$$q_1 = q, \quad q_2 = 2q, \quad q_3 = -2q, \quad \text{y} \quad q_4 = 4q$$

Además,

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_4| = |\vec{r}_3 - \vec{r}_4| = a$$

y

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_4| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = a\sqrt{2}$$

Reemplazando todas estas cantidades en (1) obtenemos,

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \left( 2 - 2 + \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} + 8 - 8 \right) = 0$$

Por lo tanto el trabajo neto necesario para armar la configuración de la figura es 0.

**12.** Pequeñas gotas cargadas se usan en distintas situaciones. por ejemplo en spray electrostáticos para pintar, impresoras de tinta y otros. Vamos a ver que el tamaño de la gota depende de la carga por unidad de masa del fluido.

a) Si una gota cargada se separa en dos, su energía electrostática disminuye. Calcule la pérdida de energía cuando una gota de carga  $Q$  y radio  $R$  se divide en dos gotas iguales, de carga  $Q/2$  y radio  $R'$  cada una. Suponga que la carga en las gotas se distribuye sobre la superficie y que las dos gotas finales están muy separadas. Suponga además que el fluido es incompresible por lo que el volumen total no varía.

b) En una gota es necesario considerar la energía asociada a la tensión superficial, que es igual a una constante  $T$  multiplicada por el área de la gota. Cuando una gota se divide en dos, el área aumenta por lo que la energía asociada a la tensión superficial también aumenta. Calcule este aumento para el agua cuya tensión superficial es  $T = 7,275 \times 10^{-2}$  [Joules/m<sup>2</sup>].

c) Una gota de agua tiene un radio de  $10^{-6}$  [m] y una carga de 1 [Cb/kg]. ¿Se separará en dos?

d) Calcule el radio máximo que puede tener una gota de agua con carga 1 [Coulomb/kg] y ser estable (no separarse en dos).

### Solución:

Por conservación del volumen podemos calcular el radio  $R'$  de las dos gotas finales:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \times \frac{4}{3}\pi R'^3$$

por lo que  $R' = R/2^{1/3}$ .

La energía almacenada por el campo eléctrico es:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3x$$

Para una esfera de radio  $R$  y carga  $Q$  distribuida sobre su superficie, sabemos que  $\vec{E} = 0$  en el interior de la esfera y  $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$  en el exterior, por lo que la energía almacenada en el campo es:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_R^\infty r^2 dr \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (1)$$

La ecuación (1) es la energía inicial  $U_i$  del sistema. La energía final,

cuando se han formado las dos gotas, es:

$$U_f = 2 \times \frac{Q'^2}{8\pi\epsilon_0 R'} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \times \frac{1}{2^{2/3}} < U_i$$

Así pues,  $\Delta U = U_f - U_i < 0$ .

b) Si se considera la tensión superficial, la energía inicial de la gota es:

$$U_i = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + 4\pi R^2 T \quad (2)$$

y la energía final es:

$$U_f = \frac{Q'^2}{8\pi\epsilon_0 R'} + 4\pi R'^2 T \quad (3)$$

La diferencia de energía entre el estado final e inicial, debida exclusivamente a la tensión superficial, es:

$$(\Delta U)_{\text{Tensión}} = 4\pi T(R'^2 - R^2) = 4\pi R^2 T(2^{1/3} - 1) > 0$$

Para el agua este valor es  $0,2376 R^2$ .

c) La gota se divide si el estado final tiene menor energía que el estado inicial. Para una gota de agua con carga de  $1$  [Cb/kg], la carga total es igual numéricamente a su masa. La densidad del agua es  $1000$  [kg/m<sup>3</sup>] por lo que la carga total de la gota es  $Q = 1000 \times 4\pi R^3/3$  [Cb].

La diferencia de energía entre el estado final e inicial es, reemplazando los valores numéricos en (2) y (3),  $\Delta U = U_f - U_i = -2,919 \times 10^{-14} + 0,2376 \times 10^{-12} > 0$  por lo que no se dividirá.

d) El mayor radio estable se obtiene al exigir  $\Delta U \geq 0$ , que es:

$$-2,919 \times 10^{16} R^5 + 0,237 R^2 \geq 0$$

lo cual implica que la gota es estable si  $R \leq 2,02 \times 10^{-6}$  [m].

**13.** Calcule el campo eléctrico producido por una distribución de carga  $\rho(r)$  tal que el potencial que esta distribución produce está dado por  $V(r) = q \exp(-r\lambda)/(4\pi\epsilon_0 r)$ . Luego encuentre la distribución de carga  $\rho(r)$ .

**Solución:**

En general el campo eléctrico se obtiene a partir del potencial a través de:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Como en este caso el potencial solo depende de  $r = |\vec{r}|$  (i.e., el potencial tiene simetría esférica),

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} e^{-\lambda r} (1 + \lambda r)\hat{r} \quad (1)$$

Para calcular la densidad de carga usamos la forma diferencial del teorema de Gauss, i.e.,  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ . Como en este caso  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r)) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (-\lambda e^{-\lambda r} (1 + \lambda r) + \lambda e^{-\lambda r}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \lambda^2 e^{-\lambda r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Así,

$$\rho(r) = -q \frac{\lambda^2}{4\pi r} e^{-\lambda r} \quad \text{para } r \neq 0 \quad (2)$$

Además como  $\vec{E}(\vec{r})$ , dado por (1), es singular en  $r = 0$  y se comporta como  $1/r^2$ , entonces al centro hay una carga puntual cuyo valor es:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 E(r) 4\pi\epsilon_0 = q \quad (3)$$

En resumen, el potencial dado en el enunciado de este problema es generado por un sistema de cargas compuesto por una carga puntual de valor  $q$  en el origen más una distribución de carga en volumen fuera del origen determinada por la ecuación (2).

*Comentario:* La función  $\rho(r)$  obtenida en este problema es la distribución de carga característica en el interior de un átomo con simetría esférica.

Al centro del átomo hay una carga puntual  $Z|e|$ , en que  $Z$  es el *número atómico* (número de protones), la cual corresponde a la carga del núcleo. Alrededor del núcleo se encuentra una distribución de carga negativa

$$\rho(r) = -Z|e|\frac{\lambda^2}{4\pi r}e^{-\lambda r}, \quad \text{para } r \neq 0$$

en que  $1/\lambda$  es la *longitud de apantallamiento*. La carga total del sistema es 0. Efectivamente,

$$Q = Z|e| - \int_0^\infty 4\pi\rho^2(r)r^2 dr = Z|e| - Z|e| = 0$$

**14.** Se tiene una distribución de carga con simetría esférica  $\rho(r)$  en el interior de una esfera de radio  $a$ . En el exterior de la esfera  $\rho = 0$ . El potencial en el interior de la esfera está dado por  $V(r) = V_0r^3 + K$  en que  $V_0$  es conocido y  $K$  una constante por determinar. Se pide encontrar el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio.

**Solución:**

La densidad de carga debe satisfacer la ecuación de Poisson para el potencial. Como el potencial y la densidad tienen simetría esférica esto es:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 12V_0r = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

de donde vemos que la densidad de carga es  $\rho = -12V_0\epsilon_0r$

El campo eléctrico en el interior de la esfera es

$$\vec{E}_{in} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = -3V_0r^2 \hat{r}$$

En el exterior vale

$$\vec{E}_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

donde la carga  $Q$  total de la esfera es:

$$Q = \int \rho d^3x = -12V_0\epsilon_0 \int_0^a r^2 dr \int d\Omega r^2 = -12V_0\epsilon_0\pi a^4$$

Hemos usado la definición de ángulo sólido  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  cuya integral sobre la esfera es  $4\pi$ . Reemplazando este valor de  $Q$  en el campo eléctrico

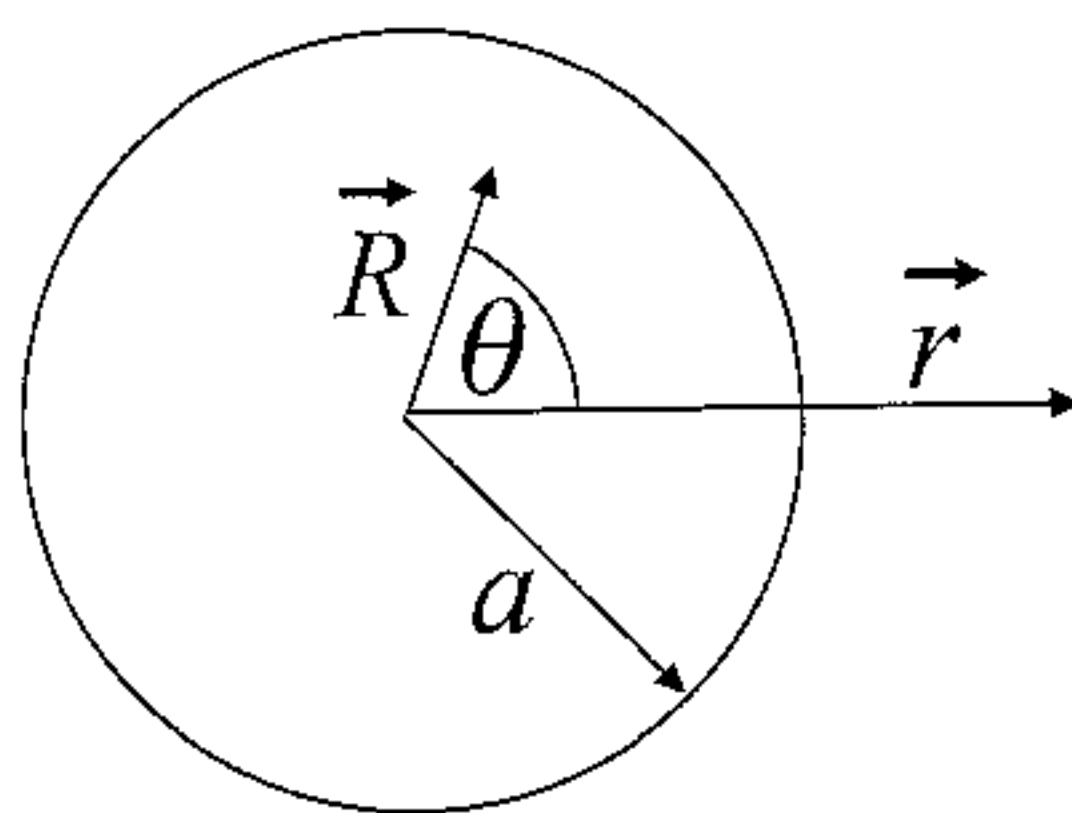
externo expresamos el campo en términos de las cantidades dadas,  $\vec{E}_{ext} = -(3V_0a^4/r^2)\hat{r}$ .

Por último, la constante  $K$  se determina pidiendo que el potencial sea continuo en  $r = a$ .

$$V_{in}(a) = V_0a^3 + K \quad \text{y} \quad V_{ext}(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{3V_0a^4}{r}$$

Al exigir la continuidad obtenemos  $K = -4V_0a^3$ , de modo que podemos escribir  $V_{int} = V_0(r^3 - 4a^3)$ .

**15.** Considere un disco de radio  $a$ , cargado con densidad uniforme de carga  $\sigma$ . Encuentre el potencial producido por esta distribución de carga en un punto cualquiera del plano del disco.



### Solución:

Este problema no tiene ninguna dificultad conceptual, es una aplicación directa de la definición de potencial. Tiene una dificultad matemática que es la aparición de integrales elípticas. Como un apéndice de este problema damos la definición y algunas propiedades elementales de ellas.

**Potencial en el exterior del disco:** El potencial creado por el disco en un punto cualquiera  $\vec{r}$  está dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} dS \quad (1)$$

en que la integral se efectúa sobre la superficie del disco de radio  $a$ . Aquí  $\vec{R}$  varía sobre la superficie del disco. Con el objeto de evaluar la integral en (1) elijamos coordenadas polares. Conviene elegir la dirección de  $\vec{r}$  como eje polar (con respecto al cual medimos el ángulo  $\theta$ ). En

polares  $\vec{R} = R\hat{R}$ , y  $dS = R dR d\theta$ . Por la elección del eje polar  $|\vec{r} - \vec{R}| = (R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}$  (en que  $r = |\vec{r}|$ ). Aquí,  $R$  varía entre 0 y  $a$ ,  $\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$ . Si el punto  $\vec{r}$  está fuera del círculo,  $r > a$ , hagamos el cambio de variables  $u = R/r$  ( $u < 1$ ). En términos de las variables  $u$  y  $\theta$  podemos escribir (1) como

$$V(r) = \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{a/r} \int_0^{2\pi} \frac{u du d\theta}{(1 + u^2 - 2u \cos \theta)^{1/2}} \quad (2)$$

Usando la ecuación (A7) del apéndice, podemos hacer la integral en la variable  $\theta$  y obtener,

$$V(r) = \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{a/r} 4u K(u) du \quad (3)$$

Finalmente usando (A6) obtenemos,

$$V(r) = \frac{\sigma r}{\pi\epsilon_0} \left( E(u) - (1 - u^2)K(u) \right) \Big|_0^{a/r}$$

y, usando  $E(0) = K(0) = \pi/2$  obtenemos,

$$V(r) = \frac{\sigma r}{\pi\epsilon_0} \left[ E\left(\frac{a}{r}\right) - \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) K\left(\frac{a}{r}\right) \right] \quad (4)$$

siempre que  $r \geq a$ . En particular:

i) para  $r = a$ ,  $V(a) = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} E(1) = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0}$ . (Aunque  $K$  diverge cuando  $r$  tiende a  $a$ ,  $1 - (a/r)^2$  va más rápido a cero).

ii) para  $r \gg a$ , podemos usar los desarrollos en serie de Taylor de  $E(k)$  y  $K(k)$  alrededor de  $k = 0$ , los cuales son simples de obtener a partir de las definiciones (A1) y (A2). En efecto,

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} + O(k^4) \right) \quad (5)$$

si  $k \ll 1$ , y

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4) \right) \quad (6)$$

si  $k \ll 1$ . Utilizando (5) y (6) en (4) obtenemos,

$$V(r) = \frac{\sigma(\pi a^2)}{4\pi\epsilon_0} \left( 1 + O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) \right)$$

si  $r \gg a$ , que es justamente lo que uno espera (i.e., desde muy lejos el disco parece una carga puntual, cuyo valor es precisamente  $\sigma\pi a^2$ ).

**Potencial en el interior del disco:** Se deja al lector, como un ejercicio simple, usando (A8) en lugar de (A7) y descomponiendo la integral radial entre 0 y  $(a/r)$  como una integral entre 0 y 1 más una integral entre 1 y  $(a/r)$ , demostrar que en este caso ( $r < a$ )

$$V(r) = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} E\left(\frac{r}{a}\right) \quad (7)$$

Nótese que en este caso la integral relevante es de la forma  $\int (K(k)/k^2) dk$  que es justamente  $-E(k)/k$  (ver ecuación [A5]). En particular, al centro del disco obtenemos, a partir de (7), que:

$$V(0) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

resultado que es obvio a partir de (1).

### Apéndice: Definición y Propiedades de las Integrales Elípticas Completas.

Las *integrales elípticas completas* están definidas por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad (A1)$$

y,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{+1/2} d\theta \quad (A2)$$

para  $0 \leq k \leq 1$ . De (1) y (2) se obtiene de inmediato que  $E(0) = K(0) = \pi/2$  y que  $E(1) = 1$ . Por otra parte la función  $K(k)$  diverge logarítmicamente cuando  $k$  tiende a 1 (la función  $K(k)$  se comporta como  $-\ln(1 - k^2)$  cerca de  $k = 1$ ). Es claro de (A1) y (A2) que la función  $E(k)$  es decreciente, y que la función  $K(k)$  es creciente ( $\pi/2 \leq K(k) < \infty$  y  $1 \leq E(k) \leq \pi/2$ ).

#### Propiedades elementales de $E(k)$ y $K(k)$ :

Las siguientes propiedades de  $E(k)$  y  $K(k)$  son simples de obtener a partir de las definiciones (A1) y (A2). Su deducción se deja como ejercicio para el lector.



[1]

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)] \quad (A3)$$

[2]

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{k} \left( \frac{E(k)}{k'^2} - K(k) \right) \quad \text{con} \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (A4)$$

[3] Son consecuencias inmediatas de [1] y [2] que,

$$\frac{d}{dk} \left( \frac{E}{k} \right) = -\frac{K}{k^2} \quad (A5)$$

y

$$\frac{d}{dk} \left( E - (1 - k^2)K \right) = kK \quad (A6)$$

[4] Si  $u < 1$ ,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + u^2 - 2u \cos \theta)^{1/2}} = 2K(u) \quad (A7)$$

[5] Si  $u > 1$ ,

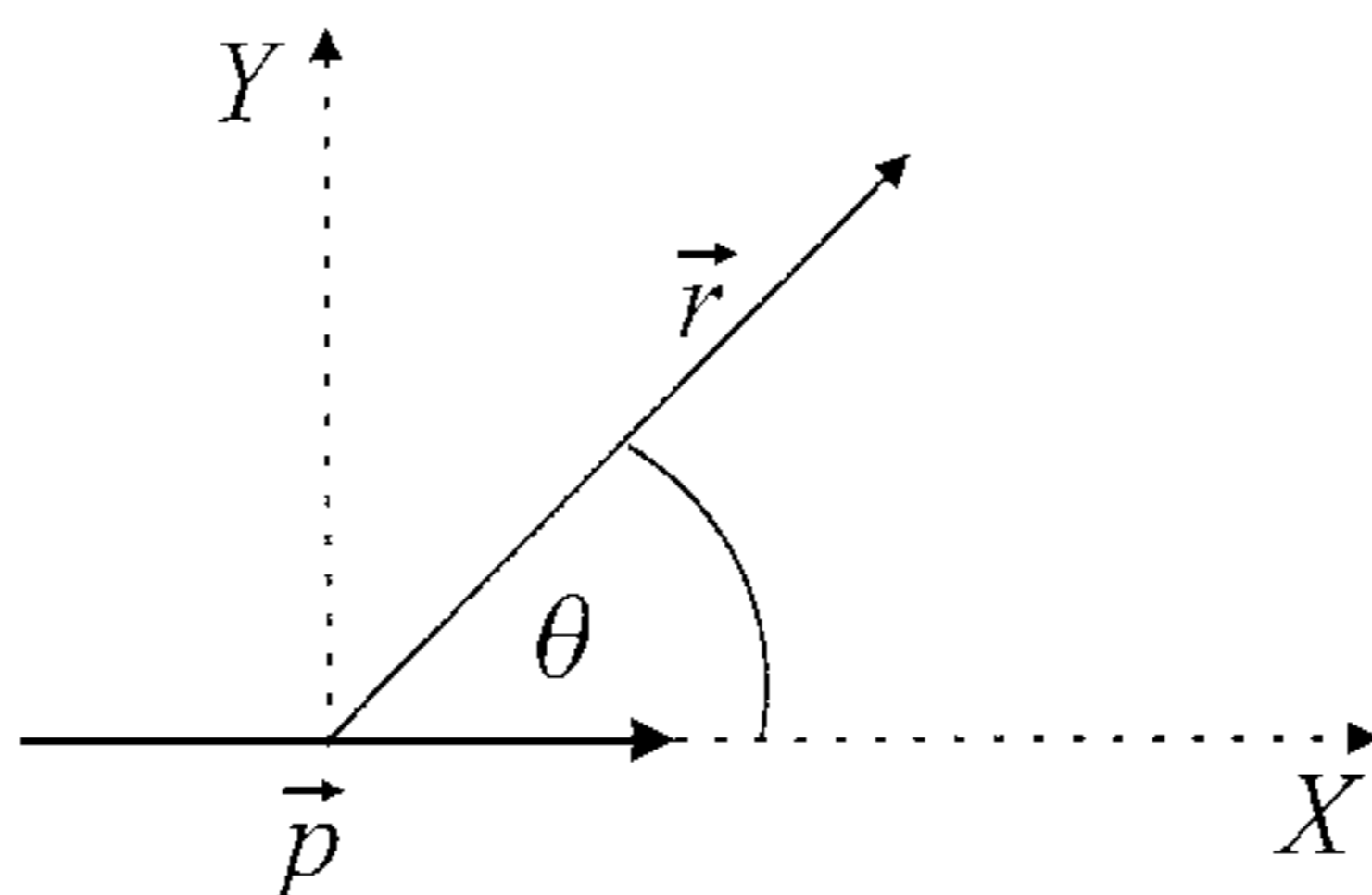
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + u^2 - 2u \cos \theta)^{1/2}} = \frac{2}{u} K\left(\frac{1}{u}\right) \quad (A8)$$

La ecuación (A8) es una consecuencia directa de (A7). En efecto para obtener (A8) basta hacer el cambio  $u \rightarrow (1/u)$  en (A7). Demostrar (A7), sin embargo, es más complicado.

*Notas históricas:* Las integrales elípticas incompletas, i.e., de la forma  $\int_0^t (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$ , con  $t \leq \pi/2$  aparecieron por primera vez al calcular longitudes de arco de elipses, de ahí su nombre. Eran conocidas en el siglo XVIII. La teoría de las integrales elípticas y de sus funciones inversas, las llamadas funciones elípticas, fue desarrollada en el siglo XIX por el matemático noruego Niels H. Abel (1802–1829) y el matemático alemán Carl G. J. Jacobi (1804–1851).

Las funciones elípticas aparecen en muchas aplicaciones de física, matemática e ingeniería. Son también parte importante de la Teoría de Números. En Mecánica aparecen, por ejemplo, al calcular el período de oscilaciones de amplitud arbitraria del péndulo simple, descrito por  $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$ .

16. Obtenga las líneas de fuerza y superficies equipotenciales de un dipolo.



**Solución:**

El potencial dipolar está dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

y el campo eléctrico  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  es, usando coordenadas polares,

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r} + \frac{p \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\theta}$$

Las superficies equipotenciales son aquellas para las cuales el potencial  $V = \text{constante} = c$ . De la expresión para el potencial vemos que las superficies equipotenciales están dadas por:

$$r^2 = c \cos \theta$$

Para calcular las líneas de fuerza, recordemos que son líneas a las cuales el campo eléctrico es tangente. Sabemos que para una curva  $\vec{r}(s)$  su tangente es la derivada  $d\vec{r}/ds$  y, por lo tanto, el campo es tangente a esta línea si  $\vec{E}(\vec{r}) \propto d\vec{r}/ds$ . En coordenadas polares,  $\vec{r} = r\hat{r}$  y  $d\vec{r}/ds = (dr/ds)\hat{r} + r(d\theta/ds)\hat{\theta}$ . De modo que para las líneas de fuerza se cumple que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dr}{ds} \hat{r} + r \frac{d\theta}{ds} \hat{\theta} = \alpha (E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta})$$

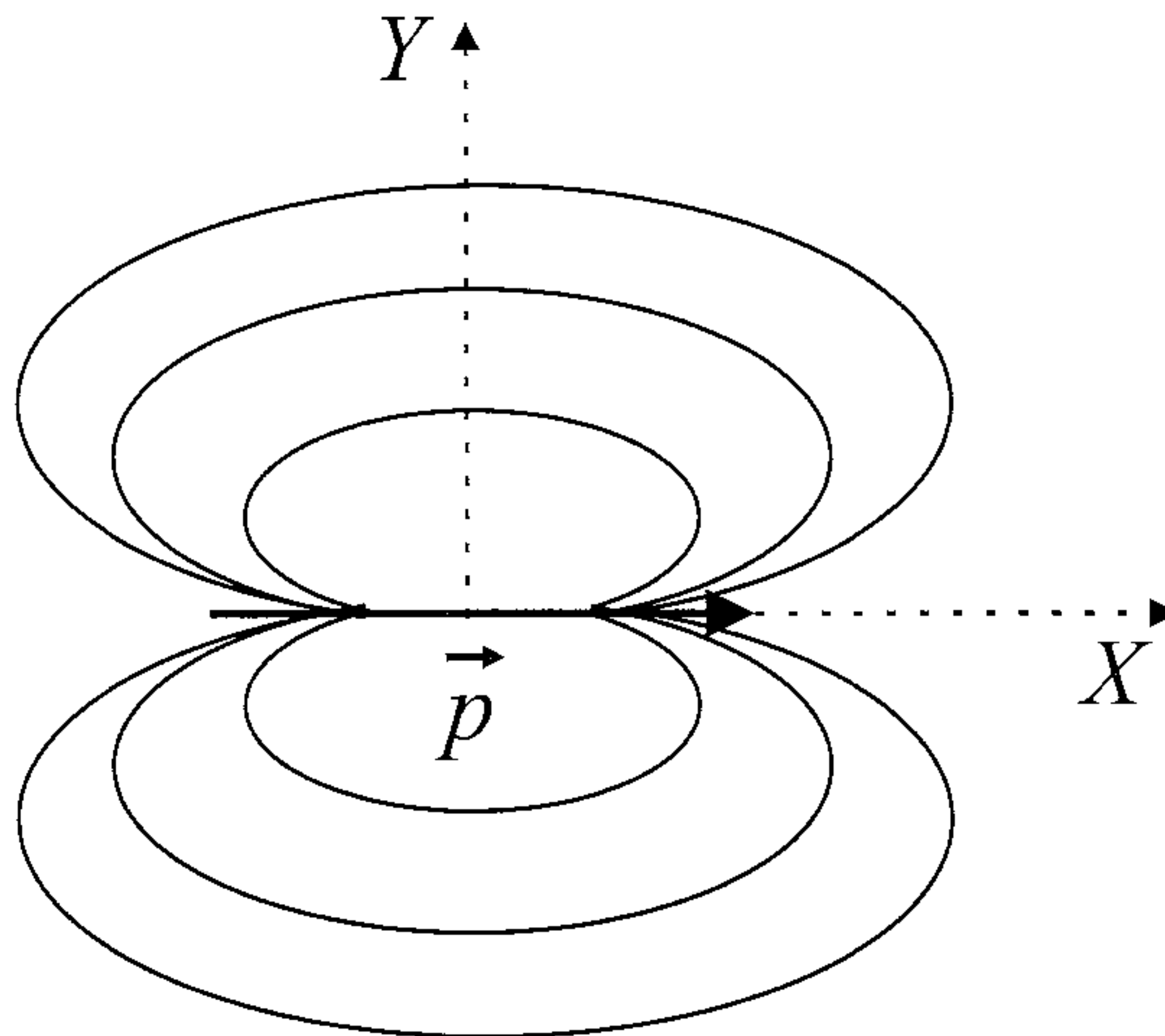
donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad. Dividiendo la componente radial por la tangencial de esta expresión, encontramos la ecuación para las líneas de fuerza:

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

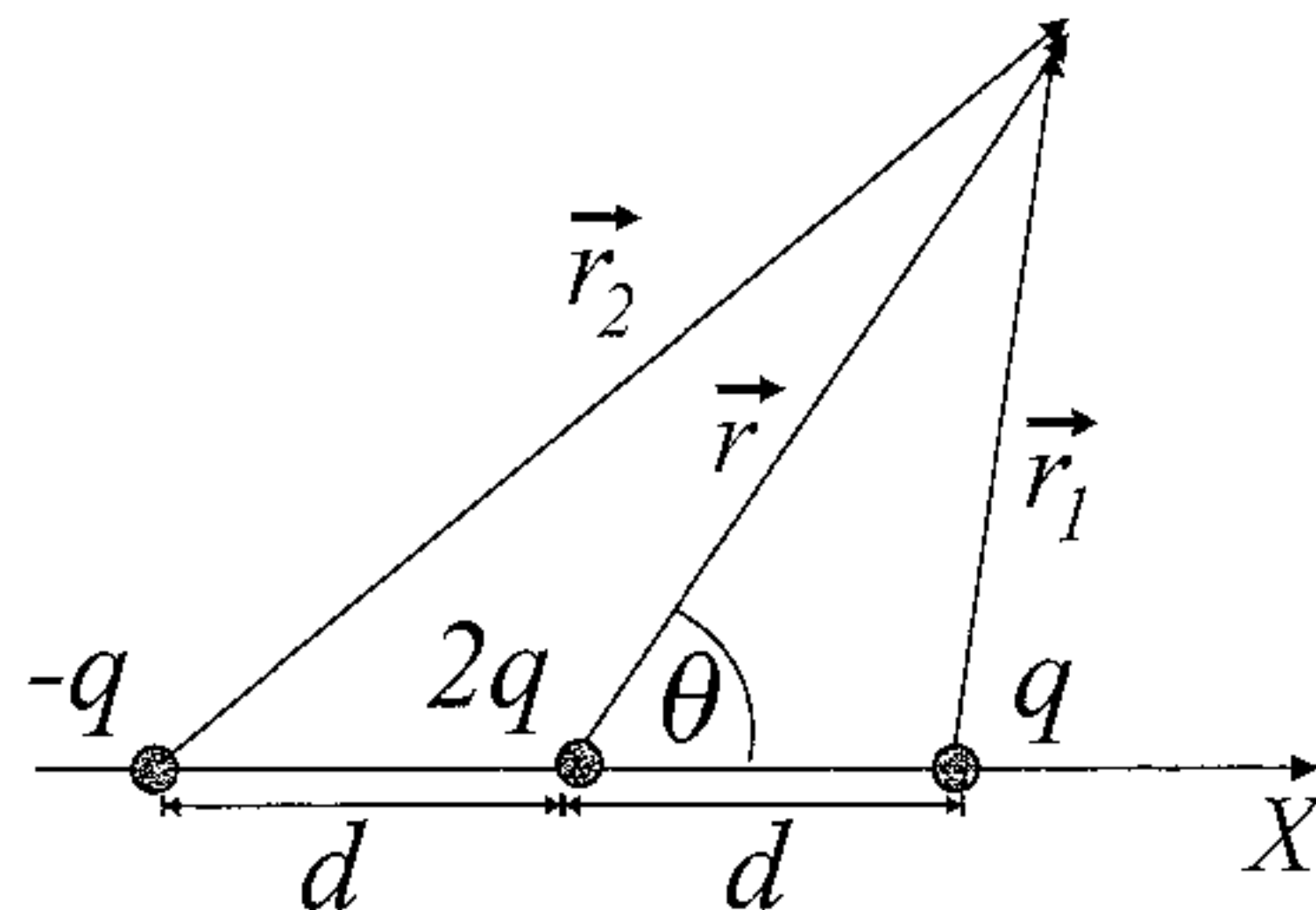
Esta ecuación se integra fácilmente, encontramos que las líneas de fuerza son las curvas

$$r = K \operatorname{sen} \theta$$

donde  $K$  es una constante. Cada línea dibujada en la figura corresponde a un valor dado de  $K$ .



17. Encuentre las líneas de fuerza y superficies equipotenciales de un cuadrupolo.



### Solución:

Un cuadrupolo consiste en el arreglo de cargas mostrado en la figura, en el límite en que la separación  $d$  entre las cargas tiende a cero y la carga  $q$  tiende a infinito, pero con la cantidad  $Q = qd^2$  fija. Esta cantidad se llama el momento cuadrupolar. Al igual que en el problema anterior, hay

simetría de rotación respecto al eje en que se encuentran las cargas. Por esto basta trabajar en un plano en el que usamos coordenadas cilíndricas. El potencial creado por estas cargas es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q}{r_1} + \frac{2q}{r} - \frac{q}{r_2} \right) \quad (1)$$

De la figura vemos que  $r_1 = (r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{1/2}$  y  $r_2 = (r^2 + d^2 + 2dr \cos \theta)^{1/2}$ . Para  $d \ll r$  podemos desarrollar en serie de Taylor  $r_1$  y  $r_2$ . Conservando términos hasta de segundo orden obtenemos,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d^2}{r^2} - 2\frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d^2}{r^2} + 2\frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

Para obtener estas expresiones hemos usado el desarrollo  $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3x^2/8 + \dots$  y conservado términos hasta orden  $d^2/r^2$ . Reemplazando estas aproximaciones en la ecuación (1), obtenemos,

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

(Recordemos que  $Q = qd^2$ ). Las superficies equipotenciales las obtenemos de inmediato, si  $V = c$ ,

$$r^3 = c(1 - 3 \cos^2 \theta)$$

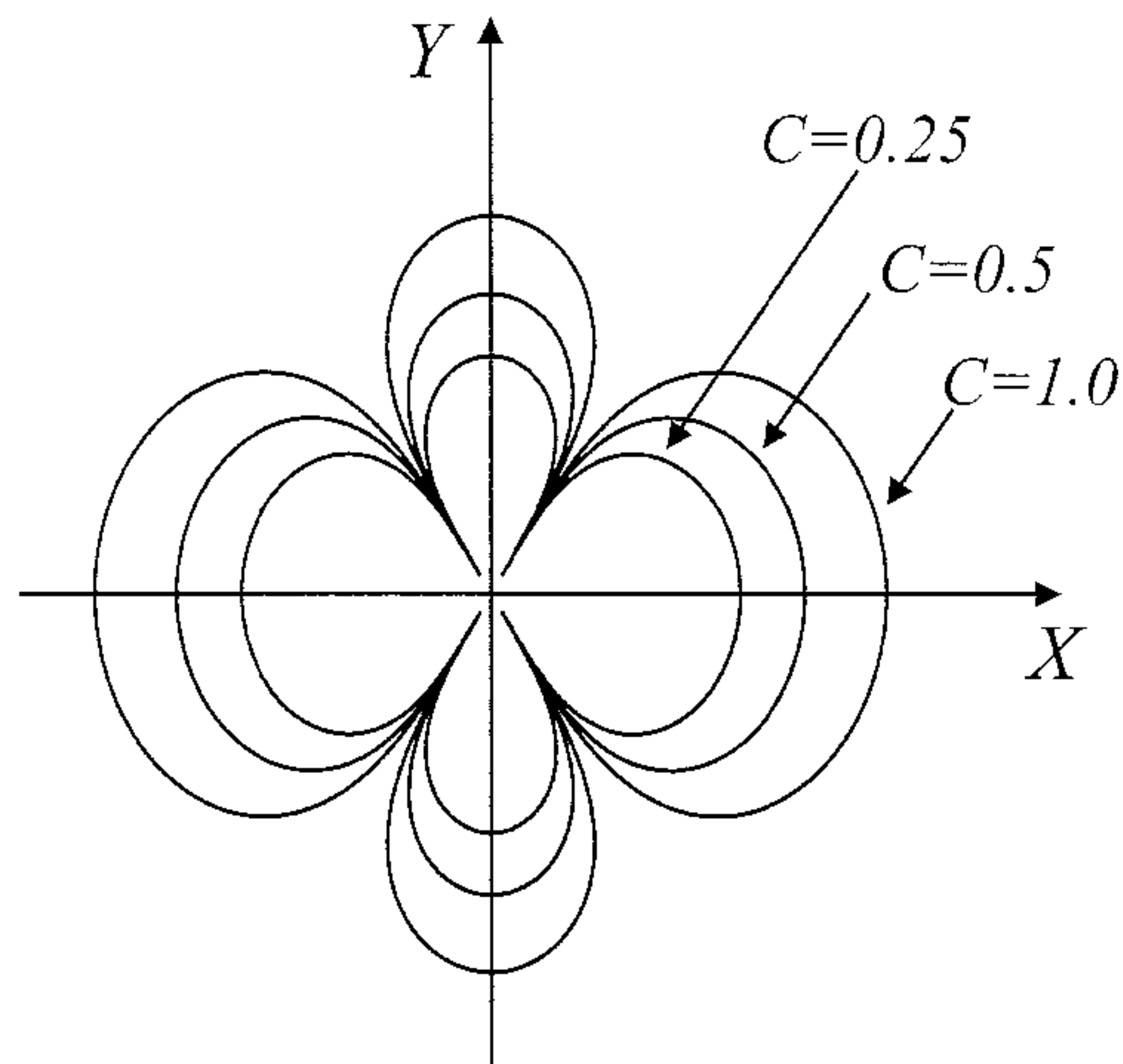
superficies que hemos dibujado en la figura siguiente.

Para obtener las líneas de fuerza procedemos de la misma forma que en el problema anterior. El campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} = \frac{3Q(1 - 3 \cos^2 \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^4} \hat{r} - \frac{6Q \cos \theta \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^4} \hat{\theta}$$

La ecuación para las líneas de fuerza es entonces:

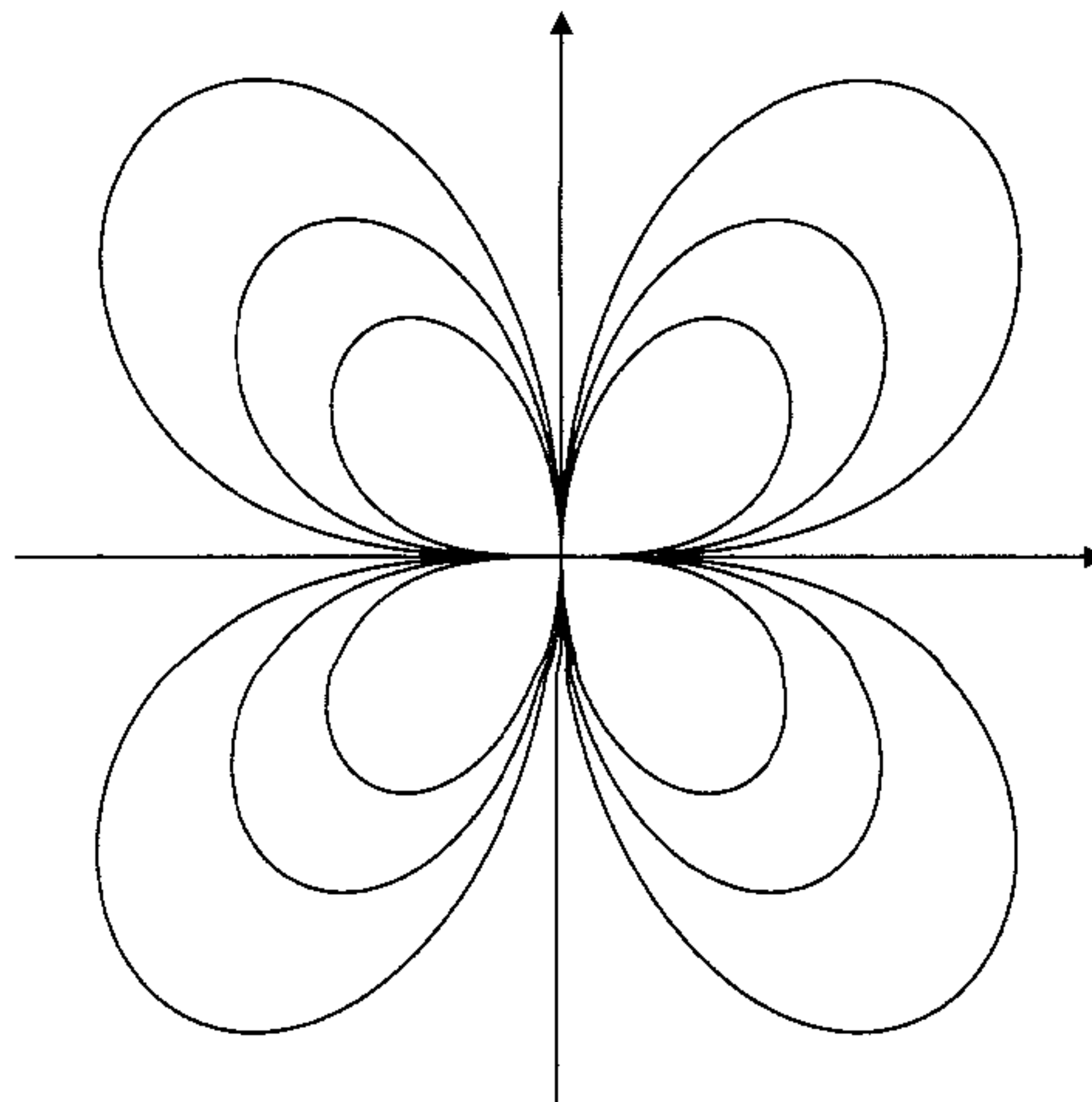
$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos \theta \sin \theta}$$



cuya integral es

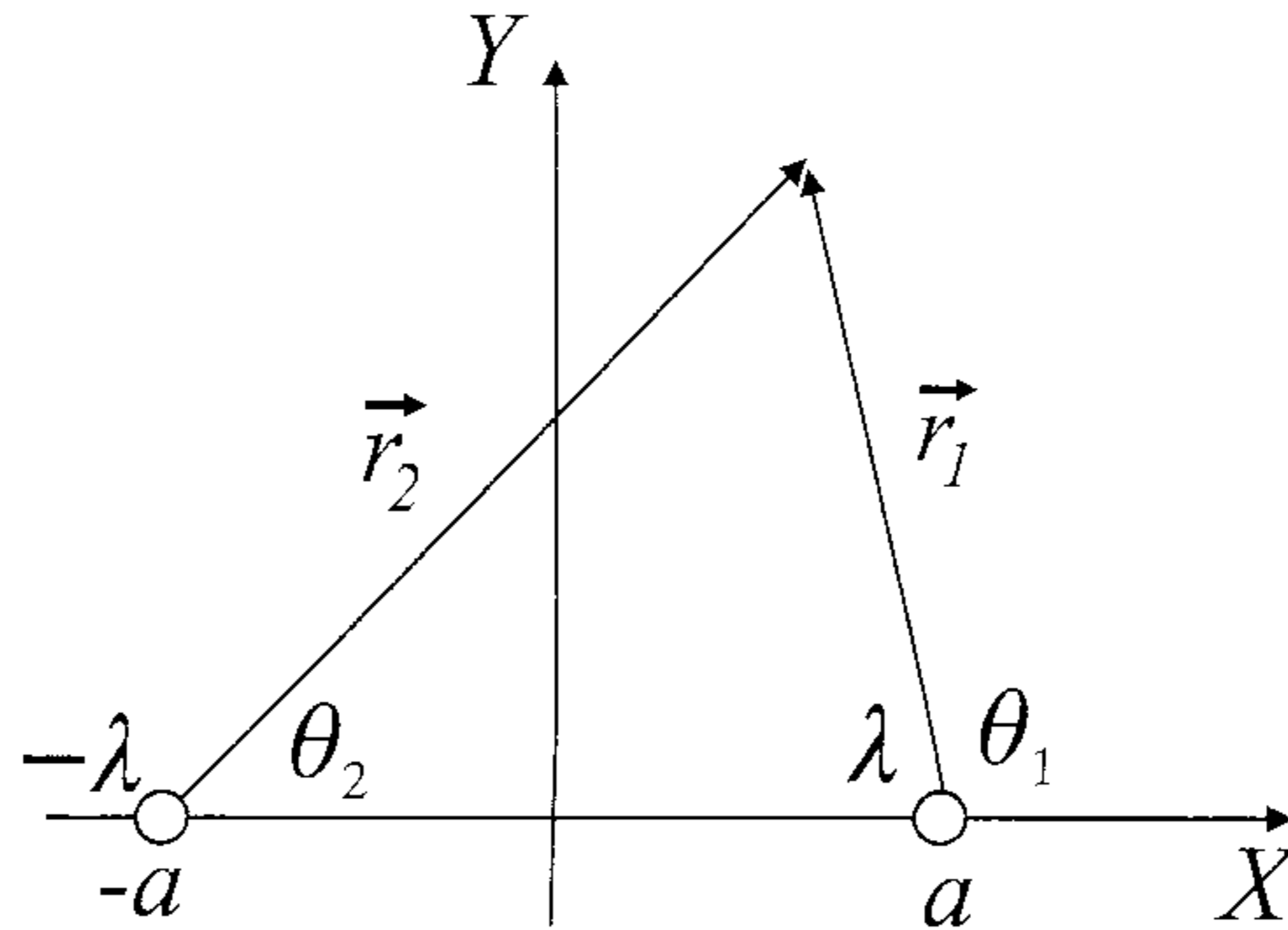
$$r^2 = K \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta$$

En la siguiente figura hemos dibujado estas líneas de fuerza.



**18. Líneas de fuerza y superficies equipotenciales para dos líneas de carga.** Consideremos dos rectas infinitas, paralelas, separadas por una

distancia  $2a$ , una con densidad de carga  $+\lambda$  y la otra  $-\lambda$ . Encuentre la ecuación de las líneas de fuerza y de las superficies equipotenciales para esta distribución.



### Solución:

Este problema es de mayor dificultad que los anteriores. Su resultado nos será útil para el cálculo, en el siguiente capítulo, de la capacidad de dos cilindros paralelos.

El sistema en cuestión tiene invarianza bajo traslaciones a lo largo de las líneas de carga. Por lo tanto basta encontrar tanto las líneas de fuerza como las superficies equipotenciales en un plano cualquiera perpendicular a las rectas de carga. Llamaremos a este plano el plano  $z = 0$ , y usaremos coordenadas cartesianas en el plano. Ubicaremos la recta con densidad  $+\lambda$  en el punto  $(a, 0)$  y la línea con densidad  $-\lambda$  en el punto  $(-a, 0)$ .

El campo producido por una línea de carga  $\lambda$  es de la forma

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (1)$$

en que  $r$  es la distancia a la línea y  $\hat{r}$  es el vector unitario en coordenadas cilíndricas a lo largo de la dirección de crecimiento de  $r$ .

Empecemos por calcular la ecuación de las líneas de fuerza. El campo producido por las dos líneas de fuerza lo podemos calcular a partir de (1), usando el principio de superposición. El campo producido por las dos líneas es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\hat{r}_1}{r_1} - \frac{\hat{r}_2}{r_2} \right)$$

o, en coordenadas cartesianas, en un punto cualquiera  $(x, y)$  del plano

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} \quad (2)$$

en que

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos \theta_2}{r_2} \right) \quad (3)$$

y

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sin \theta_1}{r_1} - \frac{\sin \theta_2}{r_2} \right) \quad (4)$$

De la figura vemos,

$$\cos \theta_1 = \frac{x - a}{r_1} \quad \text{sen } \theta_1 = y/r_1,$$

y

$$\cos \theta_2 = \frac{x + a}{r_1} \quad \text{sen } \theta_2 = y/r_2$$

Además,

$$r_1^2 = (x - a)^2 + y^2 \quad r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$$

Reemplazando estas expresiones en (3) y (4), obtenemos la siguiente ecuación para las líneas de fuerza,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{E_x}{E_y} = \frac{r_2^2(x - a) - (x + a)r_1^2}{y(r_2^2 - r_1^2)} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} - \frac{a}{y} \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) = \frac{x}{y} - \frac{a}{y} \left( \frac{x^2 + y^2 + a^2}{2ax} \right) \end{aligned}$$

es decir

$$2x \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - a^2}{y}$$

o equivalentemente

$$\frac{dx^2}{dy} = \frac{x^2 - a^2 - y^2}{y} \quad (5)$$

Definiendo la nueva variable independiente  $w$  de tal modo que  $x^2 = a^2 + yw$ , obtenemos para  $w$  la ecuación siguiente:

$$y \frac{dw}{dy} = -y$$

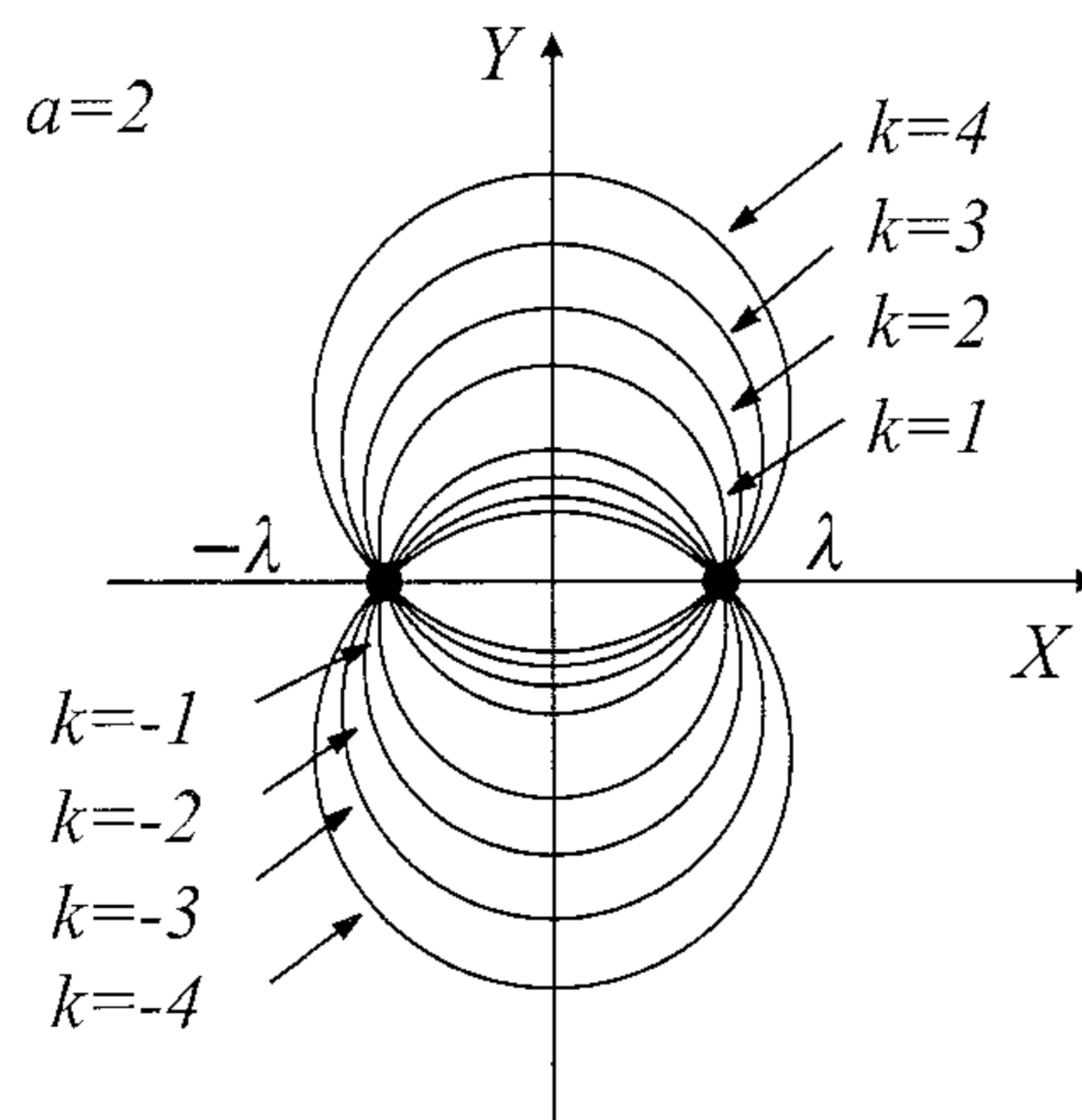
e integrando obtenemos  $w = -y + k$ , en que  $k$  es una constante. Reemplazando en la expresión de  $x^2$  obtenemos la ecuación genérica de las líneas de fuerza, (rotuladas por el parámetro  $k$ )

$$x^2 = a^2 - y^2 - ky = 0 \quad (6)$$

que se puede escribir como

$$x^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{k^2}{4}$$

Vemos entonces que las líneas de fuerza son círculos de radio  $\sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4}}$  y centro en  $(0, \frac{k}{2})$ . Todos ellos pasan por los dos puntos  $(\pm a, 0)$  en que se ubican las rectas de carga.



El potencial producido por una línea de carga  $\lambda$  se puede obtener a partir de (1) por integración directa. Así,

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad (7)$$

en que  $r_0$  es una distancia arbitraria, que sirve de nivel de referencia (i.e.,  $V(r_0) = 0$ ). Para calcular las superficies equipotenciales, usamos (7) y



el principio de superposición. La ecuación para las superficies equipotenciales es:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \tilde{c} \quad (8)$$

en que  $\tilde{c}$  es una constante que rotula las distintas superficies equipotenciales. Redefiniendo esta constante en forma apropiada podemos escribir (8) de la forma

$$\frac{r_2}{r_1} = c \quad c \geq 0 \quad (9)$$

o, en cartesianas,

$$(x^2 + y^2 + a^2)(1 - c^2) + 2ax(1 + c^2) = 0 \quad (10)$$

Esta última expresión se puede escribir como

$$\left[ x - \frac{a(1 + c^2)}{c^2 - 1} \right]^2 + y^2 = \frac{4c^2 a^2}{(1 - c^2)^2}$$

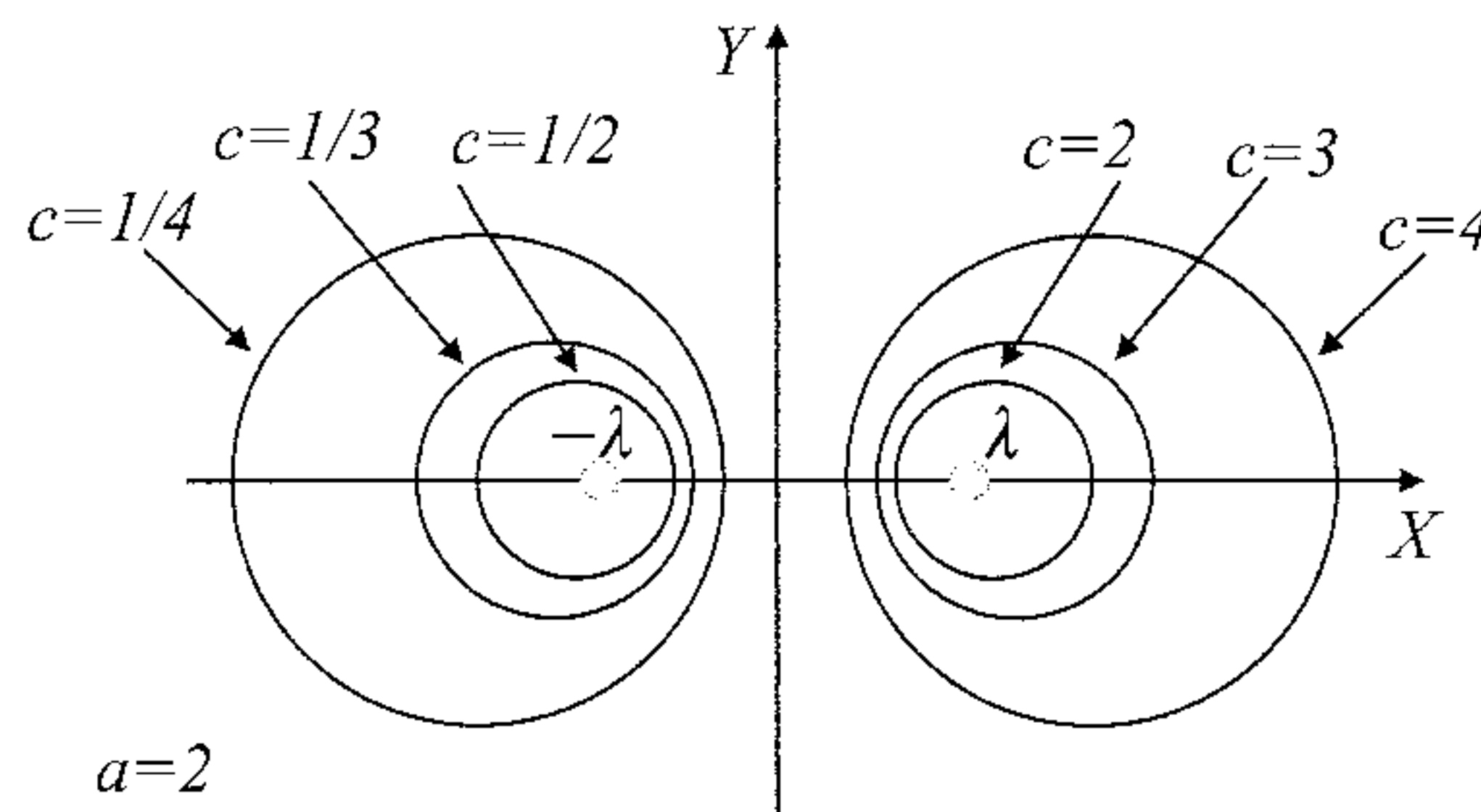
Vemos que las superficies equipotenciales son círculos, de centro en

$$\left( \frac{1 + c^2}{-1 + c^2} a, 0 \right) \quad (11)$$

y radio:

$$r = \frac{2a|c|}{|c^2 - 1|} \quad (12)$$

que hemos dibujado en la siguiente figura. Observemos que si para un valor de  $c$ ,  $c_0 < 1$ , el centro de los círculos está en el eje negativo, en el punto  $-x_0$ ; para el valor recíproco  $1/c_0$  el centro estará en  $x_0$  y tendrá el mismo radio.



**19.** Considere un par de placas conductoras planas paralelas e infinitas. La placa inferior está a potencial cero y la superior a potencial  $V_0$ . Encuentre el potencial en el espacio entre las placas resolviendo numéricamente la ecuación de Laplace.

**Solución:**

Consideremos la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 V = 0$ , en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano  $(x,y)$ . Con  $V = V(x,y)$ , esto es,

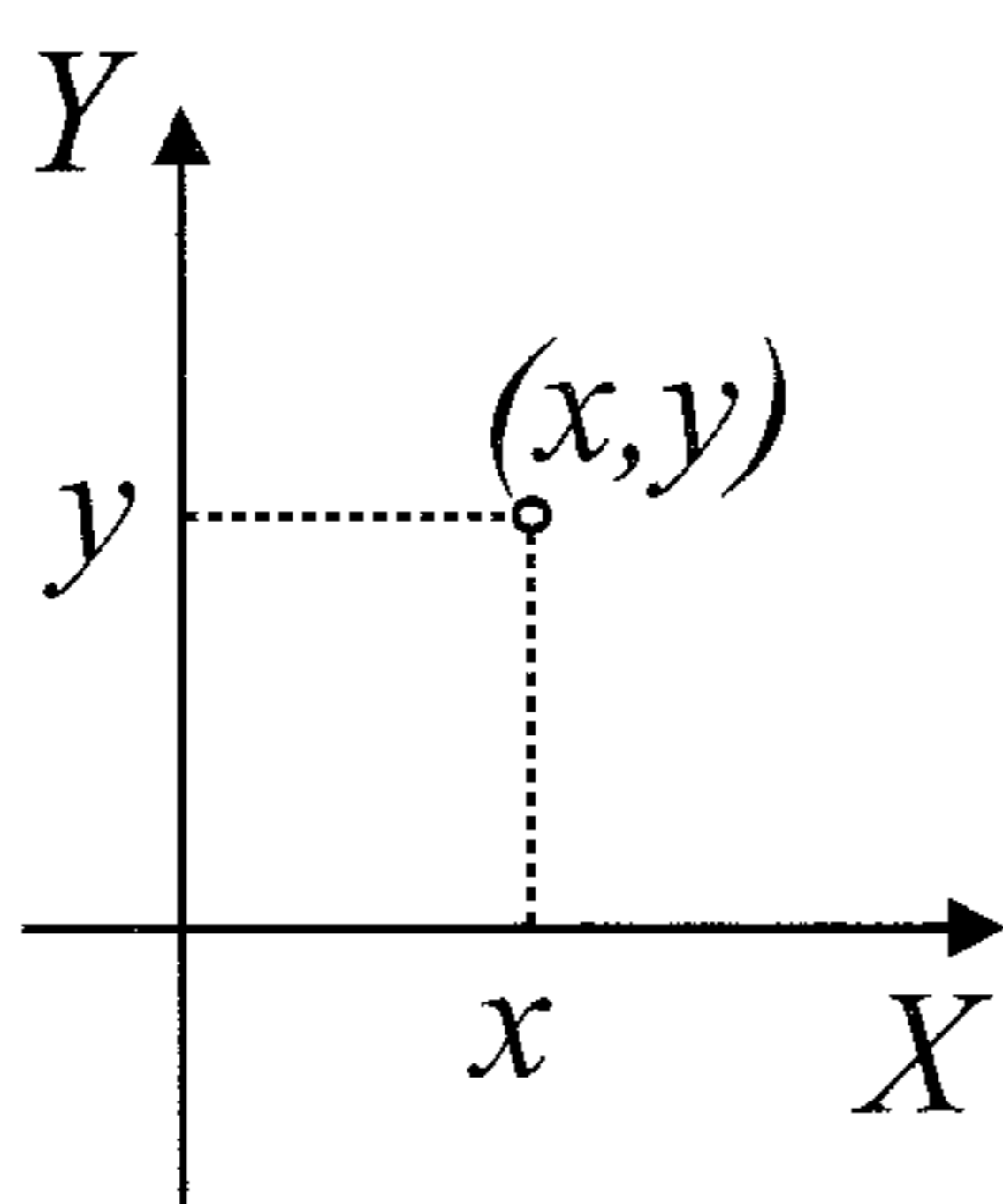
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

que se puede escribir formalmente como,

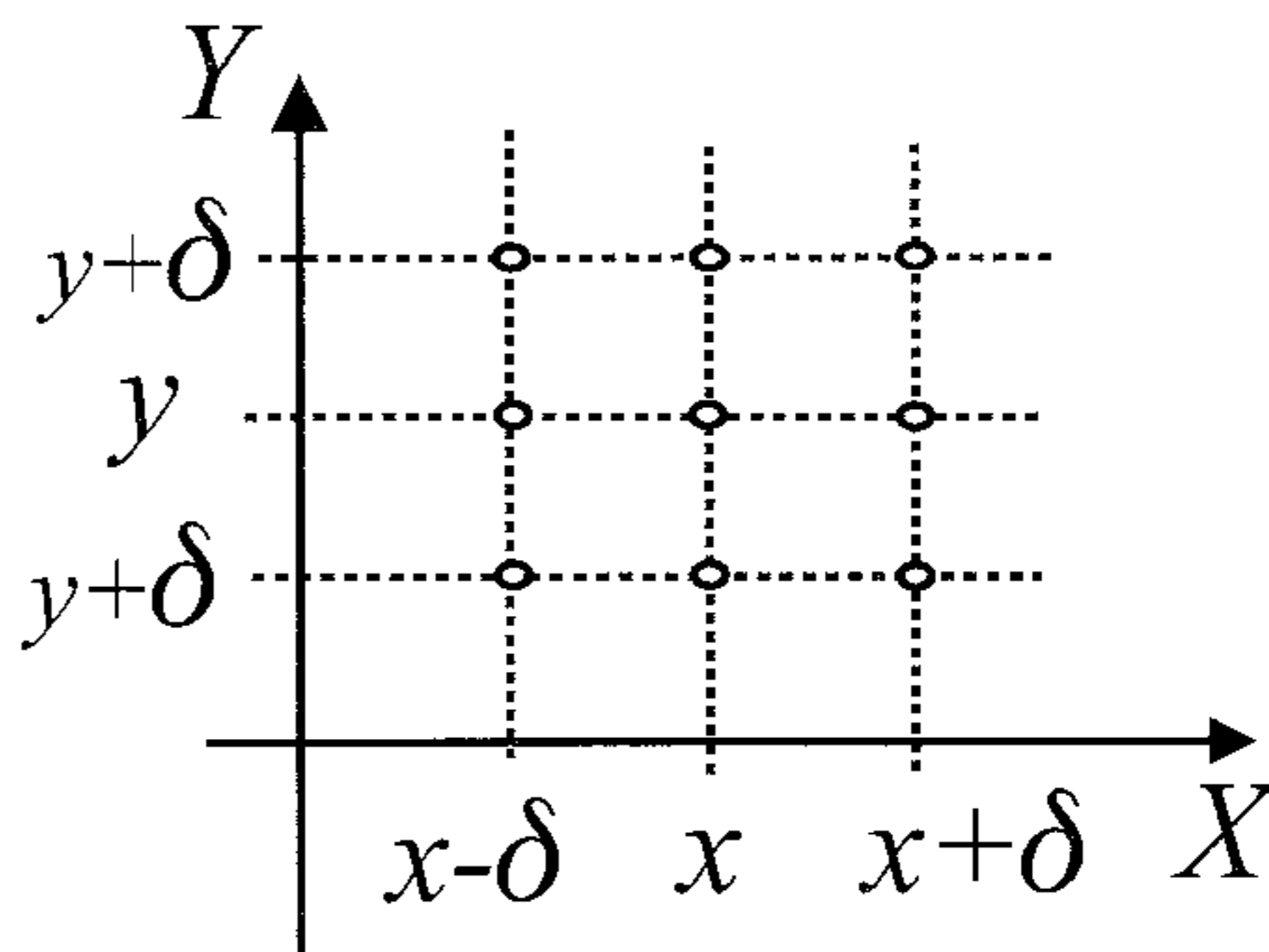
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x - \Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x + \Delta x, y)}{\Delta x} +$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{V(x, y - \Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y + \Delta y)}{\Delta y} = 0$$

Discretizando el plano  $(x,y)$ , esto es, reemplazando las variables continuas  $x$  e  $y$  por un reticulado como el que muestra la figura, en el que la separación entre puntos sucesivos es  $\Delta x = \Delta y = \delta$ , con  $\delta$  suficientemente pequeño,



*"plano x-y"*



*"reticulado x-y"*

la expresión anterior es:

$$\frac{V(x - \delta, y) - 2V(x, y) + V(x + \delta, y)}{\delta} +$$

$$\frac{V(x, y - \delta) - 2V(x, y) + V(x, y + \delta)}{\delta} \approx 0$$

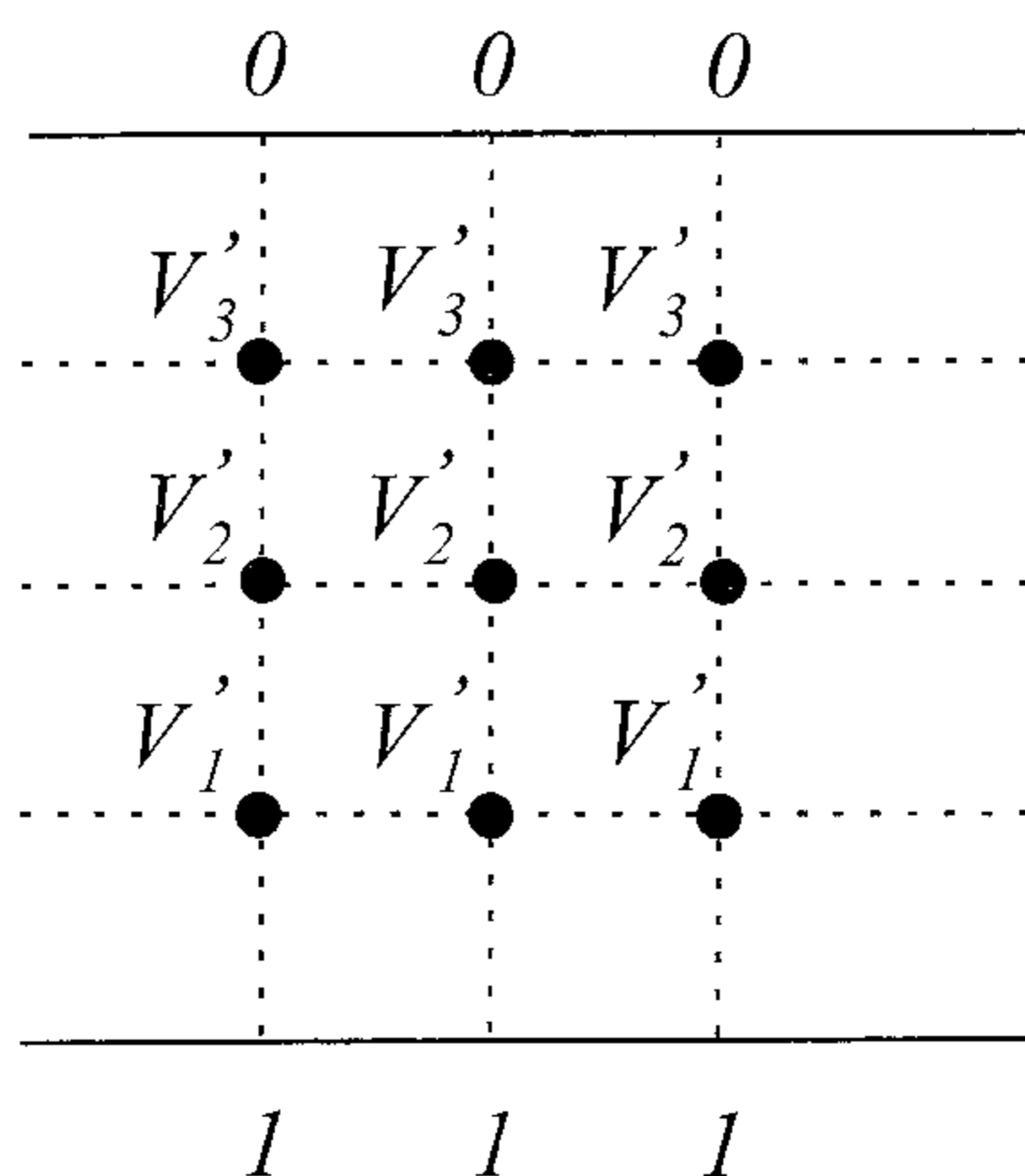
Por lo que, en primera aproximación,

$$V(x, y) \approx \frac{V(x + \delta, y) + V(x - \delta, y) + V(x, y + \delta) + V(x, y - \delta)}{4}$$

Es decir, el valor del potencial en un punto del reticulado está dado por el promedio sobre sus cuatro vecinos más cercanos.

Para el caso del condensador de placas paralelas y de extensión infinita, el potencial sólo depende de la coordenada perpendicular a la dirección de las placas. Para efectos del cálculo, basta considerar el reticulado que muestra la figura siguiente, con las condiciones de borde respectivas. Haciendo el cambio de variable,  $V' = \frac{V}{V_0}$ , expresando explícitamente el potencial como el promedio sobre los cuatro vecinos más cercanos y usando los valores fijos sobre las placas (condiciones de borde), se obtienen las siguientes expresiones:

$$V'_1 = \frac{V'_2}{2} + \frac{1}{2}, \quad V'_2 = \frac{V'_1 + V'_3}{2}, \quad V'_3 = \frac{V_2}{2}$$



Para obtener los valores de  $V'_1$ ,  $V'_2$  y  $V'_3$ , se dan valores iniciales arbitrarios y se recalculan iterativamente, hasta alcanzar la precisión deseada. La tabla 1 muestra el resultado de 10 iteraciones, partiendo con valores iniciales  $V'_i = 1.0$ . La penúltima fila de la tabla incluye los valores exactos del potencial en los puntos del reticulado, usando la solución analítica de la ecuación de Laplace para este caso:

$$V(y) = \frac{y}{D}$$

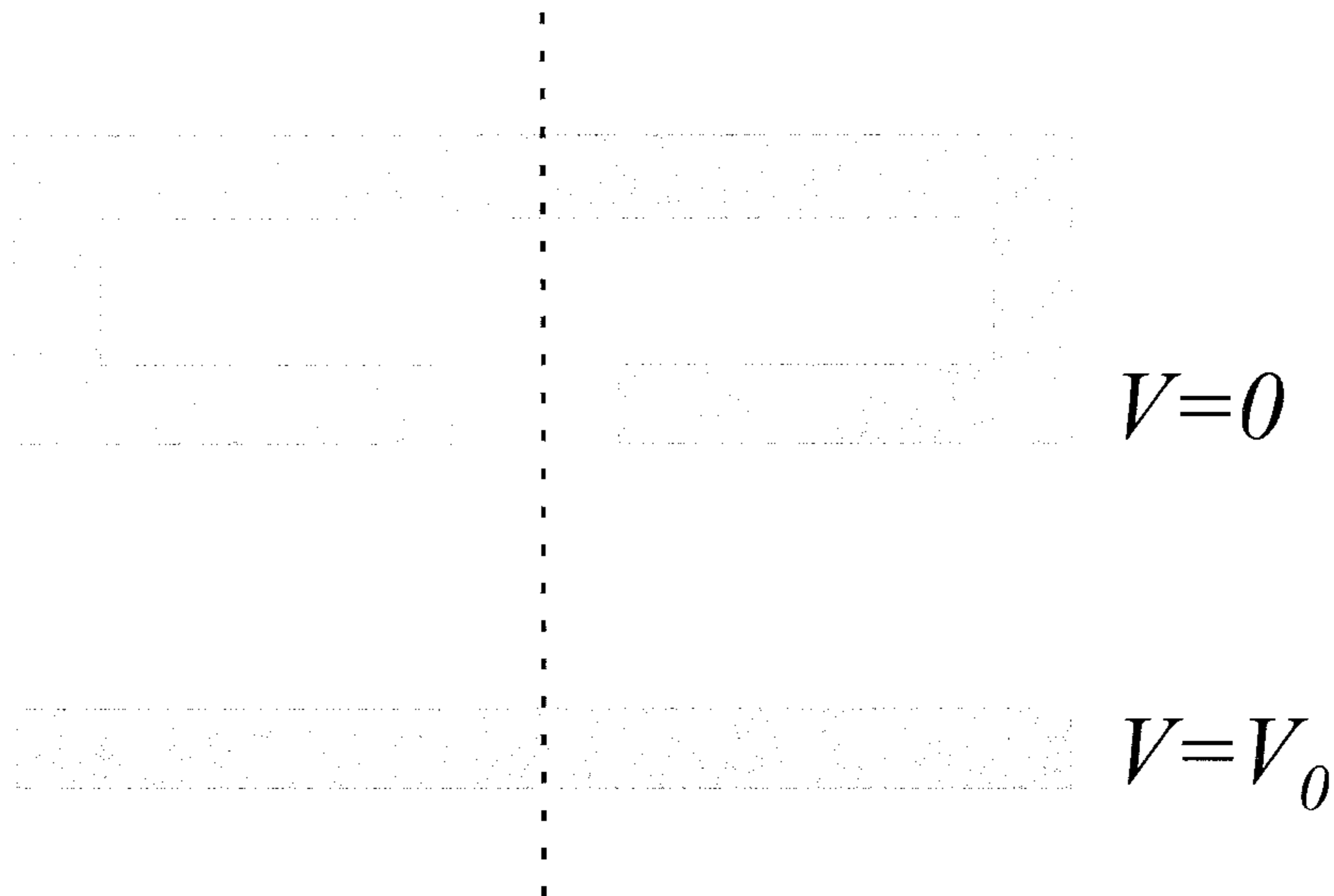
donde  $D$  es la separación entre placas, con condiciones de borde  $V(0) = 0$  y  $V(D) = 1.0$ .

La última fila corresponde al error porcentual del resultado obtenido con diez iteraciones, relativo al valor exacto.

Tabla 1: Iteraciones sucesivas para el cálculo numérico del potencial

$n$	$V'_1$	$V'_2$	$V'_3$
1	1.0000000	1.0000000	1.0000000
2	0.5000000	0.7500000	0.8750000
3	0.3750000	0.6250000	0.8125000
4	0.3125000	0.5625000	0.7812500
5	0.2812500	0.5312500	0.7656250
6	0.2656250	0.5106250	0.7553125
7	0.2553125	0.5053125	0.7526562
8	0.2526562	0.5026562	0.7513281
9	0.2513281	0.5013281	0.7506640
10	0.2506640	0.5006640	0.7503320
$V(y)$	0.2500000	0.5000000	0.7500000
$\Delta V_i/V(y)$	0.26 %	0.13 %	0.04 %

20. Encuentre equipotenciales en un sistema de dos conductores con simetría cilíndrica, como el que muestra la figura, en que el conductor superior se encuentra a potencial  $V = 0$  y el inferior a potencial  $V = V_0$ .



### Solución:

Para resolver el problema numéricamente se puede usar una planilla computacional de cálculo, con capacidad de resolver fórmulas con referencia circular (Excel<sup>tm</sup>, Lotus<sup>tm</sup> o Quattro<sup>tm</sup>). El método de solución es el siguiente:

- i) Cada celda de la planilla de cálculos corresponde a un nodo del reticulado usado para resolver numéricamente la ecuación de Laplace.
- ii) Cada celda es definida como el promedio sobre las cuatro celdas vecinas.
- iii) Las celdas que corresponden a la región de los conductores se fijan al potencial dado por las condiciones de borde.
- iv) Por la simetría cilíndrica, sólo es necesario resolver en un lado de la configuración. En este caso usaremos el lado derecho.



Como ejemplo, las expresiones correspondientes al potencial en las celdas individualizadas son las siguientes:

$$V_{51} = \frac{2V_{52} + V_{41} + V_{61}}{4}$$

$$V_{65} = \frac{V_{64} + V_{66} + V_{75}}{4}$$

$$V_{74} = \frac{V_{73} + V_{75} + V_{64} + V_{84}}{4}$$

$$V_{88} = V_{87}$$

vi) Se calcula la planilla circularmente, iterando el cálculo tantas veces como sea necesario como para alcanzar la precisión deseada. Esta última se fija imponiendo que la variación de toda las celdas entre una iteración y la siguiente sea menor que un cierto valor dado.

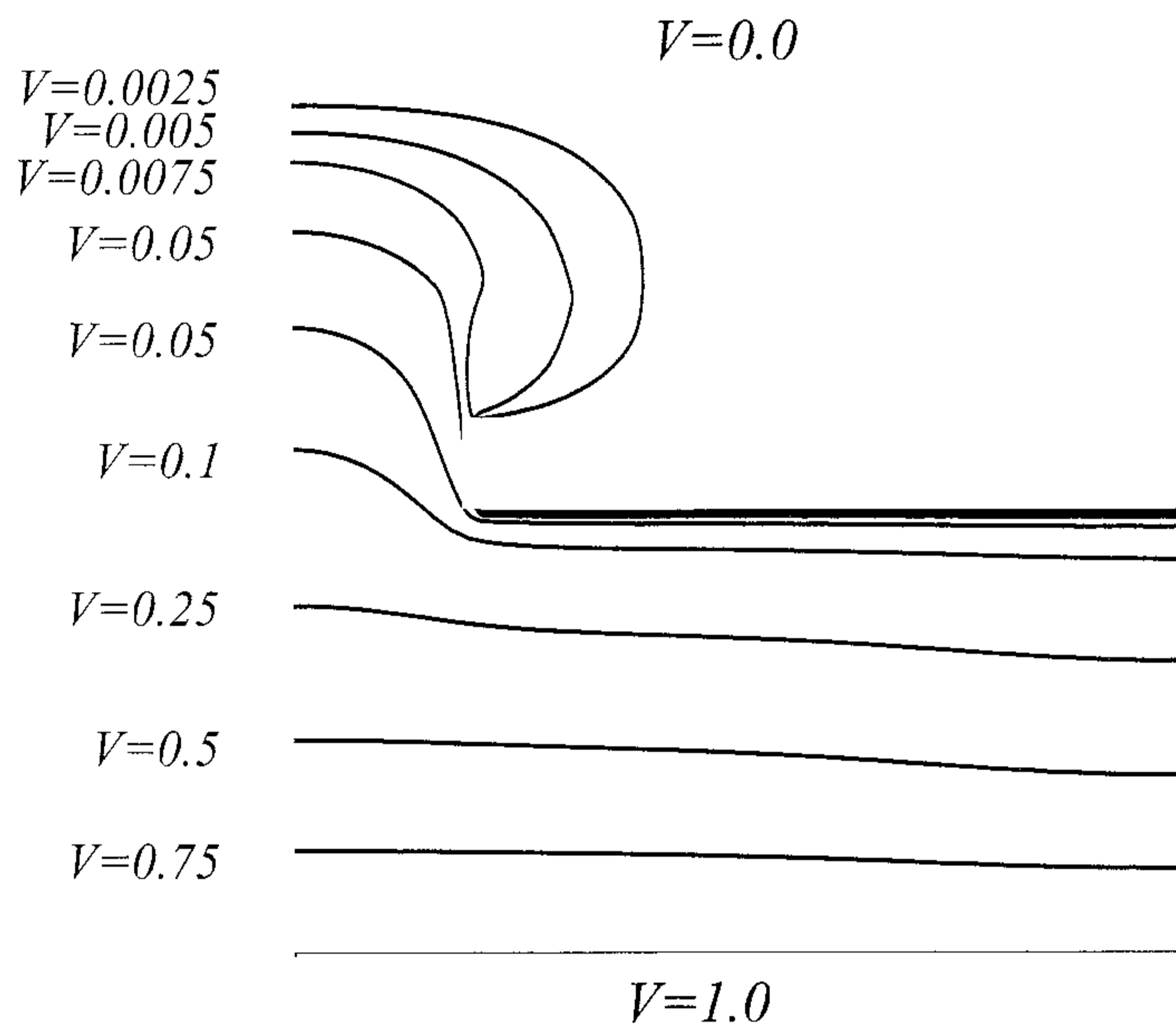
Terminado el cálculo del potencial, esto es, resuelta numéricamente la ecuación de Laplace con la condiciones de borde respectivas, se procede al cálculo de las equipotenciales. Estas se obtienen por interpolación lineal entre los valores de las celdas axialmente vecinas al valor de la equipotencial buscada. Si  $V$  representa el valor del potencial para el cual se quiere encontrar la curva equipotencial correspondiente, ésta se encuentra usando el siguiente algoritmo:

I) Para cada posición radial definida por la coordenada  $x_i$  se buscan valores del potencial a lo largo de la dirección  $y_j$ , tal que  $V_{ij} < V \leq V_{ij+1}$

II) La posición correspondiente a la equipotencial  $V$  en  $x = x_i$  se encuentra mediante interpolación lineal usando la expresión:

$$y = \frac{V - V_{ij}}{V_{ij+1} - V_{ij}}(y_{j+1} - y_j) + y_j$$

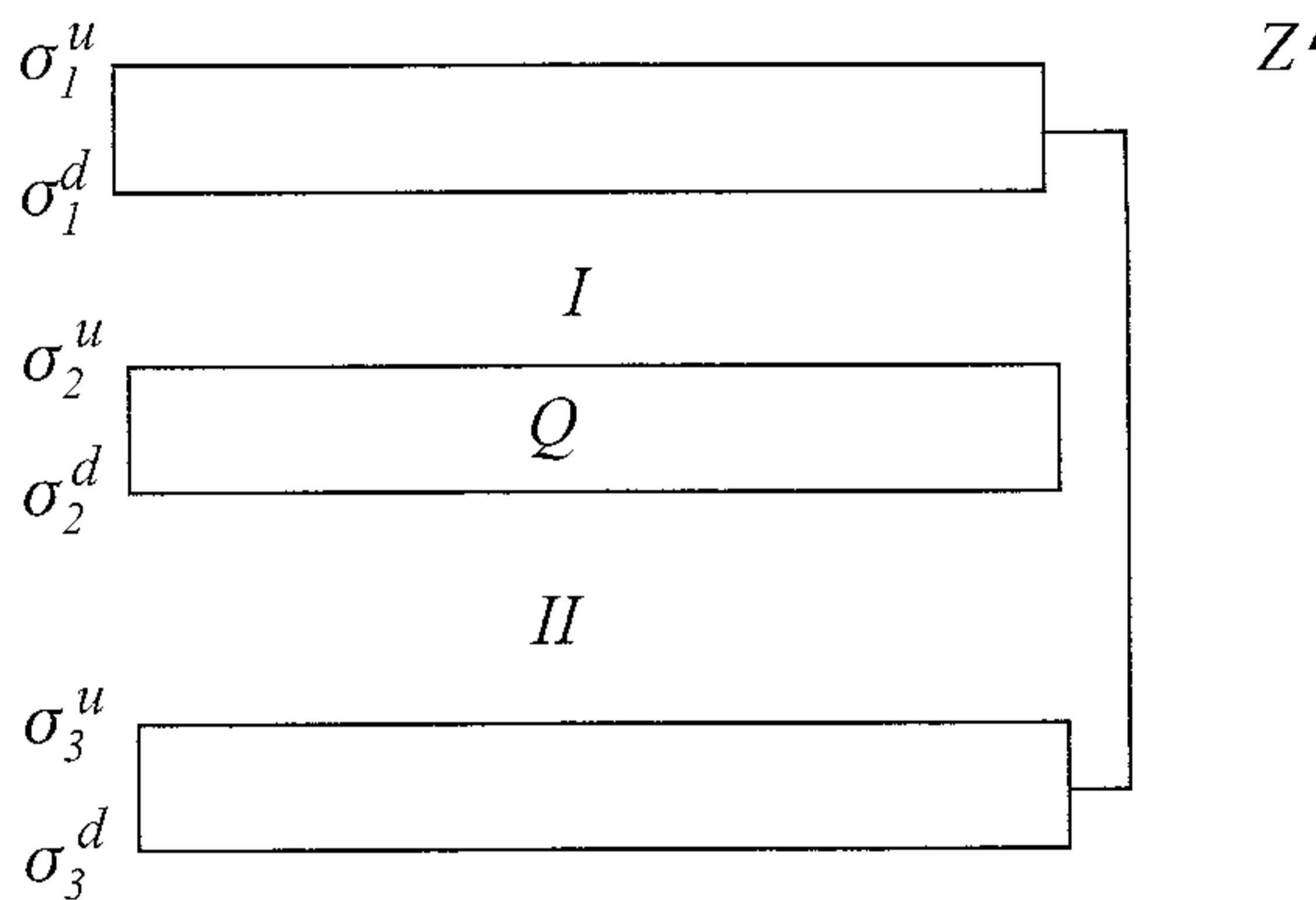
La figura siguiente muestra un cálculo de equipotenciales para el problema propuesto, usando un reticulado de 52x50 celdas. El cálculo fue realizado con Excel<sup>tm</sup>, alcanzando una precisión de 0.1 %, en 240 iteraciones.





## 4. Conductores

1. Tres placas conductoras paralelas, muy grandes, se colocan como en la figura. Las placas externas están conectadas y la placa central tiene carga  $Q$ . Determine la carga en cada una de las caras de las placas.



### Solución:

Dibujamos las placas poniendo en evidencia su espesor. Llamemos  $\sigma_i^u$ ,  $i = 1, 2, 3$  a la densidad en la cara superior de cada placa y  $\sigma_i^d$  a las densidades en las caras inferiores. Elijamos el eje  $z$  como en la figura. Sabemos que el campo eléctrico creado por placas planas es uniforme y

tiene dirección  $\hat{z}$ . El campo en la región I es constante, el campo en la región II también es constante, aunque posiblemente adopte otro valor, y en el interior de los conductores el campo es cero. Por esto, aplicando el teorema de Gauss sobre un cilindro cuyas tapas están en el interior de las placas 1 y 2 concluimos que  $\sigma_1^d = -\sigma_2^u$ . Con un cilindro cuyas tapas están en el interior de 2 y 3 concluimos que  $\sigma_2^d = -\sigma_3^u$ . Llamemos  $\sigma = \sigma_2^u$  y  $\tilde{\sigma} = \sigma_3^u$ . Las incógnitas entonces son solamente 4. Nos dicen que la carga total de la placa central es  $Q$ . Esto significa que:

$$\sigma A + (-\tilde{\sigma})A = Q \quad (1)$$

Por otra parte, como las placas externas están conectadas y no tienen carga, la carga total de ellas es nula (como están conectadas se puede transferir carga de una a otra por lo que no es cada una neutra, sino que en conjunto). Esto implica que:

$$(\sigma_1^u - \sigma)A + (\tilde{\sigma} + \sigma_3^d)A = 0$$

que usando (1) se puede reducir a:

$$\sigma_1^u + \sigma_3^d = \frac{Q}{A}. \quad (2)$$

Además la diferencia de potencial entre ellas debe ser cero, ya que están conectadas. Sabemos que el campo en la superficie de un conductor es igual a  $(\sigma/\epsilon_0)\hat{n}$ , en que  $\sigma$  es su densidad de carga superficial y  $\hat{n}$  la normal a su superficie. En este problema dado que sabemos que el campo es constante en cada región, debe cumplirse que:

$$\vec{E}_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{II} = \frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0}\hat{z}$$

La condición que la diferencia de potencial entre las placas externas sea cero es entonces,

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0}d_1 + \frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0}d_2 = 0. \quad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (3) obtenemos el valor de  $\sigma$  y  $\tilde{\sigma}$ . Resulta:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \frac{d_2}{d_1 + d_2} \quad \text{y} \quad \tilde{\sigma} = \frac{Q}{A} \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

Falta por determinar  $\sigma_1^u$  y  $\sigma_3^d$  para lo cual disponemos de la ecuación (2). La condición que falta la obtendremos al calcular el campo en cualquier punto como la superposición de placas cargadas. Por ejemplo, el campo en el interior del conductor central es, calculado de esta forma:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_3^d}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{\tilde{\sigma}}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{-\tilde{\sigma}}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_1^u}{2\epsilon_0}(-\hat{z}) = 0$$

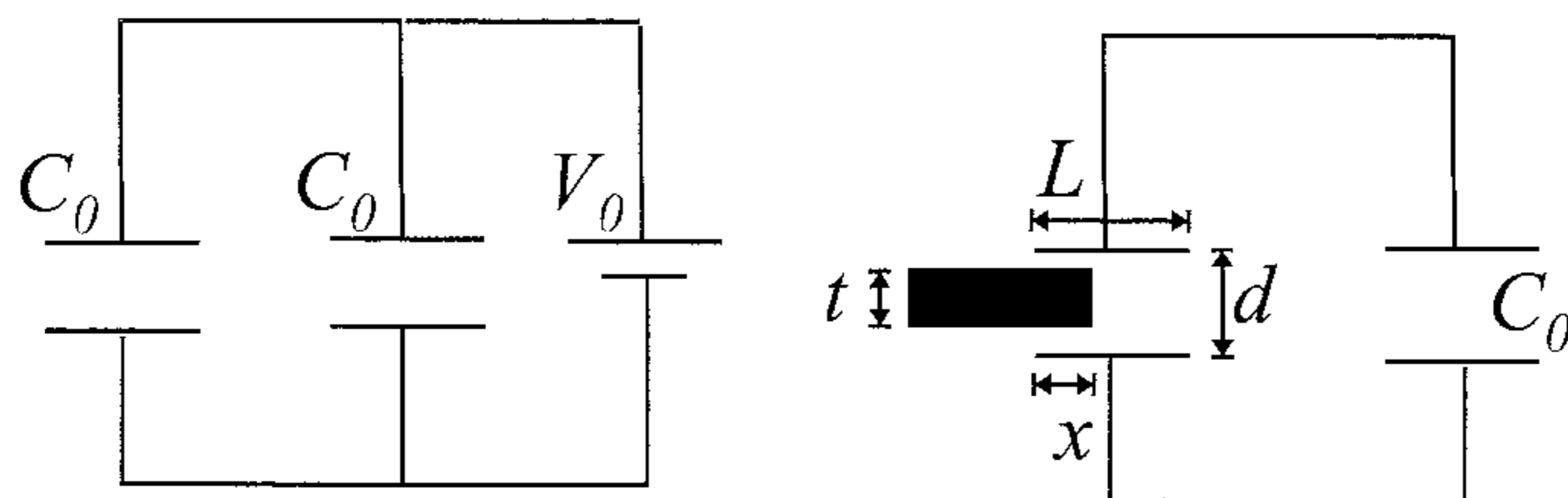
lo cual implica que

$$\sigma_3^d - \sigma_1^u = 0 \quad (4)$$

Esta última ecuación, junto a (2) implican que

$$\sigma_3^d = \sigma_1^u = \frac{Q}{2A}.$$

**2.** Dos condensadores planos idénticos, de área  $A$  y separación entre las placas  $d$ , inicialmente descargados, se conectan en paralelo. Mediante una batería se les aplica una diferencia de potencial  $V_0$ . Luego se desconecta la batería quedando los condensadores cargados y aislados (todavía conectados en paralelo). Se introduce en uno de los condensadores una placa conductora, de igual área y espesor  $t$ , una distancia  $x$  como se ve en la figura. Calcule, como función de  $x$ , la carga final de cada condensador y la energía almacenada en el sistema.



### Solución:

Llamemos  $C_0$  a la capacidad de los condensadores. En este caso, son de caras paralelas por lo que  $C_0 = \epsilon_0 A/d$ . Llamemos  $L$  y  $H$  a la dimensión de las placas de modo que  $A = HL$ . Al conectar los condensadores en paralelo a una batería cada uno adquiere carga  $Q_0 = C_0 V_0$ . Una vez

desconectados de la batería, al introducir la placa metálica, habrá movimiento de carga entre los condensadores ya que tendrán distinta capacidad pero igual diferencia de potencial. Llamemos  $Q'$  a la nueva carga del condensador al que se le introdujo la placa,  $Q$  la nueva carga del que no se altera y  $C'$  a la capacidad del condensador al que se le introduce la placa. Por conservación de la carga sabemos que

$$2Q_0 = Q + Q' \quad (1)$$

y, como están en paralelo, la diferencia de potencial en ambos es igual, esto es:

$$\frac{Q}{C_0} = \frac{Q'}{C'} \quad (2)$$

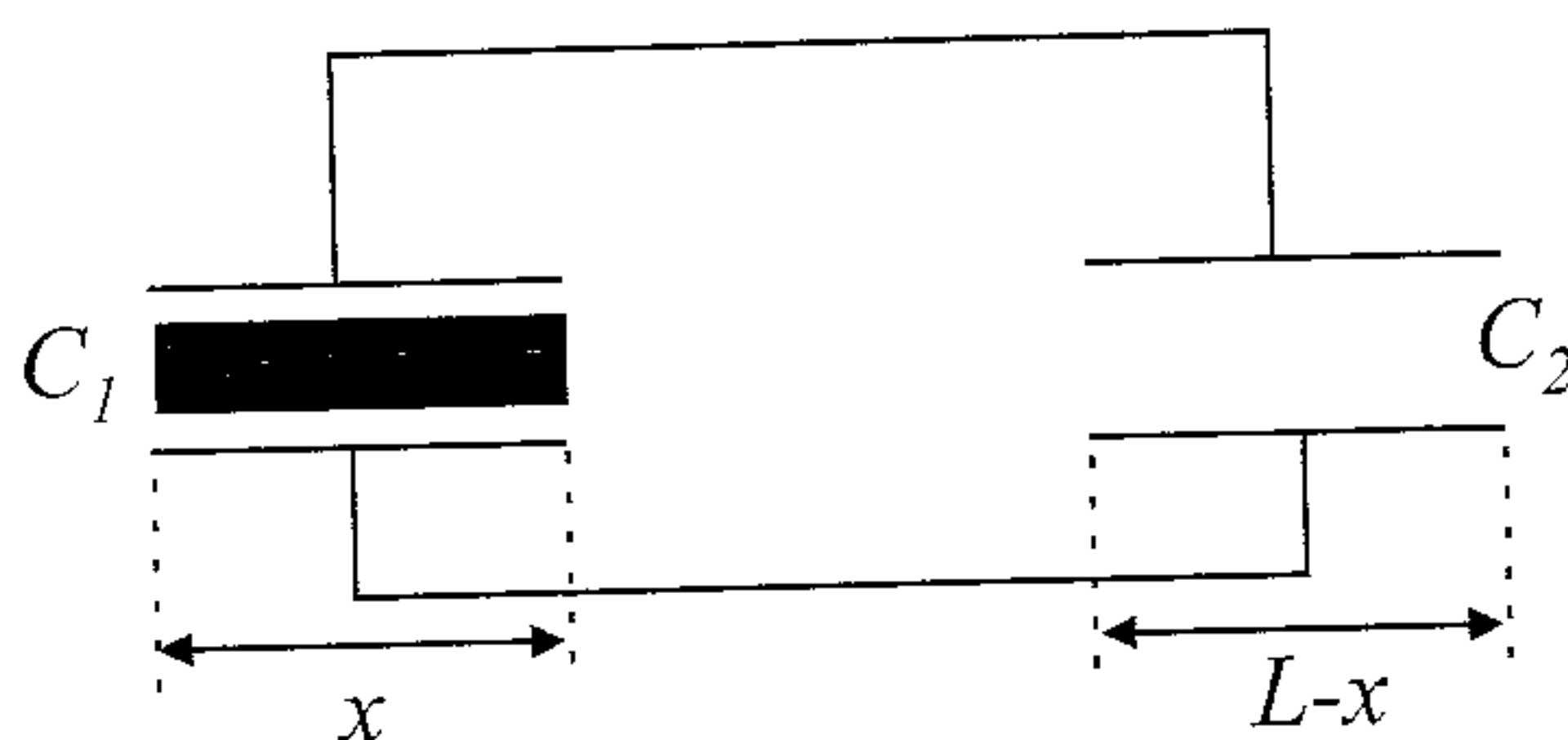
De estas dos ecuaciones podemos calcular  $Q$  y  $Q'$ . Resulta:

$$Q = \frac{2Q_0}{1 + \frac{C'}{C_0}}, \quad (3)$$

y

$$Q' = \frac{C'}{C_0} \frac{2Q_0}{1 + \frac{C'}{C_0}} = \frac{C'}{C_0} Q. \quad (4)$$

Necesitamos calcular el valor de  $C'$  para determinar el valor final. Consideraciones físicas nos permiten adelantar el resultado. El efecto de introducir la placa es reducir el espacio lo cual aumenta la capacidad, por lo que debe ser  $C' > C_0$  y por lo tanto  $Q' > Q$ . El condensador con la



placa adicional se puede ver como dos condensadores en paralelo (ya que sus caras están a igual potencial) con capacidades

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 H x}{d - t} \quad y \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 H (L - x)}{d}$$

La capacidad equivalente  $C'$  es, entonces,

$$C' = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d(d-t)} \left[ (d-t) + t \frac{x}{L} \right] = C_0 \left[ 1 + \frac{t}{d-t} \frac{x}{L} \right]$$

que, efectivamente, es mayor que  $C_0$ . Definamos,

$$s = \frac{t}{d-t} \frac{x}{L}.$$

de modo que  $C' = C_0(1+s)$ . Reemplazando en (3) y (4) encontramos las nuevas cargas. La carga en el condensador al que se le introdujo la placa es:

$$Q' = (1+s) \frac{Q_0}{1+s/2}$$

en tanto que la del que no fue alterado es:

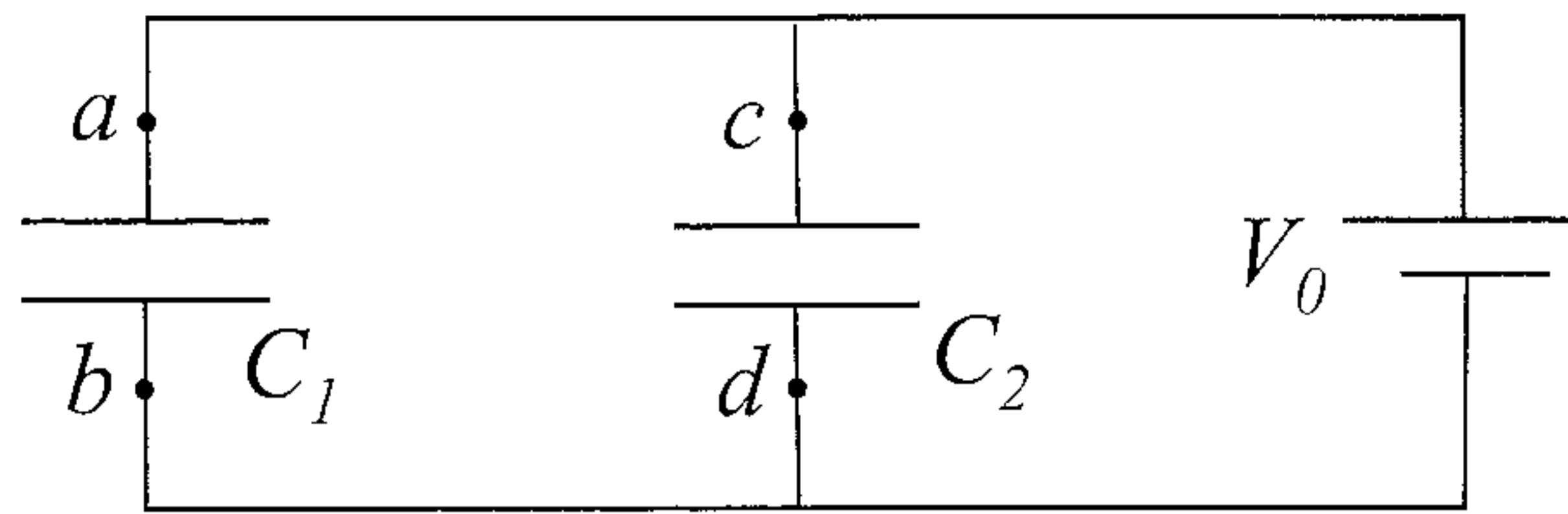
$$Q = \frac{Q_0}{1+s/2}.$$

La energía final almacenada en los dos condensadores es

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} + \frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C'} = \frac{Q_0^2}{C_0(1+s/2)}.$$

Esta energía es menor que la inicial ya que al transferirse carga de un condensador a otro se disipa parte de la energía.

**3.** Dos condensadores descargados, de capacidades  $C_1$  y  $C_2$  se conectan en paralelo con una batería que entrega una diferencia de potencial  $V_0$ . Luego se desconectan, sin perder su carga, y se conectan de modo que la placa positiva del primer condensador quede conectada a la placa negativa del segundo condensador y viceversa (ya no hay batería). Calcule la nueva carga en cada placa de los condensadores.

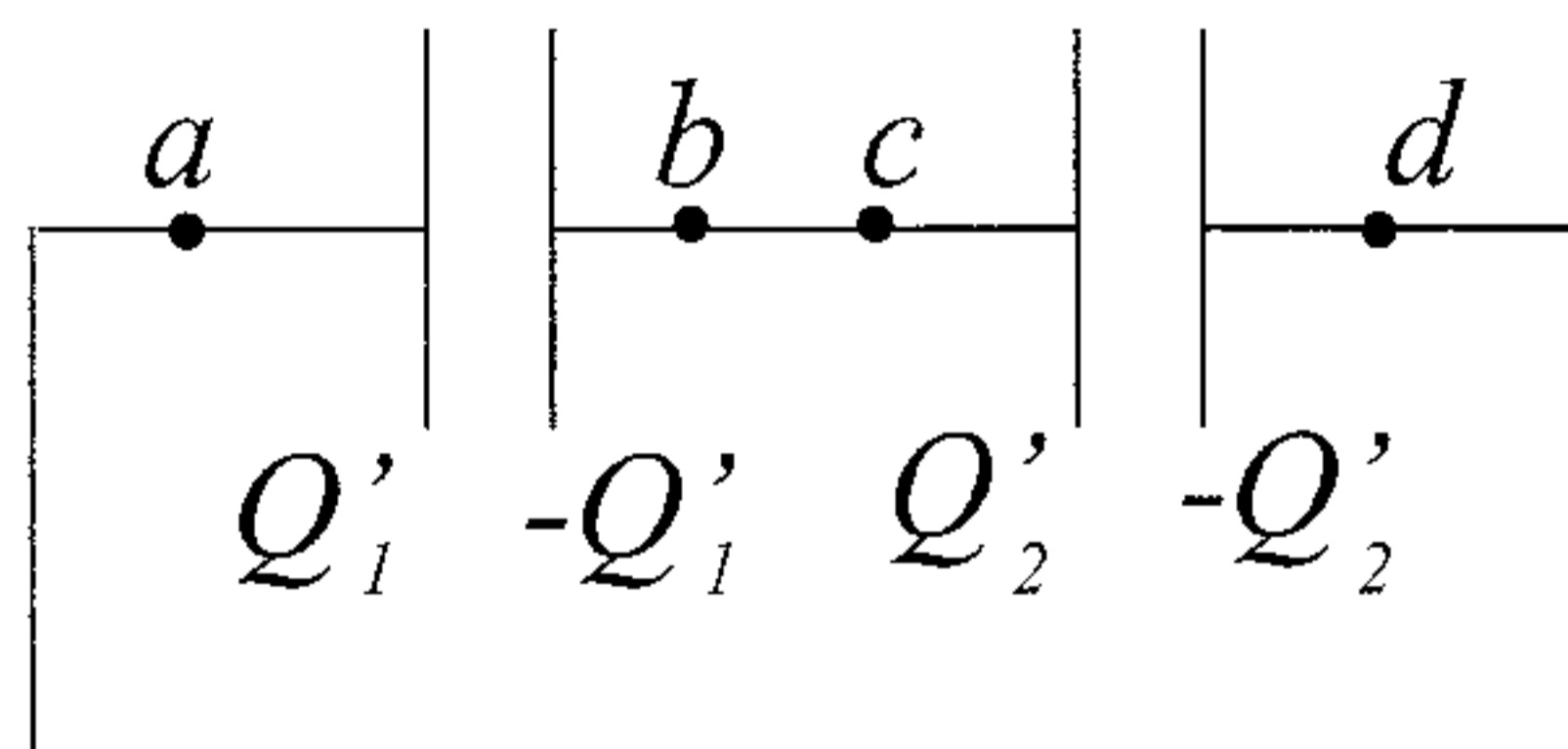
**Solución:**

Al conectarse a la batería los condensadores se cargarán. Los condensadores adquirirán la carga

$$Q_1 = C_1 V_0 \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V_0$$

respectivamente.

Al desconectarse de la batería y reconectarse como se indica en la figura, la carga en cada tramo se redistribuirá, pero la cantidad total de carga se conservará. El lado A anteriormente tenía carga  $Q_1$ , el lado B carga  $-Q_1$ , el lado C carga  $Q_2$  y el lado D carga  $-Q_2$ .



Llamemos  $Q'_1$  a la nueva carga en  $C_1$  y  $Q'_2$  a la nueva carga en  $C_2$ . La conservación de carga en las caras A y D (o B y C) es:

$$Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2$$

Por otra parte, como están conectados formando un circuito cerrado, la diferencia de potencial al recorrer el circuito completo es cero. Esto es:

$$\frac{Q'_1}{C_1} + \frac{Q'_2}{C_2} = 0$$

Estas dos ecuaciones nos permiten calcular  $Q'_1$  y  $Q'_2$ . Resulta:

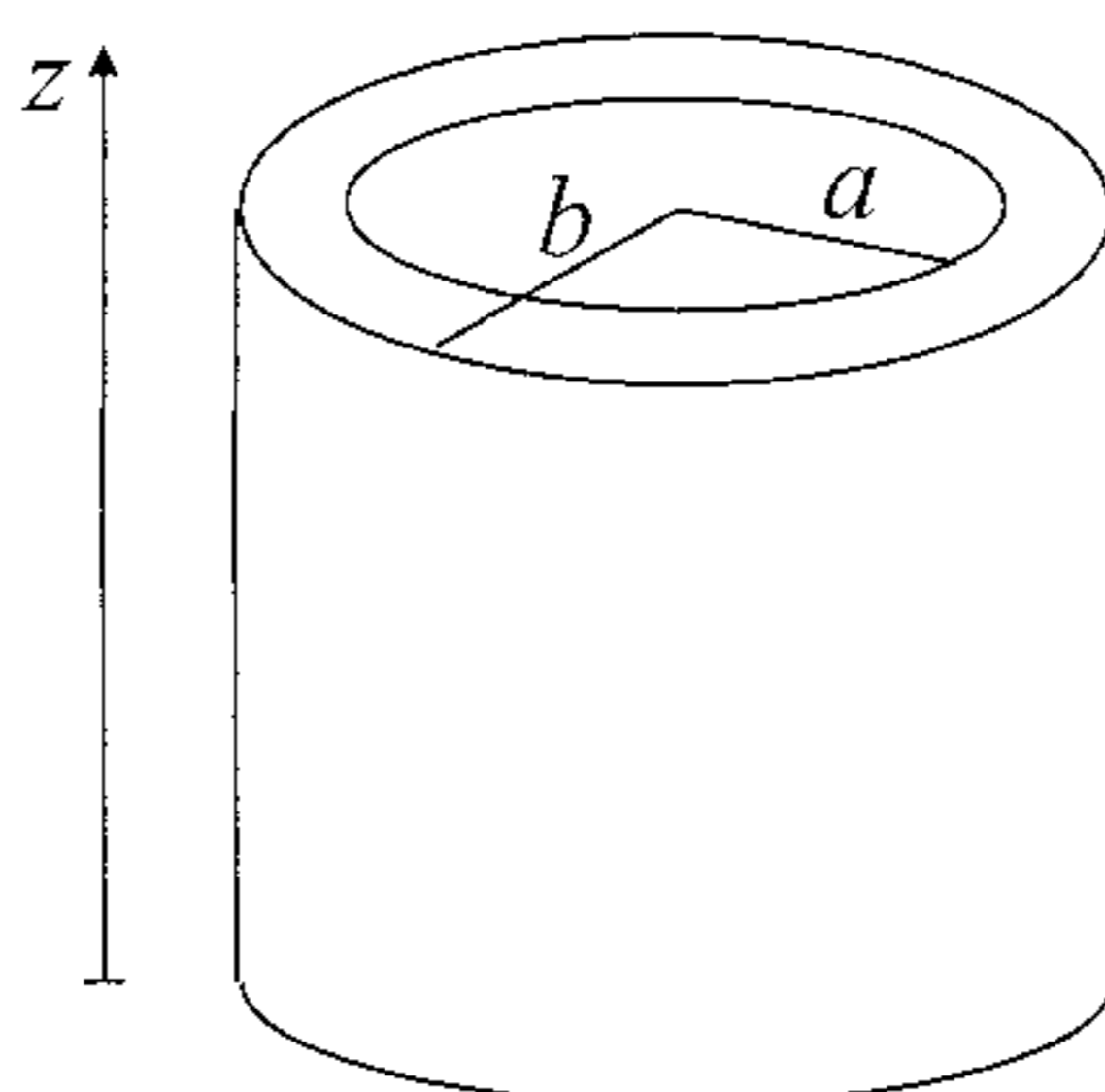
$$Q'_1 = \frac{C_1(C_1 - C_2)V_0}{C_1 + C_2}$$

y,

$$Q'_2 = \frac{C_2(C_1 - C_2)V_0}{C_1 + C_2}$$

Obviamente si los dos condensadores tienen igual capacidad, al conectarlos de esta forma se descargan completamente.

4. Un condensador coaxial está formado por dos cilindros conductores concéntricos de radios  $a$  y  $b$  respectivamente y largo  $L$ . Suponiendo que el espacio entre los conductores es vacío y que el cilindro interior se encuentra a potencial  $V = V_0$  y el exterior a potencial  $V = 0$  y que tanto  $a$  como  $b$  son mucho menores que  $L$ , encuentre la capacidad del condensador coaxial.



### Solución:

Dada la simetría de la configuración, conviene elegir coordenadas cilíndricas de modo que el eje  $z$  coincida con el eje de los cilindros conductores. Como  $L$  es mucho mayor que  $b$ , podemos despreciar los efectos de borde. Entonces, es una muy buena aproximación suponer que el campo eléctrico en el interior del condensador es de la forma:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \quad (1)$$

Si llamamos  $Q$  a la carga total depositada en el conductor de radio  $a$ , usando el teorema de Gauss podemos encontrar  $E(r)$  de inmediato para  $a < r < b$ . En efecto,

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \quad (2)$$

La diferencia de potencial entre los condensadores es:

$$V_0 = V(a) - V(b) = + \int_a^b E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3)$$

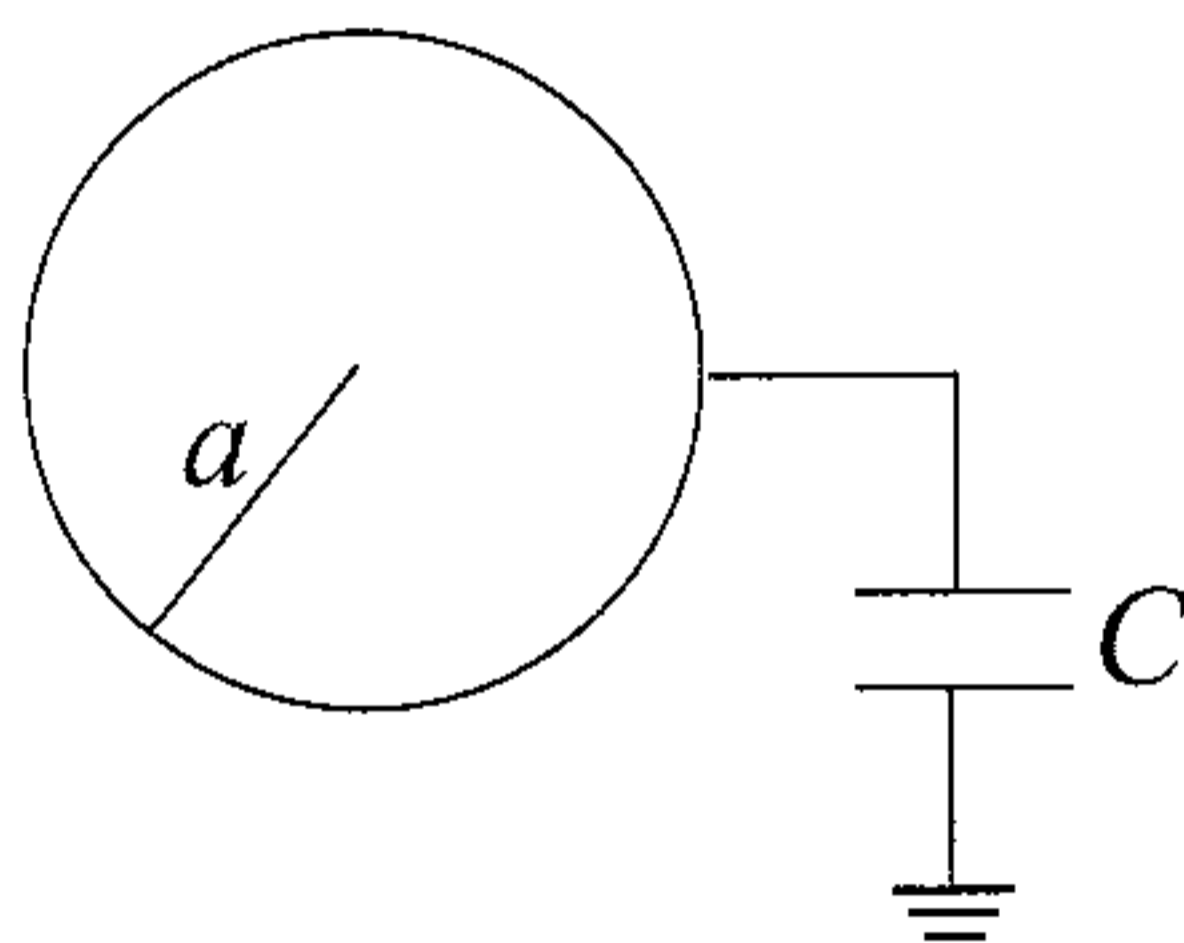
De (3) tenemos finalmente que la capacidad está dada por:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

5. Una esfera de radio  $a$  se carga a potencial  $V_0$  y se aísla. Posteriormente se conecta con la tierra a través de un condensador cuya capacidad es  $C$ . (Por definición la tierra está a potencial cero independientemente de la carga que adquiera).

a) Calcule el potencial final de la esfera y la carga en la esfera y el condensador.

b) ¿Cuánta energía se disipó al hacer la conexión a tierra?



### Solución:

La carga inicial de la esfera la podemos conocer ya que se nos da como dato el potencial y el radio de la esfera. El potencial de una esfera conductora cargada es  $V = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$  por lo que la carga inicial de la esfera es:

$$Q_i = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

Luego de conectar el condensador a tierra la esfera queda con carga  $Q_f$  y potencial  $V$ , el condensador adquiere carga  $Q_c$  y como está conectado a la esfera tiene su mismo potencial. No hay paso de carga a tierra porque la carga no atraviesa el condensador. Por lo tanto tenemos que

$$Q_c + Q_f = Q_i, \quad Q_c = CV, \quad \text{y} \quad Q_f = 4\pi\epsilon_0 a V.$$



De estas tres ecuaciones podemos determinar las tres incógnitas  $Q_c$ ,  $Q_f$  y  $V$ .

Resolviendo encontramos,

$$V = \frac{4\pi\epsilon_0 a V_0}{C + 4\pi\epsilon_0 a}$$

$$Q_f = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 V_0}{C + 4\pi\epsilon_0 a}$$

y

$$Q_c = \frac{4\pi\epsilon_0 a C V_0}{C + 4\pi\epsilon_0 a}$$

b) La energía inicial del sistema es la energía almacenada en el campo eléctrico de la esfera cargada

$$E_i = \frac{1}{2} \frac{Q_i^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

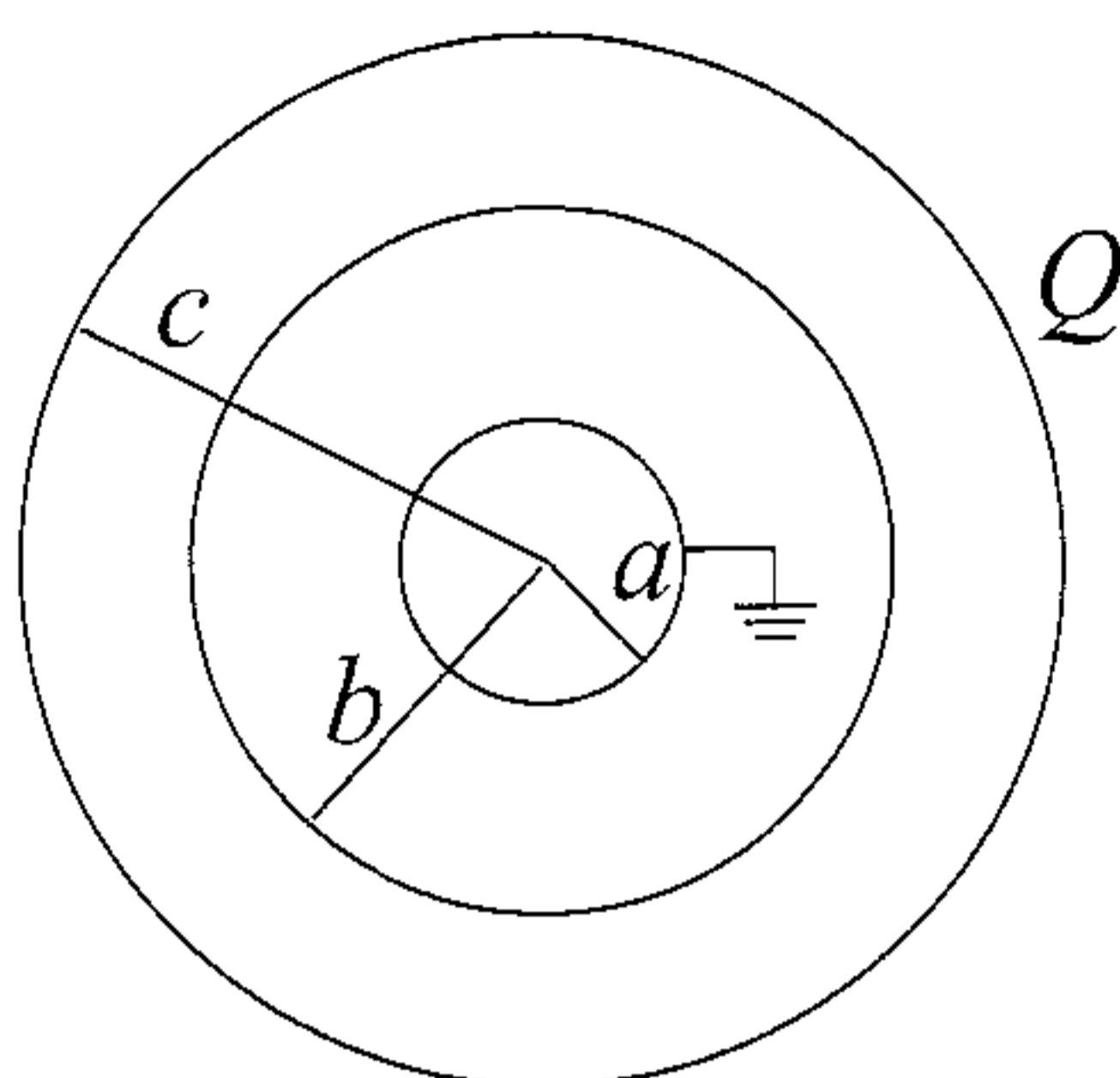
y la energía final es la energía almacenada en el campo eléctrico de la esfera más la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador, esto es:

$$E_f = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2} \frac{Q_c^2}{C}$$

La energía disipada es la diferencia entre la energía final e inicial. Usando las expresiones obtenidas para  $Q_f$  y  $Q_c$  encontramos que

$$\Delta W = E_f - E_i = \frac{4\pi\epsilon_0 a C V_0^2}{C + 4\pi\epsilon_0 a}$$

**6.** Considere dos conductores esféricos concéntricos. Uno, sólido, de radio  $a$  conectado a tierra y, el otro, un cascarón de radio interior  $b$  y radio exterior  $c$  sobre el cual se ha depositado una carga  $Q$ . Calcule la carga inducida sobre la esfera interior y el campo eléctrico en todo el espacio.

**Solución:**

Sobre la esfera conductora interior se induce una carga que llamamos  $Q_1$ . Aplicando el teorema de Gauss sobre una superficie esférica contenida en el interior del cascarón esférico ( $b < r < c$ ), dado que el campo en el interior del conductor es nulo, concluimos que la carga encerrada por esa superficie tiene que ser cero. Esto implica que sobre la superficie interna  $r = b$  del cascarón se ha depositado la carga  $-Q_1$ . Y como la carga total de este cascarón es  $Q$ , concluimos que sobre la superficie exterior se ha depositado la carga  $Q + Q_1$ . Entonces, el campo eléctrico, en todo el espacio es:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para} \quad r < a \quad \text{y} \quad b < r < c$$

ya que son zonas interiores en los conductores.

$$\vec{E}_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para} \quad a < r < b$$

y

$$\vec{E}_{II} = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para} \quad r > c$$

Como nos dicen que la esfera interior está a potencial cero, la diferencia de potencial entre el infinito y la esfera de radio  $a$  es cero. Esto es:

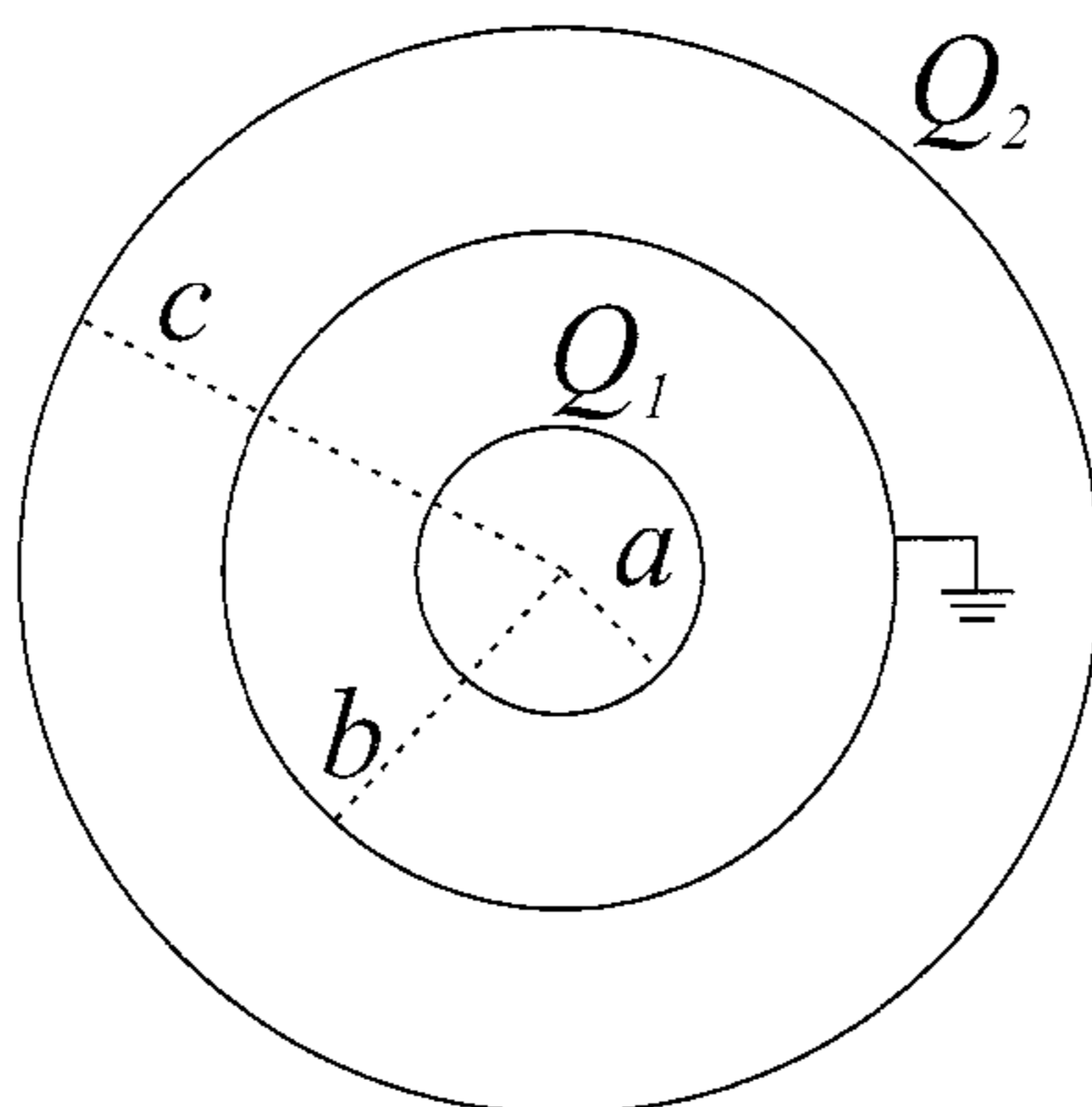
$$V(a) - V(\infty) = 0 = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^c \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_I \cdot d\vec{r}.$$

Al efectuar las integrales obtenemos la relación entre  $Q_1$  y  $Q$ . Resulta:

$$Q_1 = - \frac{abQ}{ab + c(b - a)}$$

El resultado final para el campo se obtiene al reemplazar esta expresión para  $Q_1$  en las expresiones para el campo dadas arriba.

7. Considere tres cascarones esféricos muy delgados, conductores, de radios exteriores  $a, b$  y  $c$  respectivamente ( $a < b < c$ ). Los cascarones de radios  $a$  y  $c$  tienen una carga total  $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente. El conductor de radio  $b$  está conectado a tierra. Determine el campo eléctrico en todo el espacio y la carga inducida sobre el cascarón a tierra.



### Solución:

Llamemos  $Q$  a la carga que será inducida en el conductor conectado a tierra. Por la simetría del problema en cada región el campo se debe a las cargas interiores a ella. Tenemos entonces que los campos eléctricos en cada región son:

$$\vec{E}_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{II} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

y

$$\vec{E}_{III} = \frac{Q_1 + Q + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Para calcular la carga inducida  $Q$  podríamos proceder como en el problema anterior, esto es imponiendo  $V(b) - V(\infty) = 0$ . Al integrar el campo eléctrico entre  $\infty$  y  $b$  e imponer que fuese cero, obtendríamos  $Q$  y por lo

tanto  $\vec{E}$ . Es ejercicio para el lector hacerlo. Aquí usemos otro método, que también podría haberse usado en el problema anterior.

A partir de las expresiones dadas para el campo eléctrico sabemos que el potencial en cada región es:

$$V_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + D_1$$

$$V_{II} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r} + D_2$$

y

$$V_{III} = \frac{Q_1 + Q + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + D_3$$

donde las constantes  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  están por determinar. Las condiciones para determinarlas son la continuidad del potencial y el requerimiento de que vale cero en  $b$ . Por estar la carga en una región acotada, también podemos fijar  $V(\infty) = 0$ . Imponemos entonces,

$$V_I(b) = V_{II}(b) = 0$$

$$V_{II}(c) = V_{III}(c)$$

y

$$V_{III}(\infty) = 0$$

Al imponer estas condiciones encontramos las constantes y el valor de  $Q$ . El cálculo es inmediato, su resultado es:

$$D_3 = 0 \quad D_1 = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b} \quad \text{y} \quad D_2 = -\frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0 b}$$

y la carga inducida resulta:

$$Q = -Q_1 - \frac{bQ_2}{c}$$

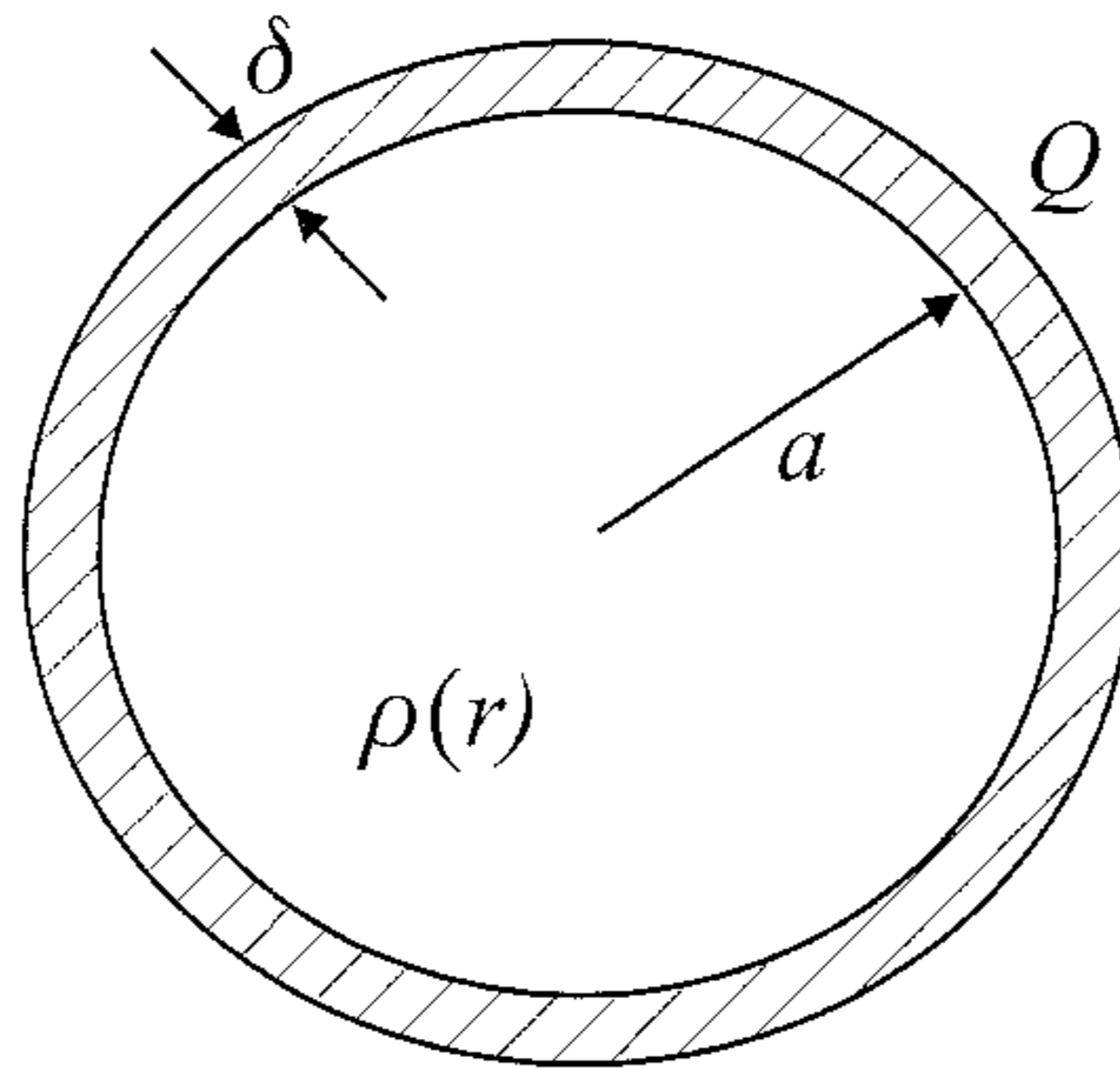
Reemplazando estos valores en las expresiones dadas más arriba se obtiene el resultado final.

8. Una cáscara esférica conductora de radio  $a$  y espesor  $\delta \ll a$  contiene carga neta  $Q$ . Se distribuye una carga  $q$  en el volumen interior del cascarón de radio  $a$  (un aislante en la parte interior del cascarón impide que esta densidad de carga se pase al conductor). Nos dicen que el campo eléctrico en el interior del cascarón está dado por:

$$\vec{E} = K \left( \frac{r}{a} \right)^4 \hat{r}$$

donde  $K$  es una constante por determinar. Se pide encontrar:

- la densidad de carga  $\rho(r)$  en el volumen interior al cascarón,
  - las densidades de carga superficial en el interior y exterior del cascarón,
- y
- el potencial electrostático en todo el espacio.



### Solución:

a) La densidad de carga la podemos calcular a partir de la forma diferencial del teorema de Gauss:

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 K \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right) = \frac{6\epsilon_0 K r^3}{a^4}$$

donde hemos usado el término radial de la expresión para la divergencia en coordenadas esféricas. La carga total en el interior del cascarón es  $q$  por lo tanto debe cumplirse que

$$q = \int \rho(r) dV = 4\pi \int_0^a \frac{6\epsilon_0 K r^3}{a^4} r^2 dr = 4\pi\epsilon_0 a^2 K$$

de donde calculamos la constante  $K$ . Su valor es:

$$K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

por lo que finalmente obtenemos que la densidad de carga  $\rho$  en el volumen interior  $r < a$  es:

$$\rho(r) = \frac{3}{2\pi} \frac{qr^3}{a^6}$$

b) Como el campo en el cascarón mismo debe ser cero por ser éste conductor, la carga total inducida en la superficie interior del cascarón debe ser  $-q$ , la densidad de carga superficial en la cara interior es:

$$\sigma_i = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

Por conservación de carga, la carga total sobre la superficie exterior es  $Q + q$  y, la densidad de carga es

$$\sigma_e = \frac{q + Q}{4\pi a^2}$$

Aquí hemos despreciado el espesor  $\delta$  del cascarón.

c) El campo eléctrico interior es entonces, reemplazando el valor de  $K$  obtenido:

$$\vec{E}_{in} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^4 \hat{r} \quad \text{para} \quad r < a$$

y en el exterior es:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para} \quad r > a$$

El potencial eléctrico es:

$$V(r) = -\int_{\infty}^r \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{r} = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{para} \quad r > a$$

y

$$V(r) = -\int_{\infty}^a \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{r} - \int_a^r \vec{E}_{in} \cdot d\vec{r} = \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q}{20\pi a^6 \epsilon_0} (r^5 - a^5)$$

9. Tres esferas conductoras idénticas se encuentran ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero. Cuando sus potenciales son  $V$ ,  $0$ , y  $0$ , respectivamente, sus cargas son  $q$ ,  $q'$  y  $q'$ , en el mismo orden. Demuestre que cuando las esferas se encuentran todas a un mismo potencial  $V'$ , cada una de ellas tiene una carga  $(2q' + q)V'/V$ . Encuentre los potenciales respectivos cuando las cargas de las esferas son  $q''$ ,  $0$  y  $0$ .

**Solución:**

Llamemos 1, 2 y 3 respectivamente a cada una de las tres esferas idénticas, puestas en los vértices de un triángulo equilátero. Como las esferas conductoras son iguales y como están dispuestas simétricamente, los coeficientes de capacidad  $C_{ij}$  satisfacen

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} \quad (1)$$

y

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} \quad (2)$$

(Recuérdese además que en general los coeficientes de capacidad son simétricos, i.e.,  $C_{12} = C_{21}$ , etc.) Llamemos  $C$  al valor común de los elementos diagonales (i.e.,  $C = C_{11}$ , etc.) y  $D$  al valor común de los elementos fuera de la diagonal (i.e.,  $D = C_{12}$ , etc.) En general para un sistema de  $N$  conductores, la carga  $q_i$  en el conductor  $i$ -ésimo está dada en términos de los potenciales en todos los conductores a través de

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad (3)$$

En nuestro caso particular,  $N = 3$  y

$$q_1 = CV_1 + D(V_2 + V_3) \quad (4)$$

$$q_2 = CV_2 + D(V_1 + V_3) \quad (5)$$

y

$$q_3 = CV_3 + D(V_1 + V_2) \quad (6)$$

De los datos del problema y de (4), (5), (6) obtenemos,

$$C = \frac{q}{V} \quad (7)$$

y

$$D = \frac{q'}{V} \quad (8)$$

Así pues, cuando las tres esferas se encuentran conectadas al mismo potencial  $V'$ , obtenemos de inmediato a partir de (4), (5) y (6), usando los valores de  $C$  y  $D$  encontrados en (7) y (8), que las cargas en las tres esferas son iguales y que están dadas por  $(2q' + q)V'/V$ .

Por otra parte si la carga en una de las esferas es  $q''$  y las otras dos esferas están descargadas, (4), (5) y (6) toman la forma:

$$q'' = CV_1 + D(V_2 + V_3) \quad (9)$$

$$0 = CV_2 + D(V_1 + V_3) \quad (10)$$

y

$$0 = CV_3 + D(V_1 + V_2) \quad (11)$$

Resolviendo el sistema (9), (10), (11) para los potenciales  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  obtenemos,

$$V_1 = q'' \frac{C + D}{C^2 + DC - D^2} \quad (12)$$

y

$$V_2 = V_3 = -\frac{D}{C + D} V_1 \quad (13)$$

Utilizando los valores de  $C$  y  $D$ , dados por (7) y (8) respectivamente, obtenemos a partir de (12) y (13),

$$V_1 = V q'' \frac{q + q'}{q^2 + qq' - q'^2}$$

y

$$V_2 = V_3 = -V \frac{q'q''}{q^2 + qq' - q'^2}$$

**10.** Un condensador cilíndrico se compone de un alambre conductor recto de radio  $R_1$ , largo  $L$  y carga  $Q$ , rodeado por una cáscara conductora cilíndrica coaxial de radio  $R_2$ , carga  $-Q$  y largo  $L$ . a) Encuentre la densidad de energía electrostática en cualquier punto del espacio. b) ¿Cuánta energía existe en una corteza cilíndrica de radio  $r$ , espesor  $dr$  y largo  $L$  ubicada entre ambos conductores? c) ¿Cuál es la energía total almacenada en el condensador?



**Solución:**

a) Supondremos que el largo  $L$  del cilindro es mucho mayor que el radio exterior  $R_2$  de éste. Entonces, el campo eléctrico entre las dos cáscaras cilíndricas se puede calcular utilizando el teorema de Gauss, y está dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} \quad (1)$$

en que hemos usado coordenadas cilíndricas, con el eje  $z$  coincidiendo con el eje del condensador. Aquí, la densidad lineal de carga está dada por  $\lambda = Q/L$ . La densidad de energía  $u$  está dada en general por

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$u(r) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (3)$$

b) La energía almacenada en la corteza es  $u dV$  en que  $dV = 2\pi r L dr$  es el volumen de la corteza. Así, de (3) obtenemos:

$$u(r) dV = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}. \quad (4)$$

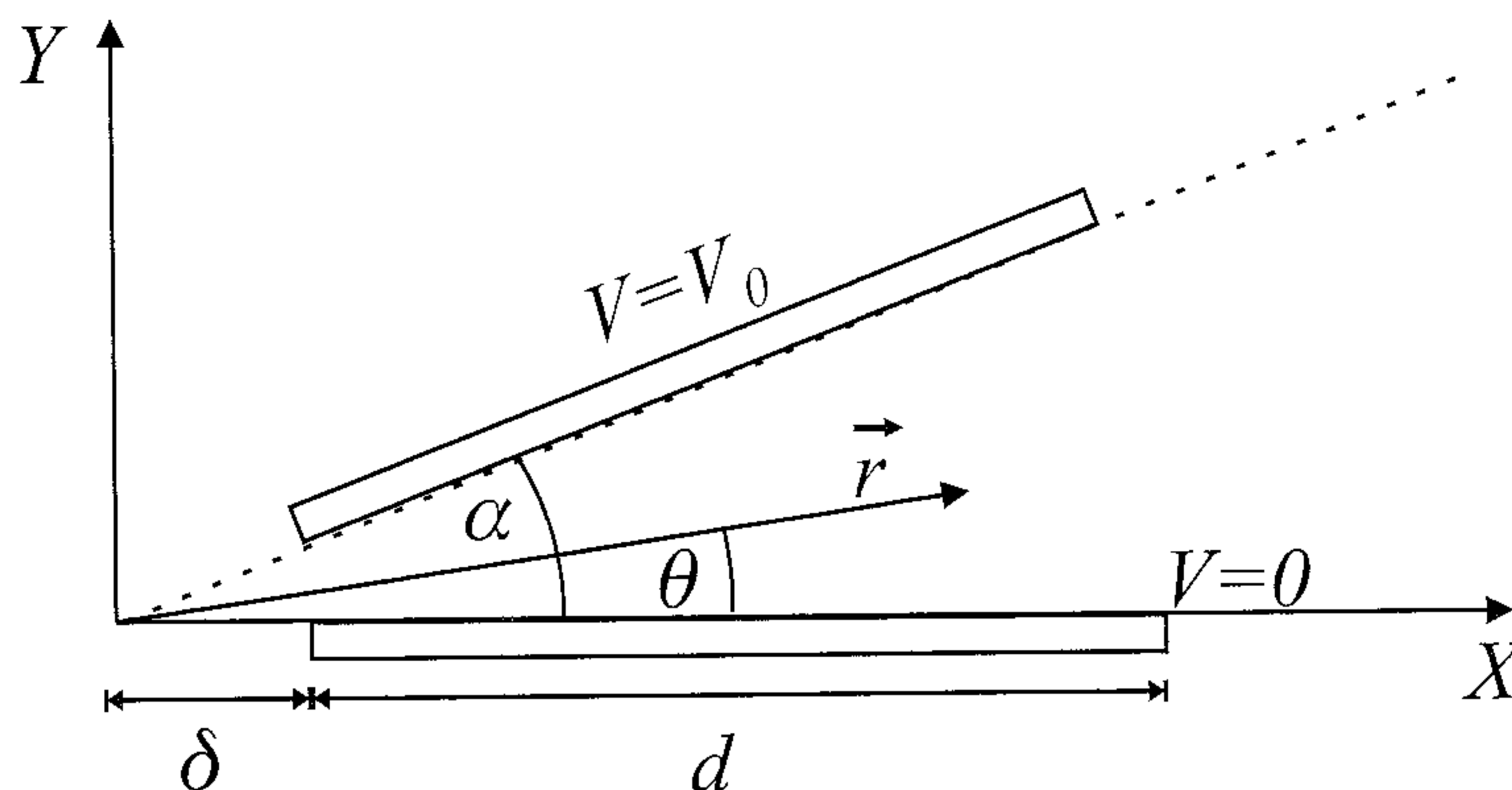
c) La energía total almacenada en el condensador es:

$$\int_{R_1}^{R_2} u(r) dV = \frac{1}{2} Q^2 \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\epsilon_0 L}. \quad (5)$$

Hemos usado (4) para evaluar el lado derecho de (5). El lector puede notar que el lado derecho se puede escribir en la forma  $Q^2/(2C)$  en que  $C = 2\pi\epsilon_0 L / \ln(R_2/R_1)$ , como era de esperar.

**11.** Dos placas conductoras cuadradas, de longitud lateral  $d$  están ubicadas radialmente, formando un ángulo  $\alpha$ . Uno de los extremos de las placas se encuentra a distancia  $\delta$  del punto de intersección entre los planos que éstas definen. La separación entre ambas en el otro extremo es mucho menor que su longitud, como se muestra en la figura. Una de las placas se encuentra a potencial  $V = 0$  y la otra a potencial  $V = V_0$ .

Encuentre: a) el campo eléctrico entre las placas, b) la densidad superficial de carga  $\sigma$  sobre las placas, c) el potencial entre las placas, d) la capacidad del sistema.



### Solución:

Si despreciamos los efectos de borde (tal como se hace usualmente con el condensador de placas planas paralelas), podemos suponer que el potencial, entre las placas, sólo depende del ángulo polar.

Si usamos coordenadas cilíndricas, con el eje  $z$  coincidiendo con la intersección entre los planos donde se encuentran las placas, y  $r$  y  $\theta$  como coordenadas polares en el plano  $z = 0$ , la afirmación anterior quiere decir que  $V$  sólo depende de  $\theta$  y no de  $r$  ni de  $z$ . Esta aproximación será razonable en la medida que la abertura  $\alpha$  sea pequeña y la distancia  $d$  sea suficientemente grande.

Como la función potencial  $V$  satisface la ecuación de Laplace entre los conductores, usando la expresión del Laplaciano en cilíndricas junto al hecho que  $V$  sólo depende de  $\theta$ , obtenemos,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0 \quad (1)$$

De (1) obtenemos

$$V(\theta) = A\theta + B$$

en que  $A$  y  $B$  son constantes de integración. Si escogemos  $\theta = 0$  coincidiendo con la placa que se encuentra a potencial cero y  $\theta = \alpha$  coincidiendo con la placa que se encuentra a potencial  $V_0$ , obtenemos de inmediato los valores de  $A$  y  $B$ . En efecto  $A = V_0/\alpha$  y  $B = 0$ .

Así,

$$V(\theta) = V_0 \frac{\theta}{\alpha} \quad (2)$$

para  $0 \leq \theta \leq \alpha$ .

De (2) obtenemos de inmediato el campo eléctrico,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \hat{\theta} = -\frac{V_0}{\alpha r} \hat{\theta} \quad (3)$$

para  $0 \leq \theta \leq \alpha$ .

A partir de la expresión para el campo eléctrico y utilizando el hecho que sobre un conductor la densidad de carga es proporcional a la magnitud del campo, obtenemos la densidad de carga sobre las placas. En la placa  $\theta = 0$ , la normal es  $\hat{\theta}$ , y  $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{\theta}(\theta = 0)$ .

De (3) obtenemos,

$$\sigma(\theta = 0) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} \quad (4)$$

En tanto que en la placa superior, haciendo un cálculo similar, pero esta vez usando que la normal es  $-\hat{\theta}$ , obtenemos,

$$\sigma(\theta = \alpha) = +\frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} \quad (5)$$

Integrando (4) y (5) obtenemos la carga total sobre cada una de las placas.

En la placa superior,

$$Q = d \int_{\delta}^{d+\delta} \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} dr = \frac{\epsilon_0 V_0 d}{\alpha} \ln \left( \frac{d+\delta}{d} \right) \quad (6)$$

La carga en la placa inferior es  $-Q$ .

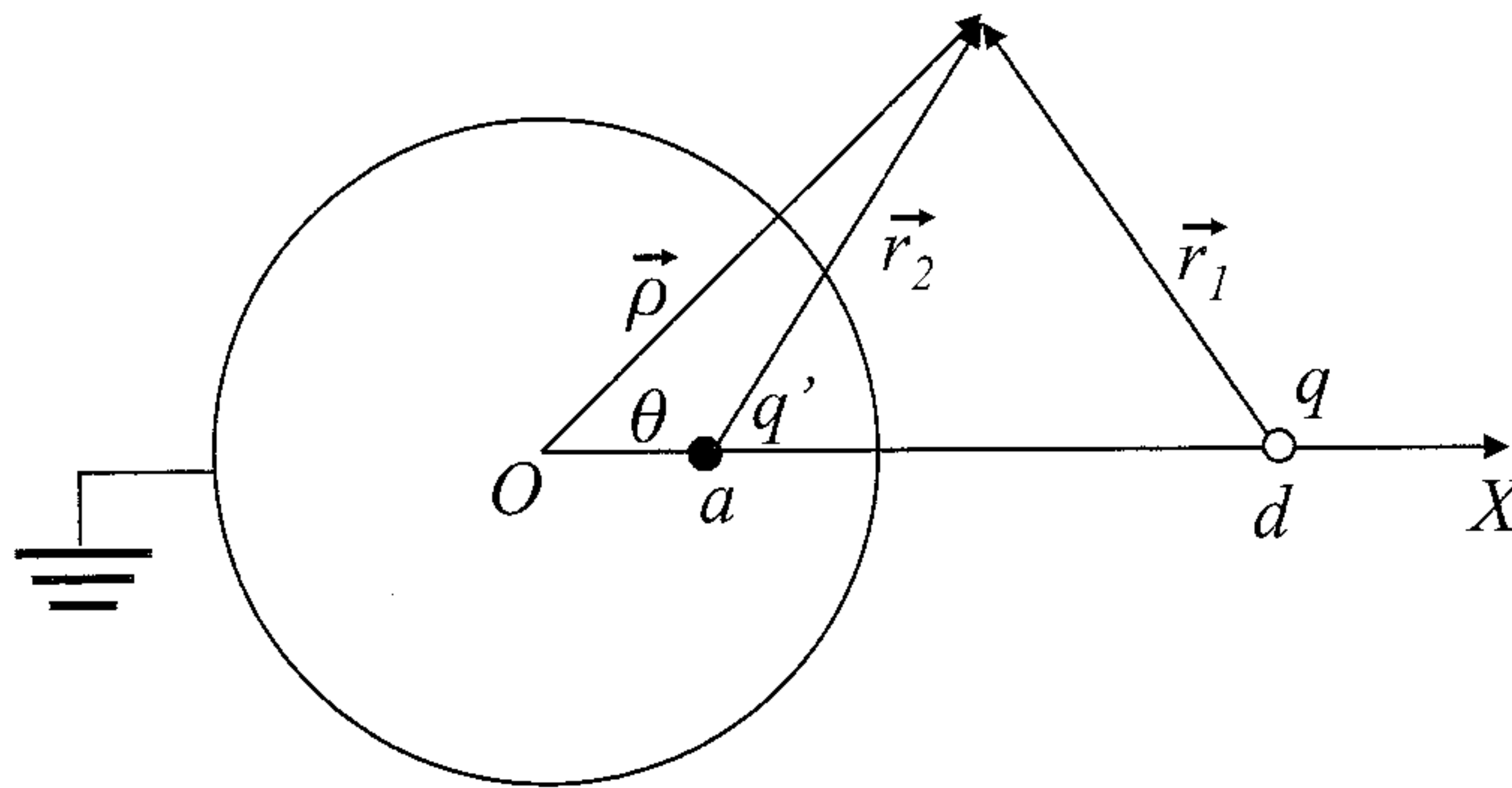
Finalmente la capacidad del condensador es  $Q/V_0$ . Así, de (6) obtenemos,

$$C = \frac{\epsilon_0 d}{\alpha} \ln \left( \frac{d + \delta}{d} \right)$$

**12.** Dos conductores esféricos se encuentran en el vacío. El conductor 1, de radio  $R$ , se encuentra a potencial cero y conectado a Tierra. El conductor 2 es tan pequeño que puede ser considerado como una carga puntual. Este conductor tiene una carga total  $q$  y se encuentra a una distancia  $d$  del centro del conductor 1. ¿Cuál es la carga total inducida sobre el conductor 1?

**Solución:**

Debemos poner una carga imagen en el interior de la esfera de tal modo que el potencial producido por la carga  $q$  y la carga imagen sobre la superficie de la esfera conductora sea 0 (aunque no sabemos *a priori* si basta con una carga, es la suposición más sencilla. Si se encuentra una solución es porque la suposición era acertada).



La configuración esfera-carga tiene simetría axial con respecto al eje que une el origen con la carga  $q$ . Por esta simetría axial la carga  $q'$  debe estar en este mismo eje. Supongamos que está a distancia  $a$  del origen que ubicamos en el centro de la esfera. Usando coordenadas polares  $\rho$  y  $\theta$  como en la figura y usando el teorema de los Cosenos tenemos:

$$V(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right] \quad (1)$$

en que

$$r_1 = [d^2 + \rho^2 - 2d\rho \cos \theta]^{1/2}$$

y,

$$r_2 = [a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta]^{1/2}$$

Así, sobre la superficie de la esfera,  $\rho = R$ , el potencial es:

$$V(R, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{1/2}} \right]$$

Como la esfera se encuentra conectada a Tierra,  $V(R, \theta) = 0$ , y debemos exigir entonces,

$$q(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{1/2} + q'(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta)^{1/2} = 0 \quad (2)$$

para todo  $\theta$ . En particular, haciendo  $\theta = 0$  y luego  $\theta = \pi$  en (2) obtenemos  $q(R - a) + q'(d - R) = 0$  (recordemos que  $R > a$  y  $d > R$ ) y  $q(R + a) + q'(d + R) = 0$  respectivamente. De aquí a su vez se tiene que  $qR + q'd = 0$  y  $qa + q'R = 0$ . Pasando los terminos en  $q'$  al lado derecho y dividiendo ambas ecuaciones obtenemos,

$$a = \frac{R^2}{d}, \quad (3)$$

es decir, la carga imagen debe ser ubicada en el punto inverso de  $d$  con respecto a la esfera, y además,

$$q' = -q \frac{R}{d} \quad (4)$$

Es fácil verificar que estos valores de  $a$  y de  $q'$  permiten satisfacer (2) para todos los valores de  $\theta$  en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Con estos valores de  $a$  y  $q'$  reemplazados en (1) obtenemos el valor del potencial producido por la carga frente a la esfera conductora en todo el espacio exterior a la esfera:

$$V(\rho, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(d^2 + \rho^2 - 2d\rho \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R}{(R^4 + \rho^2 d^2 - 2R^2 d \rho \cos \theta)^{1/2}} \right\} \quad (6)$$

A partir de (6) se puede derivar el campo eléctrico como

$$\vec{E} = E_\rho \hat{\rho} + E_\theta \hat{\theta},$$

en que las componentes  $E_\rho$  y  $E_\theta$  están dadas respectivamente por  $-\partial V/\partial\rho$  y  $-(1/\rho)(\partial V/\partial\theta)$ . Es fácil verificar que la componente tangencial en la superficie del conductor  $E_\theta(R, \theta) = 0$ , en tanto que la componente radial es:

$$E_\rho(R, \theta) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2 - R^2}{(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}} \frac{1}{R} \quad (7)$$

Sabemos que la densidad de carga sobre la superficie de un conductor está relacionada con la magnitud del campo a través de  $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$  (en que  $\hat{n}$  es la normal a la superficie). A partir de (7), considerando que sobre la esfera  $\hat{n} = \hat{\rho}$ , obtenemos la densidad de carga inducida

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R} \frac{d^2 - R^2}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}} \quad (8)$$

La carga total inducida es:

$$Q = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (9)$$

Reemplazando (8) en (9) y haciendo las integrales sobre  $\theta$  y sobre  $\varphi$  obtenemos finalmente,

$$Q = -\frac{q}{2d}(d^2 - R^2) \left\{ \frac{1}{(d - R)} - \frac{1}{(d + R)} \right\} = -q \frac{R}{d} = q' \quad (10)$$

Como vemos, la carga total inducida sobre la esfera es igual al valor de la carga imagen.

Dejamos como ejercicio el cálculo de la fuerza entre la esfera y la carga  $q$ , que resulta ser  $\vec{F} = (1/4\pi\epsilon_0) \times (qq')/(d - a)^2(-\hat{k})$

*Comentario:* Es simple extender el resultado anterior al caso en que la esfera se encuentra a potencial  $V_0$  o aislada con carga  $Q$ . Ambos casos se dejan como ejercicios.

**13.** Una carga puntual  $q$  positiva se encuentra situada a distancia  $d$  del centro de una esfera conductora aislada de radio  $R$ . ¿Qué carga neta  $Q$  se debe colocar en la esfera conductora para que la fuerza de interacción electrostática entre la carga y la esfera conductora sea nula?

**Solución:**

Sabemos, por el problema anterior, que para encontrar el potencial producido por una carga  $q$  puesta a distancia  $d$  de una esfera de radio  $R$  y conectada a Tierra, se puede reemplazar el sistema carga–esfera por un sistema de dos cargas. En efecto, para calcular el potencial, basta conocer el potencial producido por la carga original y por una carga imagen puesta dentro de la esfera y a una distancia  $a = R^2/d$  de su centro. El valor de la carga imagen es  $q' = -qa/R = -qR/d$ . Este arreglo de cargas ( $q$  y su imagen  $q'$ ) es tal que el potencial que ellas producen es nulo sobre la superficie de la esfera.

Ahora bien, si la esfera no está conectada a Tierra, sino que está aislada y llevando una carga total  $Q$ , deberemos agregar una segunda carga imagen, esta vez en el centro de la esfera (con el objeto de no alterar el hecho que la superficie de la esfera sea una equipotencial) y de un valor, digamos  $Q'$ , tal que  $Q' + q'$  sea igual a la carga total  $Q$  de la esfera. Así,

$$Q' = Q - q' = Q + q \frac{R}{d} \quad (1)$$

La fuerza que ejerce la esfera sobre la carga  $q$  es igual a la fuerza que ejercen las cargas imagen sobre  $q$ :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{q'}{(d-a)^2} + \frac{Q'}{d^2} \right) \hat{n} \quad (2)$$

en que  $\hat{n}$  es la dirección que va desde el centro de la esfera hasta la carga  $q$ .

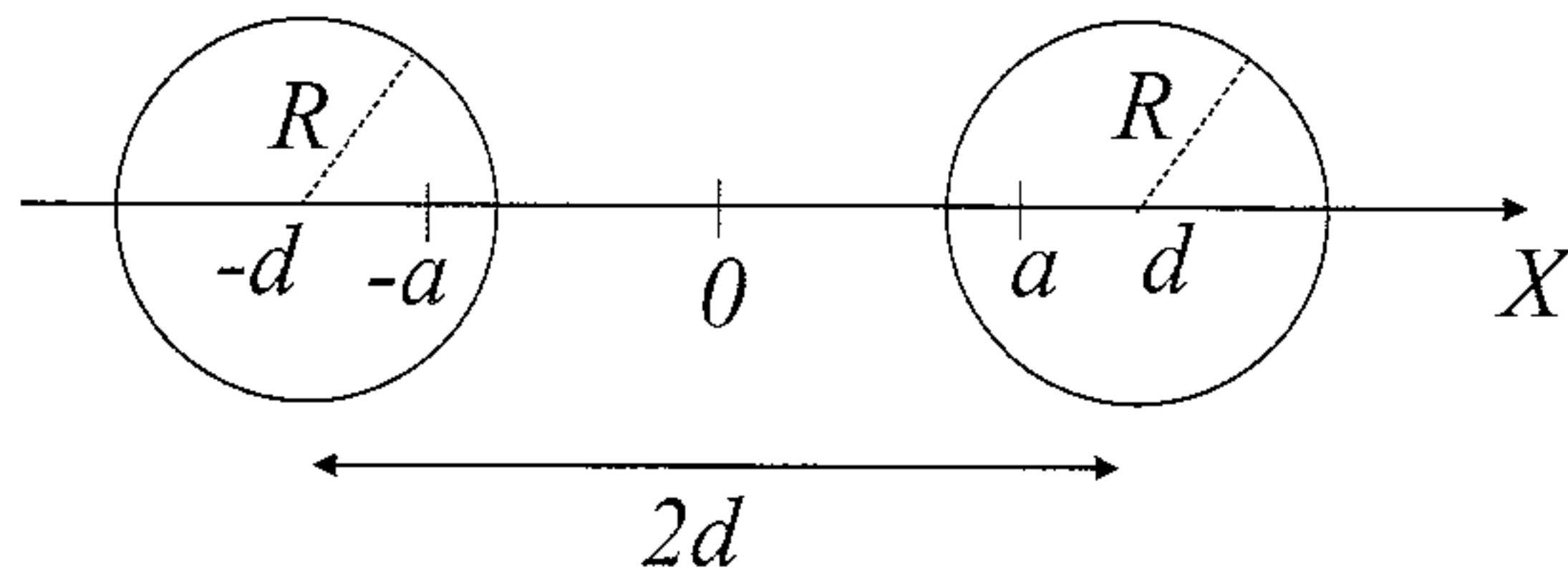
Reemplazando los valores de  $q'$ ,  $Q'$  y  $a$  en (2) obtenemos,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{qR}{d} \left( \frac{1}{d^2} - \frac{d^2}{(d^2 - R^2)^2} \right) + Q \frac{1}{d^2} \right] \hat{n}$$

Entonces, para que la fuerza sea nula es necesario que

$$Q = q R d \left[ \frac{d^2}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{1}{d^2} \right]$$

14. Considere un sistema formado por dos conductores cilíndricos paralelos, ambos de radio  $R$ , separados por una distancia  $2d$ , como muestra la figura. Los cilindros están cargados a una diferencia de potencial  $V$ . Encuentre la capacidad por unidad de longitud para el sistema de conductores.



**Solución:**

Este problema se puede resolver en forma aproximada en el caso  $2d \gg R$  y en forma exacta usando el método de imágenes. Ponemos el origen de coordenadas en el centro, entre los cilindros, y suponemos que el cilindro a la derecha tiene carga positiva  $Q$  y el cilindro a la izquierda tiene carga negativa  $-Q$ .

Resolvámoslo primero en forma aproximada.

Si  $2d \gg R$  los cilindros están muy separados por lo que el efecto de uno sobre otro es muy leve. En el caso extremo, podemos suponer que el campo es simplemente la superposición de los dos cilindros, cada uno considerado como si el otro no estuviese. La diferencia de potencial entre los cilindros la podemos calcular a lo largo de la línea que une sus centros, esto es a lo largo del eje  $x$ . Esta diferencia de potencial es,

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{-d+R}^{d-R} \left( \frac{1}{d+x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 L} \ln \left[ \frac{2d-R}{R} \right] \quad (1)$$

Aquí  $L$  es la longitud de los cilindros, que hemos supuesto mucho mayor que su radio para poder considerarlos prácticamente como cilindros infinitos. De la ecuación (1) vemos que la capacidad por unidad de largo es, aproximadamente,

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(2d-R)/R]} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[2d/R]}.$$

A continuación haremos este problema en forma exacta. Este es un problema que se puede resolver en forma simple usando imágenes. La idea



es reemplazar los dos conductores cilíndricos por sendas líneas cargadas, de densidades de carga por unidad de largo  $-Q/L$  (en el interior del cilindro de la izquierda) y  $Q/L$  (en el interior del cilindro de la derecha) respectivamente. La posición de estas líneas de carga (imágenes) debe ser tal que el conjunto de ellas tiene como superficies equipotenciales, entre otras, precisamente a los dos cilindros. Una vez encontrada la posición de estas líneas de carga imagen, podremos calcular directamente el campo eléctrico creado por ellas y encontrar la diferencia de potencial entre los dos cilindros. Tal como vimos en el problema 18 del capítulo 3, si tenemos dos líneas de carga paralelas separadas a una distancia  $2a$ , sus superficies equipotenciales son cilindros, cuyos ejes son paralelos a las líneas de carga. Recordemos que el radio de las superficies equipotenciales es  $r = 2ac/|c^2 - 1|$  y su centro es  $(1 + c^2)a/(c^2 - 1)$ . Las equipotenciales de las dos líneas coinciden con los cilindros si su centro es  $d$  y radio  $R$ . Esto es,

$$R = \frac{2ac}{c^2 - 1} \quad \text{y} \quad d = \frac{(1 + c^2)a}{c^2 - 1} \quad (2)$$

Hemos eliminado los módulos ya que podemos considerar el caso  $c > 1$ . El otro cilindro será el correspondiente a  $1/c$ . Las ecuaciones (2) son un sistema para las incógnitas  $c$  y  $a$  que se resuelve fácilmente. De la segunda encontramos  $c^2 = (d + a)/(d - a)$  lo cual, al reemplazarlo en la primera, nos permite encontrar la posición  $a$  de las líneas imagen. Resulta:

$$a^2 = d^2 - R^2$$

El campo producido por estas líneas es, sobre el eje  $x$ :

$$\vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left( \frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x} \right) \hat{x}$$

La diferencia de potencial entre los cilindros es, entonces,

$$\Delta V = \int_{-d+R}^{d-R} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left( \frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x} \right) \hat{x} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 L} \ln \left[ \frac{a + d - R}{a - d + R} \right]$$

La capacidad por unidad de largo es, reemplazando la expresión para  $a$  en términos de  $d$  y  $R$ :

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[ \frac{(d - R + \sqrt{d^2 - R^2})}{(R - d + \sqrt{d^2 - R^2})} \right]}$$

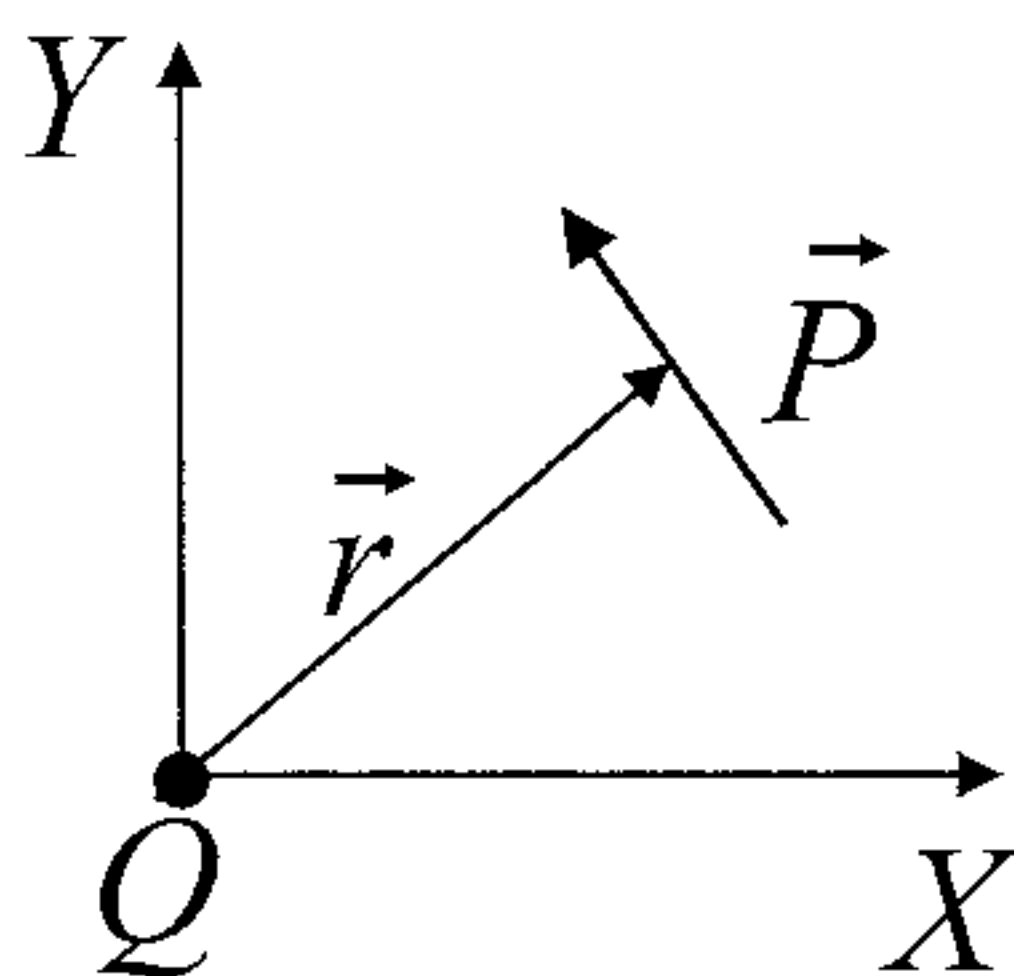
El factor en el logaritmo se puede simplificar, multiplicando el numerador y el denominador de la fracción en el logaritmo por  $R - d + \sqrt{d^2 - R^2}$  y efectuando las simplificaciones correspondientes, resulta finalmente,

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(d + \sqrt{d^2 - R^2})/R]}.$$

Esta expresión es exacta. Vemos que de ella, en el límite  $d \gg R$ , recuperamos el valor aproximado calculado inicialmente.

## 5. Dipolos y Dieléctricos

1. Un dipolo eléctrico con momento dipolar  $\vec{P}$  se encuentra en la posición  $\vec{r}$  con respecto a algún origen, donde existe una carga puntual  $Q$ . Calcule la energía de interacción entre la carga y el dipolo así como la fuerza y el torque (respecto al origen) sobre el dipolo.



### Solución:

a) La energía del dipolo en presencia del campo eléctrico producido por la carga  $Q$  está dada por

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (1)$$

Aquí  $\vec{E}(\vec{r}) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$  es el campo eléctrico producido por la carga  $Q$  en la posición  $\vec{r}$  del dipolo. Entonces, reemplazando el campo en (1) obtenemos,

$$U = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (2)$$

El torque ejercido por el campo sobre el dipolo está dado por

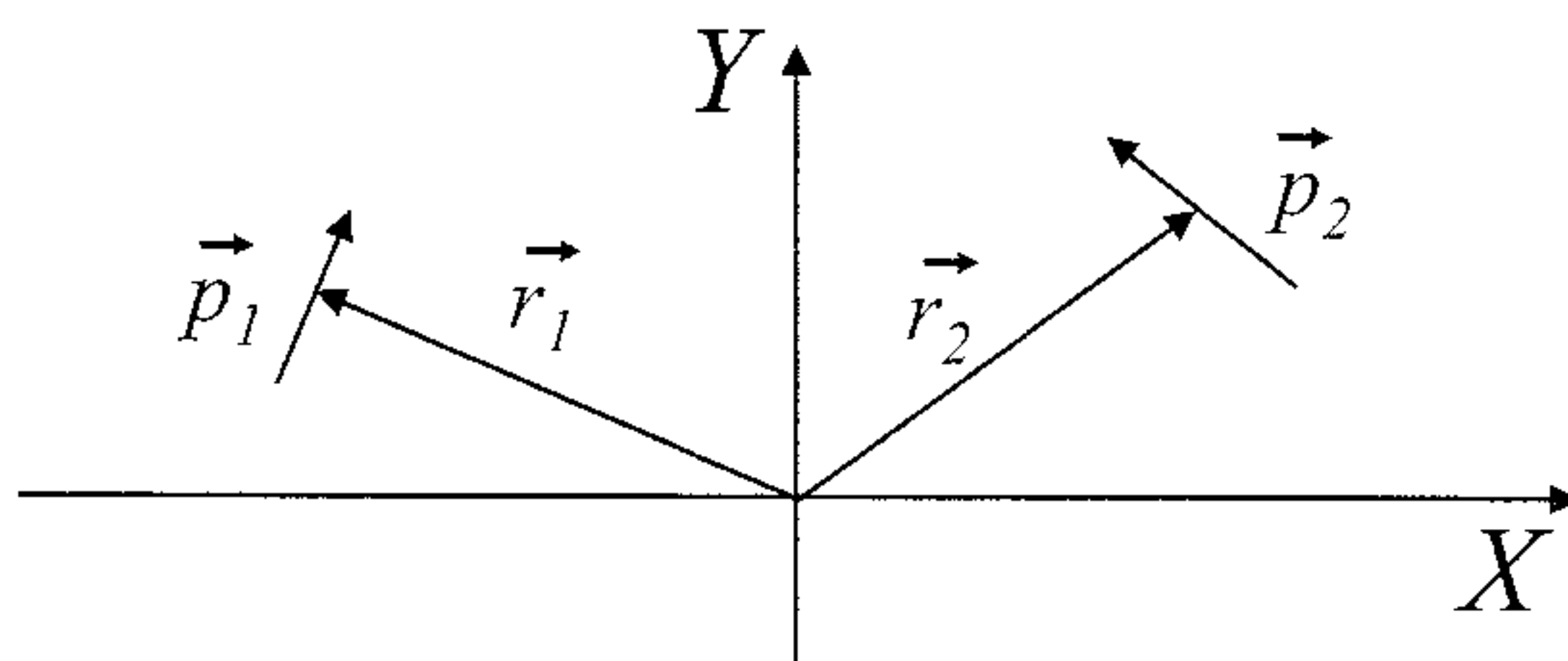
$$\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (3)$$

Finalmente, la fuerza que ejerce el campo sobre el dipolo la podemos calcular a partir de (2) por medio de

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{\nabla}(\vec{P} \cdot \vec{r})}{r^3} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^6} \vec{\nabla}r^3 \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{P}}{r^3} - \frac{3\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right] \quad (4)$$

Para el cálculo de esta expresión en coordenadas esféricas hemos usado  $\vec{P} = cte$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$  por lo que  $\vec{\nabla}(\vec{P} \cdot \vec{r}) = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{P}$ .

2. Calcule el potencial de interacción entre dos dipolos ubicados en  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Calcule también la fuerza entre los dipolos.



### Solución:

Para calcular la energía de interacción entre los dos dipolos, primero calculamos el campo eléctrico producido por el dipolo 1 en la posición del dipolo 2 (i.e.,  $\vec{E}_1(\vec{r}_2)$ ), y luego usamos  $U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2)$ . El potencial producido en un punto  $\vec{r}$  cualquiera por el dipolo  $\vec{p}_1$  (ubicado en la posición  $\vec{r}_1$ ) está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1)$$

A partir de (1) podemos calcular de inmediato el campo eléctrico producido por el dipolo 1 en un punto  $\vec{r}$ , es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^5} [\vec{p}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)] - \frac{\vec{p}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) \quad (2)$$

Finalmente la energía de interacción entre los dos dipolos está dada por

$$U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r_{21}^3} - 3 \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_{21})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_{21})}{r_{21}^5} \right) \quad (3)$$

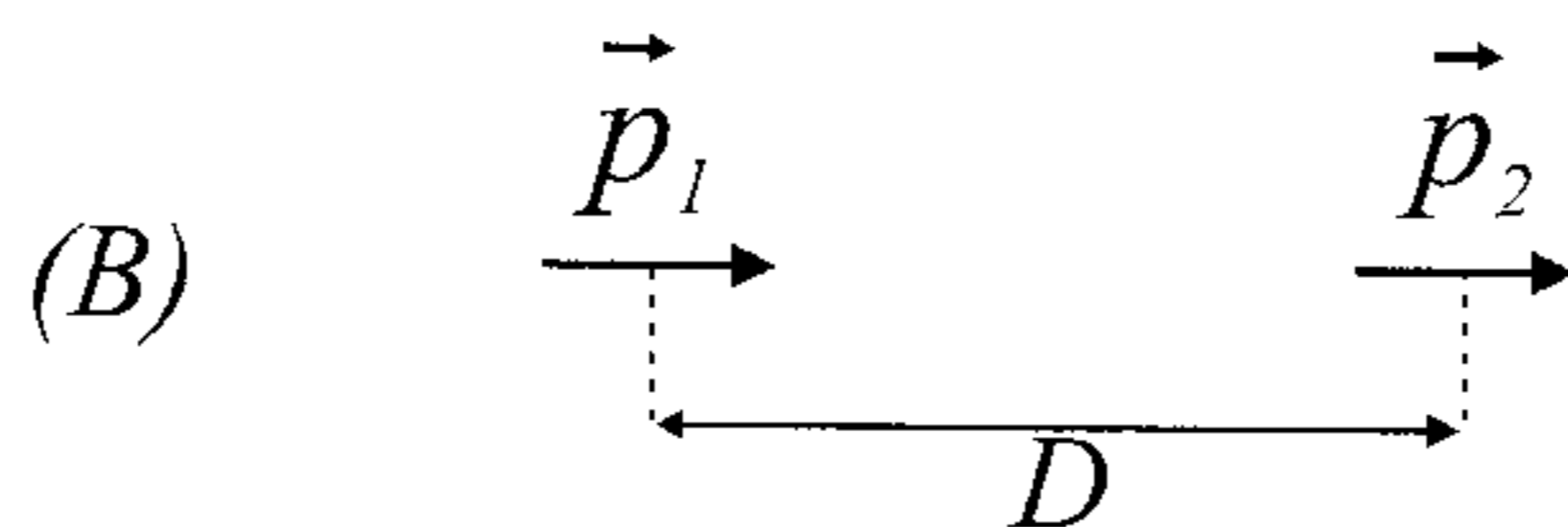
en que  $\vec{r}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

Para calcular la fuerza que el dipolo 1 ejerce sobre el dipolo 2 basta usar

$$\vec{F}_{21} = -\vec{\nabla}_2 U.$$

Dejamos este cálculo como ejercicio para el lector.

**3.** Dos moléculas de agua (de momento dipolar permanente  $p$  cada una) se encuentran separadas a una distancia  $D$ . Considere las dos situaciones diferentes (A) y (B) que se muestran en la figura. En (A) los dos momentos dipolares apuntan en dirección perpendicular a la línea que une sus centros, y en (B) los momentos dipolares son colineales con dicha recta. En cada caso los dipolos apuntan en la misma dirección. a) Calcule la diferencia de energía entre las posiciones (A) y (B). b) Si se les libera desde el reposo, ¿en qué dirección se moverán las moléculas en cada caso? c) Calcule la magnitud de la fuerza de interacción entre los dipolos en los casos (A) y (B).



### Solución:

En la configuración A, tenemos que  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = p\hat{y}$ . Utilizando el resultado (ver ecuación [3]) del problema anterior, considerando que  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = D\hat{x}$ , obtenemos de inmediato que la energía de la configuración A está dada por

$$U_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p^2}{D^3} \right) \quad (1)$$

Para la configuración B,  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = p\hat{x}$ , y la energía de la configuración B es:

$$U_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -2 \frac{p^2}{D^3} \right) \quad (2)$$

a) De (1) y (2) vemos que la diferencia de energía entre las dos configuraciones es:

$$U_A - U_B = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} p^2 D^3 \quad (3)$$

b) Si en la situación  $A$  liberamos a los dipolos, éstos se alejarán, de modo de aumentar  $D$  y disminuir la energía  $U_A$ . Es decir en la situación  $A$  los dipolos se repelen. En cambio en la situación  $B$ , los dipolos se acercarán de modo de disminuir  $D$  y así disminuir  $U_B$ . Es decir, en la situación  $B$  los dipolos se atraen.

c) En ambos casos la magnitud de la fuerza está dada por  $|dU/dD|$ , por el principio de los trabajos virtuales. Calculando, a partir de (1) y (2), obtenemos

$$|F_A| = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{D^4}$$

repulsiva, y

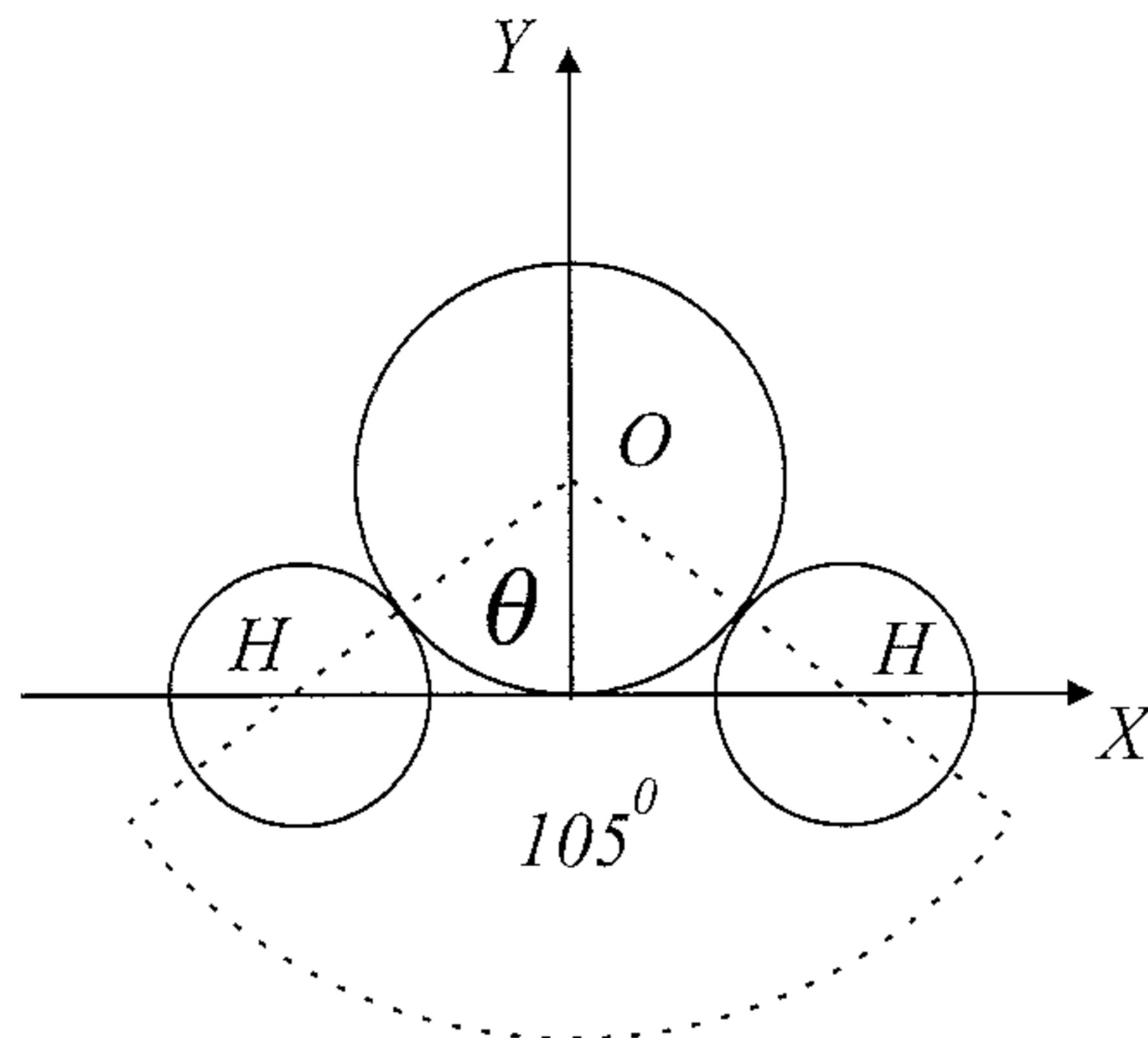
$$|F_B| = \frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{D^4}$$

atractiva.

4. En la molécula de agua ( $H_2O$ ) la distancia entre los núcleos de los átomos de hidrógeno y el núcleo del átomo de oxígeno es  $9,58 \times 10^{-11} \text{ m}$ , y el ángulo entre las rectas que unen los hidrógenos con el oxígeno es  $105^\circ$  (ver figura). Suponga que al formarse la molécula de agua, los electrones de los átomos de hidrógeno son transferidos completamente al átomo de oxígeno, que pasa a formar una distribución con simetría esférica de carga negativa, centrada en su núcleo. De acuerdo a este modelo, calcule el momento dipolar de la molécula de agua. Compare el resultado obtenido con el valor experimental ( $6,2 \times 10^{-30} \text{ [Cb-m]}$ ), y discuta las razones para posibles diferencias entre ambos.

### Solución:

Como la carga total del sistema es nula, el momento dipolar de la molécula de agua es independiente de la posición del origen. Usemos coordenadas cartesianas, de modo que la molécula de agua se encuentra en el plano  $x-y$  con el átomo de oxígeno en la posición  $(0, b)$  y los átomos de hidrógeno en las posiciones  $(-a, 0)$  y  $(a, 0)$  respectivamente. Aquí,  $a = d \sin \theta$  y  $b = d \cos \theta$ , en que  $d$  es la distancia entre los átomos de



oxígeno e hidrógeno (i.e.,  $9,58 \times 10^{-11}$  m). El ángulo  $\theta$  es la mitad del ángulo de abertura, i.e.,  $\theta = 52,5^\circ$ .

Si llamamos  $q_1 = +q$  a la carga de uno de los átomos de hidrógeno y  $\vec{r}_1 = -a\hat{i}$  a su posición,  $q_2 = +q$  a la carga del otro,  $\vec{r}_2 = +a\hat{i}$  a su posición,  $q_3 = -2q$  a la carga del átomo de oxígeno y  $\vec{r}_3 = b\hat{j}$  a su posición, el momento dipolar de la molécula de agua estará dado por

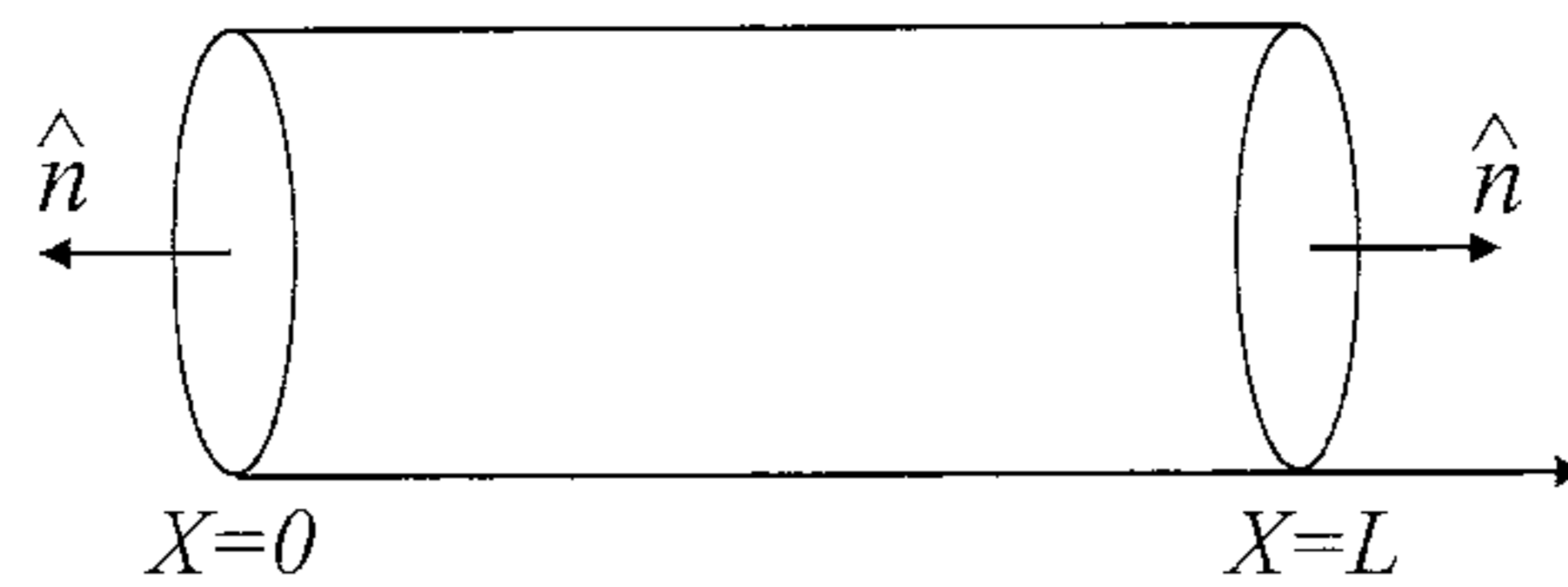
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^3 q_i \vec{r}_i = q(-a\hat{i}) + q(+a\hat{i}) - 2qb\hat{j} = -2qb\hat{j} \quad (1)$$

Aquí,  $q = 1,6 \times 10^{-19}$  Cb es menos la carga del electrón. Como  $qb = qd \cos \theta = 9,33 \times 10^{-30}$  Cb-m, de (1) obtenemos,

$$|\vec{p}| = 18,66 \times 10^{-30} \text{ Cb-m}$$

Este valor es aproximadamente tres veces mayor que el valor experimental. Una de las razones que explica la diferencia es que nosotros hemos supuesto aquí que los átomos son cargas puntuales. En realidad son distribuciones de carga.

**5.** Una varilla delgada de dieléctrico de sección  $A$  se extiende sobre el eje  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = L$ . La polarización de la varilla es a lo largo de su longitud, y está dada por  $P_x = ax^2 + b$ . Encuentre la densidad volumétrica de carga de polarización y la carga superficial de polarización en cada extremo. Demuestre explícitamente que la carga total de polarización se anula en este caso.

**Solución:**

La densidad de carga de polarización en volumen está dada en términos del vector de polarización  $\vec{P}$  por

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (1)$$

Por otra parte, la densidad superficial de carga de polarización está dada en forma general por

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (2)$$

en que  $\hat{n}$  denota la normal hacia afuera de la superficie del dieléctrico. En este problema en particular, el momento dipolar por unidad de volumen (*polarización*) del dieléctrico está dado por

$$\vec{P}(x) = (a x^2 + b)\hat{i} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1) encontramos

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -2ax \quad (4)$$

En cuanto a la densidad superficial de carga de polarización, hay tres superficies de la varilla que considerar: i) la cara  $x = L$ , ii) la cara  $x = 0$ , y iii) el manto. En la cara  $x = L$  la normal es  $\hat{n} = \hat{i}$ . Utilizando (2) y (3) obtenemos,

$$\sigma_{p,1} = aL^2 + b \quad (5)$$

en dicha cara. En la cara  $x = 0$  la normal es  $\hat{n} = -\hat{i}$ , y utilizando nuevamente (2) y (3) obtenemos,

$$\sigma_{p,2} = -b \quad (6)$$

Finalmente, sobre el manto de la varilla  $\hat{n} = \hat{r}$ , y como  $\hat{i}$  es ortogonal a  $\hat{n}$  la densidad superficial de carga de polarización es nula.



La carga total de polarización,  $Q_p$ , está dada por

$$Q_p = \int_V \rho_p dv + \int_S \sigma_p dS$$

en que  $V$  y  $S$  denotan respectivamente el volumen y la superficie de la varilla. Utilizando las expresiones encontradas en (4), (5) y (6), obtenemos

$$\begin{aligned} Q_p &= A \left( \int_0^L \rho_p(x) dx + \sigma_{p,1} + \sigma_{p,2} \right) \\ &= A \left( - \int_0^L 2ax dx + (aL^2 + b) - b \right) \\ &= A \left( -ax^2 \Big|_0^L + aL^2 + b - b \right) = 0 \end{aligned}$$

**6.** En el centro de una cavidad esférica de radio  $a$  practicada en un bloque de material dieléctrico de constante  $\kappa$ , se coloca una carga puntual  $q$ . Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio. Demuestre que la suma de las cargas inducidas y la carga original es  $q/\kappa$ , independiente de  $a$ .

**Solución:**

Como la carga está ubicada precisamente al centro de la cavidad, el campo eléctrico y el vector de desplazamiento tienen simetría esférica, es decir son de la forma

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{D} = D(r)\hat{r}$$

respectivamente, en que  $r$  denota la distancia con respecto al centro de la cavidad y  $\hat{r}$  la dirección radial. Por el teorema de Gauss, y puesto que  $q$  es la única carga libre, tenemos,

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

para todo  $r > 0$ . Utilizando la relación entre el vector de desplazamiento y el campo eléctrico obtenemos,

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{si } 0 < r < a$$

y

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\kappa\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{si } a < r < \infty$$

El interior de la cavidad está vacío y, por lo tanto, la polarización  $\vec{P}$  es cero en ella. En cambio en el dieléctrico  $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$ , de modo que

$$\vec{P} = P(r)\hat{r} = \frac{\kappa - 1}{4\pi\kappa} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

si  $a < r < \infty$ . A partir de (1) obtenemos,

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

donde hemos usado la expresión para la divergencia de un vector radial en coordenadas esféricas,  $\nabla \cdot \vec{P} = (1/r^2)\partial(r^2 P_r)/\partial r$ . La densidad de carga superficial es:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \big|_{r=a} = -\vec{P} \cdot \hat{r} \big|_{r=a} = -\frac{\kappa - 1}{4\pi\kappa} \frac{q}{a^2}$$

La carga total de polarización en el dieléctrico (carga inducida) es:

$$Q_P = 4\pi a^2 \sigma_P = -q \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

de modo tal que

$$q + Q_P = q - q \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{q}{\kappa}$$

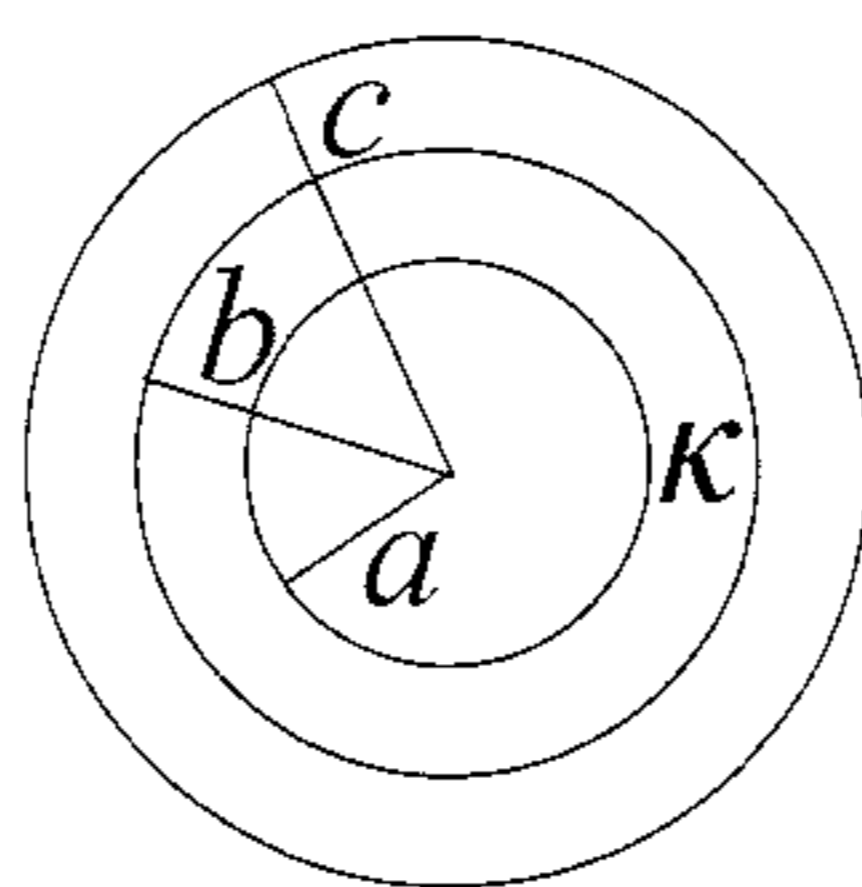
como se pedía demostrar.

**7.** Considere dos cilindros coaxiales, el interior de radio  $a$  y el exterior de radio  $c$ . El espacio  $a < r < b$ , donde  $b < c$ , se llena con un dieléctrico de constante  $\kappa$ . Encuentre la capacidad de este dispositivo por unidad de largo.

**Solución:**

En la figura mostramos una vista superior de los cilindros, el eje  $z$  sale de la página. Esta configuración tiene simetría cilíndrica con respecto al eje común de los cilindros. Si  $(r, \theta, z)$  denotan las coordenadas cilíndricas, entonces por simetría

$$\vec{D}(r) = D(r)\hat{r}$$



en que  $\hat{r}$  es la dirección radial en el plano perpendicular al eje del cilindro y  $r$  la coordenada polar en dicho plano (i.e., la distancia al eje del cilindro). Si denotamos como  $\lambda$  a la densidad de carga por unidad de longitud en el cilindro central de radio  $a$ , y utilizamos el teorema de Gauss, obtenemos de inmediato,

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r} \quad \text{si } a < r < c \quad (1)$$

A partir de (1), utilizando la relación entre el campo eléctrico y el vector de desplazamiento, obtenemos,

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\kappa\epsilon_0 r} \hat{r} \quad \text{si } a < r < b \quad (2)$$

y

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad \text{si } b < r < c \quad (3)$$

A partir de (2) y (3) podemos calcular la diferencia de potencial entre los cilindros conductores. En efecto:

$$\begin{aligned} \Delta V = V(a) - V(c) &= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot \vec{r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\kappa} \ln \frac{b}{a} + \ln \frac{c}{b} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, como  $\lambda = Q/L$ , en que  $L$  es el largo de los cilindros, obtenemos,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{(1/\kappa) \ln(b/a) + \ln(c/b)}$$

**8.** Se llena un condensador de placas planas paralelas con un dieléctrico inhomogéneo de constante dieléctrica  $\kappa(x)$ . El área de las placas es  $A$  y

la distancia entre ellas es  $d$ . Encuentre una expresión formal general para la capacidad. ¿Cuánto vale la capacidad cuando el dieléctrico consiste en dos capas, con espesores  $d_1$  y  $d_2$  y constantes dieléctricas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ ?

**Solución:**

Si despreciamos los efectos de borde tendremos que  $\vec{D} = D(x)\hat{i}$  y también que la carga  $Q$  se distribuye en forma uniforme en las placas. Denotemos por  $\sigma$  a la densidad de carga, i.e.,  $\sigma = Q/A$ . Usando el teorema de Gauss obtenemos de inmediato que

$$\vec{D} = -\sigma\hat{i}$$

entre las placas del condensador, y  $\vec{D} = 0$  fuera de éste. Como  $\vec{D} = \kappa\epsilon_0\vec{E}$ ,

$$\vec{E}(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0\kappa(x)}\hat{i} \quad \text{para } 0 < x < d. \quad (1)$$

Usando (1) obtenemos,

$$\Delta V = V(d) - V(0) = -\int_0^d \vec{E} \cdot \hat{i} dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0 \kappa(x)} dx$$

Como  $\sigma = Q/A$ , obtenemos finalmente,

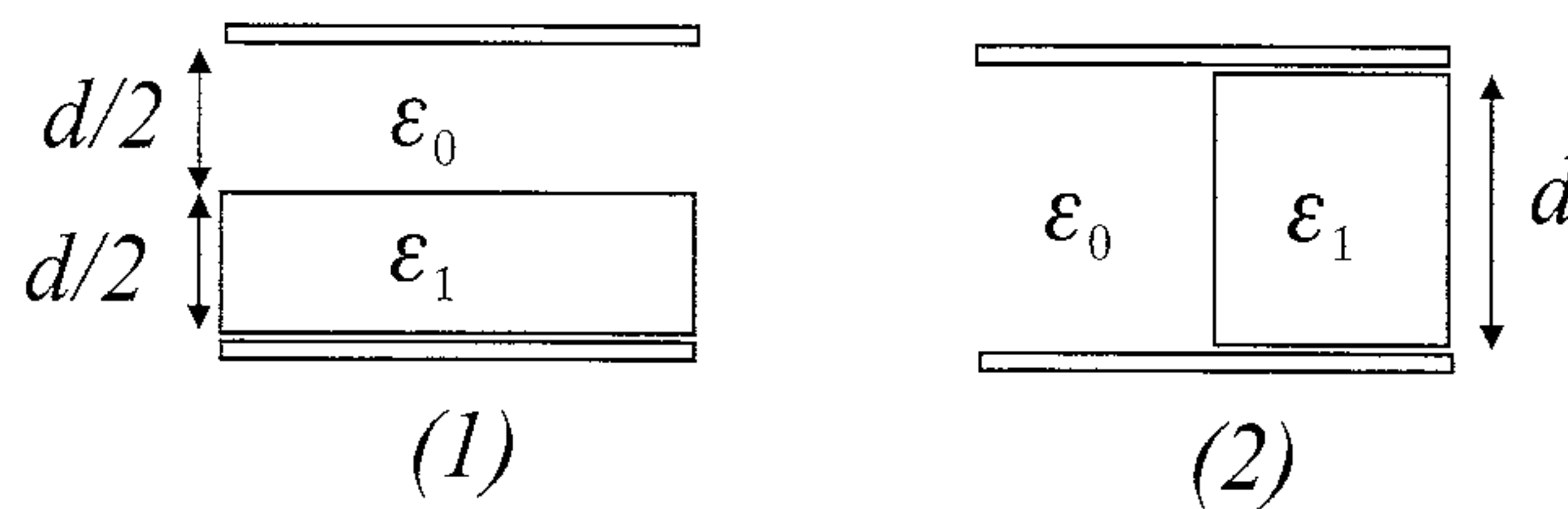
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 A \left( \int_0^d \frac{dx}{\kappa(x)} \right)^{-1} \quad (2)$$

Para el caso particular descrito al final del enunciado del problema, a partir de (2) se tiene que

$$C = \epsilon_0 A \frac{\kappa_1 \kappa_2}{d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1}$$

**9.** Un condensador de placas paralelas de área  $A$  separadas a una distancia  $d$  puede cargarse a un voltaje máximo de 30 kV cuando el material entre las placas es aire (permitividad  $\epsilon_0$ ). Un voltaje mayor produce la ruptura del aire. Cuando este mismo conductor se llena con una sustancia dieléctrica de permitividad  $\epsilon_1 = 6\epsilon_0$  el voltaje máximo al cual se puede cargar es 150 kV.

Calcule el voltaje máximo que se puede aplicar a cada uno de los condensadores de la figura.

**Solución:**

Para determinar el voltaje máximo debemos verificar que el campo no exceda los valores que producen ruptura en cada uno de los materiales. Según los datos del problema el campo eléctrico máximo en el aire es:

$$E_{\text{max aire}} = \frac{\Delta V}{d} = \frac{30}{d} [\text{kV}]$$

y en el dieléctrico de permitividad  $\epsilon_1$  es:

$$E_{\text{max diel}} = \frac{\Delta V}{d} = \frac{150}{d} [\text{kV}]$$

Para el primer condensador en que se han dispuesto el aire y el dieléctrico en paralelo, cada uno con un espesor  $d/2$ , tenemos que el desplazamiento eléctrico es  $\vec{D} = \sigma \hat{z}$ . El campo eléctrico en el aire es  $\vec{E}_{\text{aire}} = (\sigma/\epsilon_0)\hat{z}$  y en el dieléctrico es  $\vec{E}_{\text{diel}} = (\sigma/\epsilon_1)\hat{z}$ . La diferencia de potencial entre las placas del condensador es entonces,

$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 2} + \frac{\sigma d}{\epsilon_1 2}$$

y la densidad de carga inducida es, en términos de la diferencia de potencial:

$$\sigma = \frac{2\Delta V}{d} \frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_1}$$

Reemplazando el valor de  $\sigma$  y el valor de  $\epsilon_1$  en las expresiones para los campos eléctricos dados más arriba, encontramos:

$$E_{\text{aire}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{12 \Delta V}{7 d}$$

y

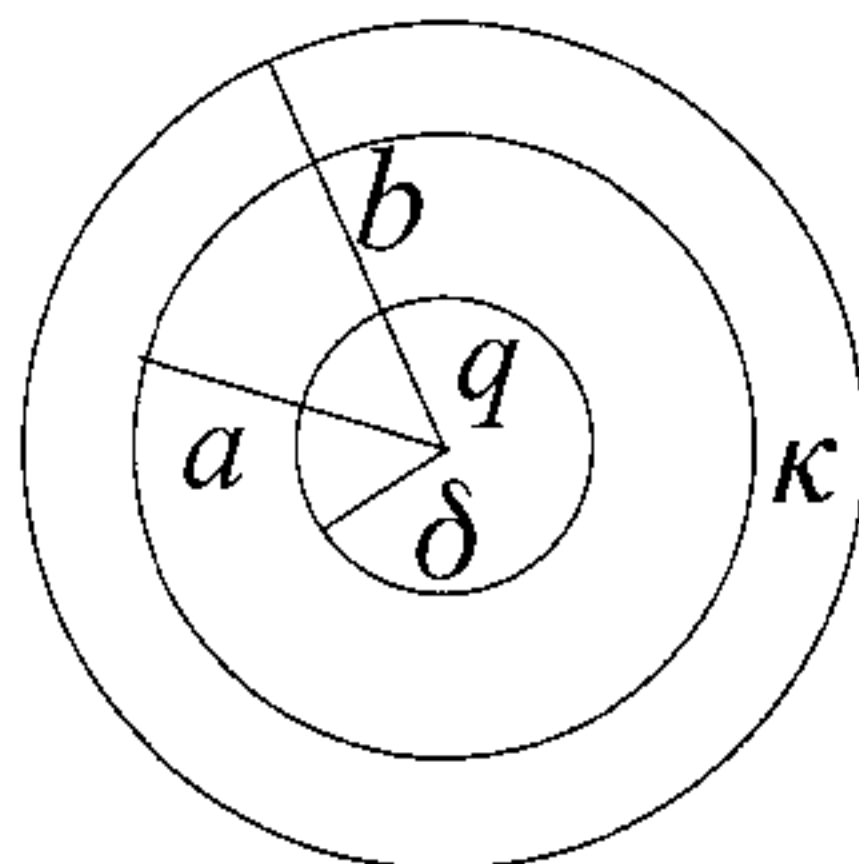
$$E_{\text{diel}} = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{2 \Delta V}{7 d}$$

Para encontrar el voltaje máximo tenemos que pedir que el campo en cada medio sea menor que el valor de ruptura correspondiente. La condición  $E_{aire} < 30/d$  implica  $\Delta V < (105/6)[\text{kV}]$  y  $E_{diel} < 150/d$  implica  $\Delta V < (7 \times 155/2)[\text{kV}]$ . La primera condición es más restrictiva por lo que, para esta disposición de los materiales dieléctricos, la diferencia de voltaje máxima es:

$$\Delta V_{max} = \frac{105}{6}[\text{kV}] = 17,5[\text{kV}]$$

Para el segundo condensador sabemos que  $\Delta V$  es igual en ambos medios. Como el aire no resiste más de  $(30/d)[\text{kV/m}]$ , el voltaje máximo es 30 [kV].

**10.** Considere una cáscara dieléctrica de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ . Se coloca una carga  $q$  en el centro de la cáscara sobre un conductor pequeño, de radio  $\delta$ , como se muestra en la figura. Calcule la energía del sistema y la densidad de carga de polarización en las dos superficies del dieléctrico.



### Solución:

Como el sistema tiene simetría esférica, el campo eléctrico se calcula fácilmente a partir del teorema de Gauss. Tenemos que distinguir 3 regiones: la interior ( $\delta < r < a$ ), la cáscara ( $a < r < b$ ) y la región exterior ( $r > b$ ). El campo eléctrico en cada una de estas regiones está dado por

$$\vec{E}_{int} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{casc} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \kappa r^2} \hat{r}$$

y,

$$\vec{E}_{ext} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

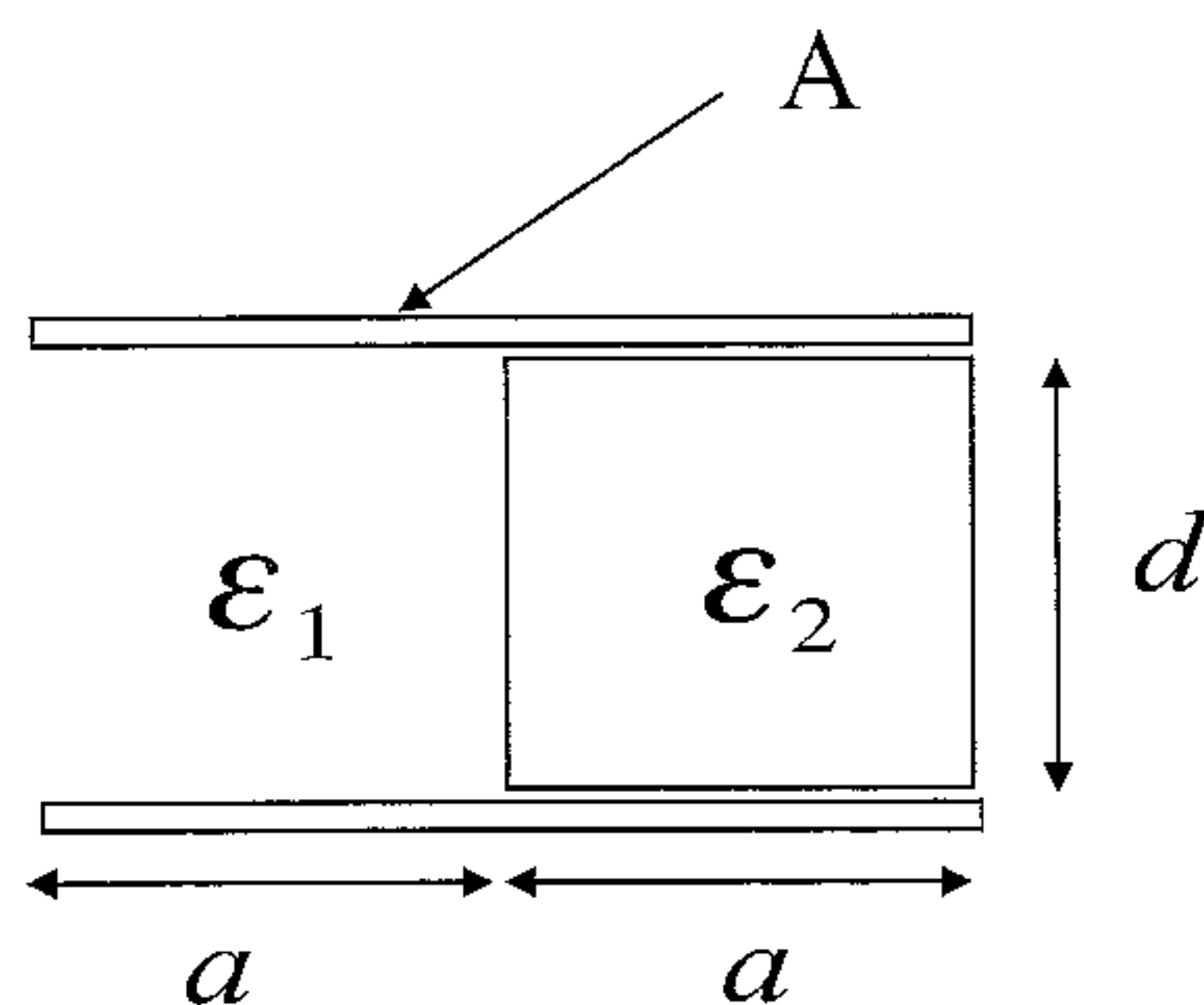
La energía de esta configuración es entonces:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\delta < r < a} \vec{E}_{int}^2 dV + \frac{\kappa \epsilon_0}{2} \int_{a < r < b} \vec{E}_{casc}^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r > b} \vec{E}_{ext}^2 dV$$

Por la simetría esférica de este problema el elemento de volumen se puede escribir como  $dV = 4\pi r^2 dr$  y al hacer las integrales nos queda

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{b-a}{\kappa ab} \right).$$

**11.** En un condensador de placas cuadradas de área  $A = (2a)^2$  se introducen dos dieléctricos que llenan el interior del condensador como se muestra en la figura. Si  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , ¿cuál es la magnitud de la fuerza que debe aplicarse para mantener esta configuración?



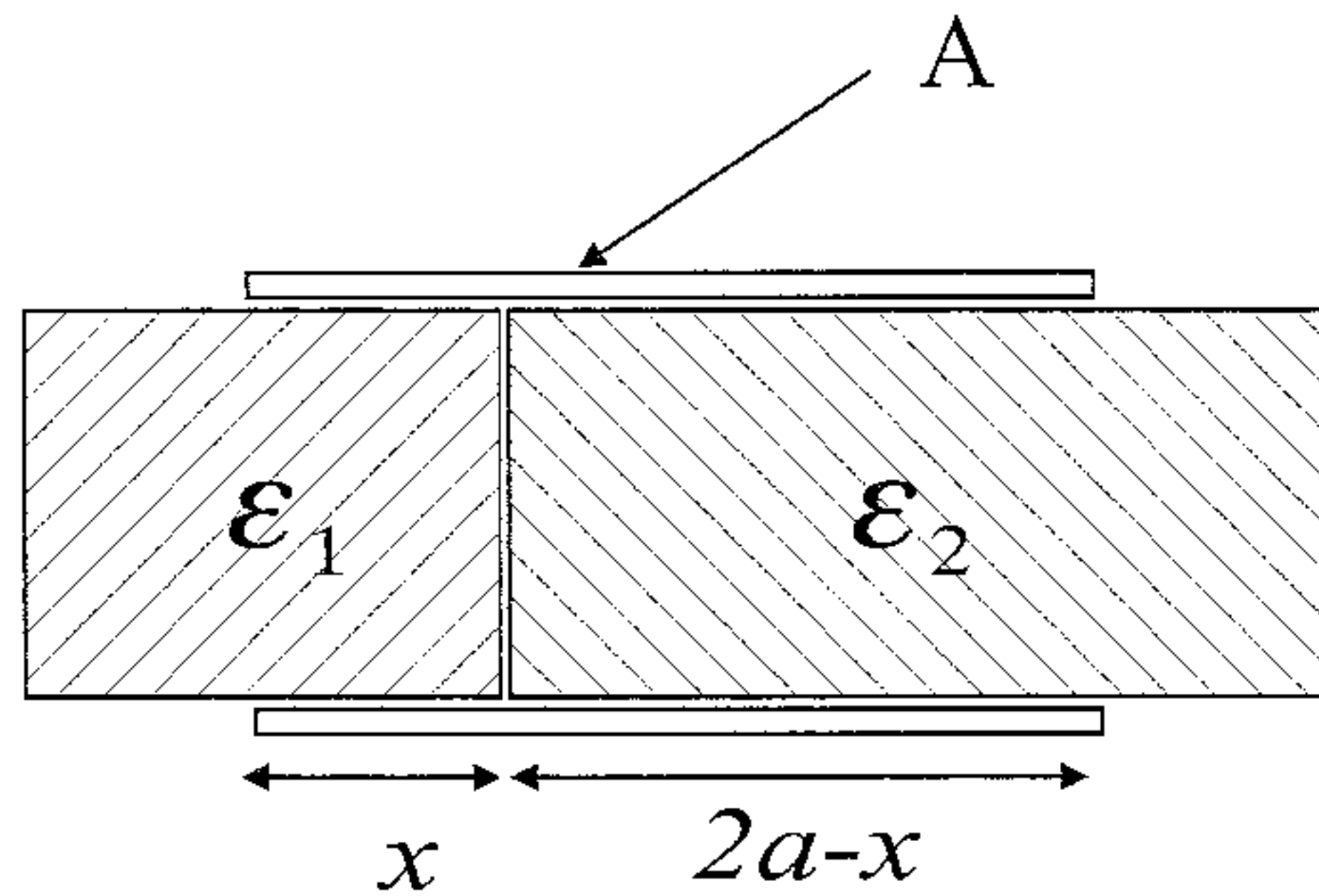
### Solución:

Para calcular la fuerza necesaria para mantener esta configuración necesitamos conocer la energía de la configuración. El sistema tenderá a la situación de menor energía potencial y si se desea que permanezca en una situación de mayor energía habrá que aplicar una fuerza externa para mantenerlo. Primero calculemos entonces la energía. La energía  $U$  en este caso está dada por

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T} \quad (1)$$

donde  $Q$  es la carga que se deposita en el condensador (fija ya que está aislado) y  $C_T$  es la capacidad total del sistema. Por la distribución de los

dieléctricos, podemos ver la configuración como dos condensadores en paralelo, uno lleno con el dieléctrico  $\epsilon_1$  y el otro con el dieléctrico  $\epsilon_2$ . La capacidad de cada uno de estos condensadores es  $C_i = \epsilon_i A_i / d$ , en que llamamos  $A_i$  al área de cada uno. La capacidad total del sistema será entonces  $C_1 + C_2$ . Si  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  el condensador lleno totalmente con  $\epsilon_1$  tendría menor energía que lleno totalmente con  $\epsilon_2$ . Esto nos indica que el dieléctrico 1 ejercerá una fuerza para expulsar al dieléctrico 2 y así quedar en un estado de menor energía. Para mantener la configuración se debe aplicar una fuerza externa que se oponga a ella. Para calcular la fuerza supongamos que el dieléctrico 1 se introduce una distancia  $x$  y el dieléctrico 2 el resto, o sea  $2a - x$ .



La capacidad total en esta situación es:

$$C_T = \epsilon_1 \frac{(2a)x}{d} + \epsilon_2 \frac{(2a)(2a - x)}{d} \quad (2)$$

La fuerza que el sistema ejerce es  $\vec{F}_s = -\vec{\nabla}U$ , y la fuerza que un agente externo debe ejercer para mantener la configuración debe cancelar esta fuerza, o sea,  $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_s = \vec{\nabla}U$ . Usando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos,

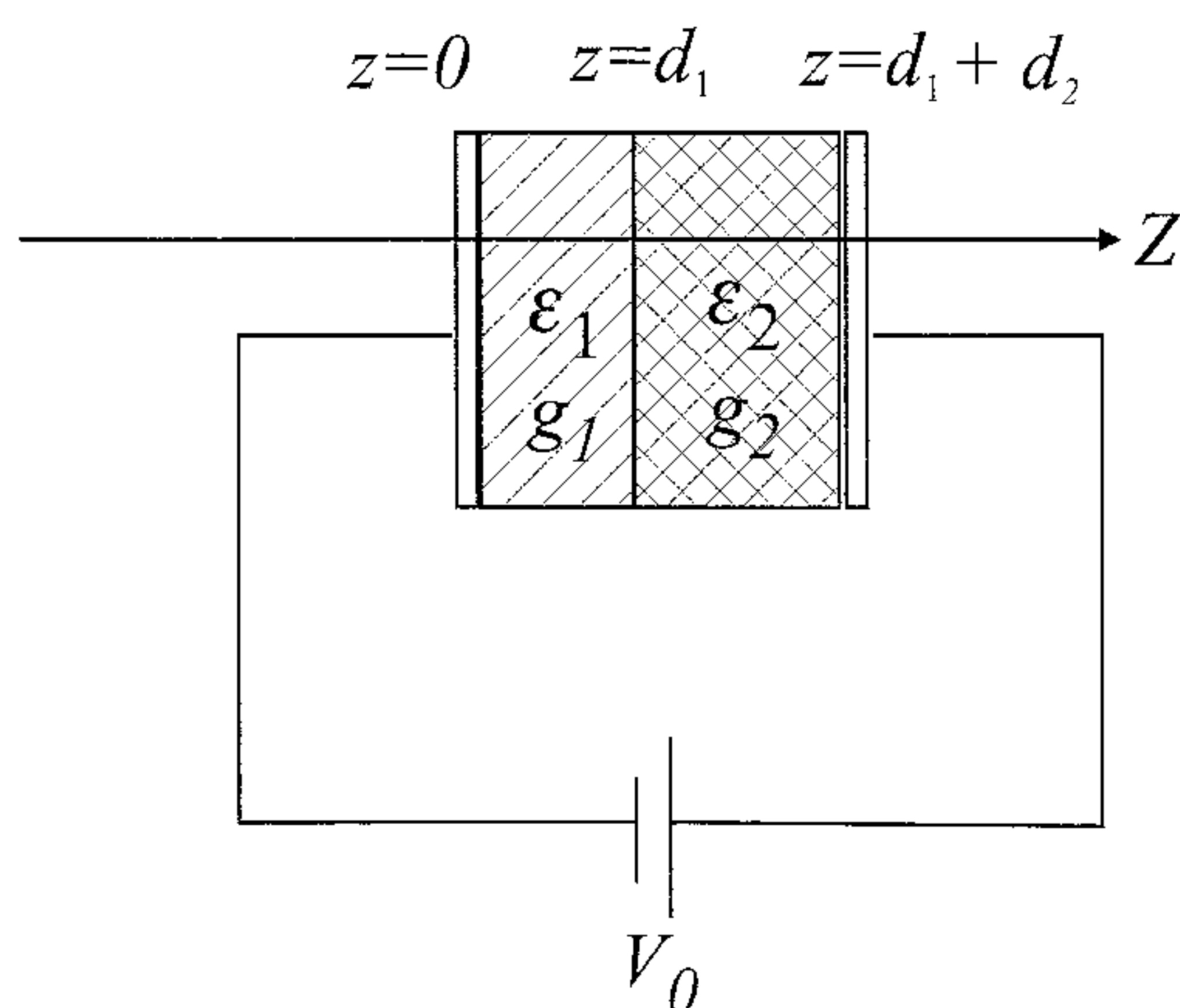
$$\vec{F}_{ext} = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T^2} \frac{\partial C_T}{\partial x} \hat{x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_T^2} \frac{2a(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{d} \hat{x}$$

Vemos que, efectivamente, cuando  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  la fuerza externa se aplica para impedir que el dieléctrico  $\epsilon_1$  expulse el dieléctrico  $\epsilon_2$ . La fuerza externa necesaria cuando cada dieléctrico ocupa la mitad la obtenemos evaluando la expresión para  $\vec{F}_{ext}$  en  $x = a$ , o, lo que es lo mismo, evaluando  $C_T$  en  $x = a$ .



## 6. Corriente Eléctrica

1. Considere un condensador de placas planas paralelas cuyo espacio interno se llena con dos bloques de materiales distintos cuyas permitividades y conductividades valen respectivamente  $(\epsilon_1, g_1)$  y  $(\epsilon_2, g_2)$ , como se indica en la figura.



a) Si entre las placas se establece una diferencia de potencial  $V_0$ , calcule la densidad de cargas libres superficiales en la región interfacial en régimen permanente.

b) Suponga ahora que, después de haberse establecido el régimen permanente, se desconecta la batería y cada placa se conecta a tierra. Determine la evolución temporal de la densidad de carga en la región interfacial.

### Solución:

a) El sistema en cuestión tiene simetría plana (si despreciamos los efectos de borde). Elijamos el eje  $z$  como el eje perpendicular a las placas, y elijamos el origen de modo que la placa de la izquierda se sitúa en  $z = 0$ ,

la placa central en  $z = d_1$ , y la placa de la derecha en  $z = d_1 + d_2$ . En régimen estacionario, la densidad de corriente satisface  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Por la simetría del problema la corriente solamente podría depender de la coordenada  $z$  y ser de la forma  $\vec{J} = J(z)\hat{z}$ . Como la divergencia se anula, la única posibilidad es que sea constante. Tenemos, por lo tanto que,

$$\vec{J} = -J\hat{k} \quad (1)$$

en que el valor de la constante  $J$  debe ser determinado en función de la diferencia de potencial  $\Delta V$  y de las conductividades. Por la ley de Ohm, los campos eléctricos en las dos regiones están dados respectivamente por

$$\vec{E}_1 = -\frac{J}{g_1}\hat{k} \quad (2)$$

y,

$$\vec{E}_2 = -\frac{J}{g_2}\hat{k} \quad (2)$$

Por otra parte los vectores de desplazamiento en las respectivas regiones son:

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1\vec{E}_1 = -\frac{\epsilon_1}{g_1}J\hat{k} \quad (3)$$

y,

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2\vec{E}_2 = -\frac{\epsilon_2}{g_2}J\hat{k} \quad (4)$$

La diferencia de potencial entre las placas del condensador se puede calcular en términos del campo eléctrico en su interior como

$$\Delta V = -\int_0^{d_1+d_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{J}{g_1}d_1 + \frac{J}{g_2}d_2$$

de donde obtenemos,

$$J = \frac{g_1 g_2}{d_1 g_2 + d_2 g_1} \Delta V \quad (5)$$

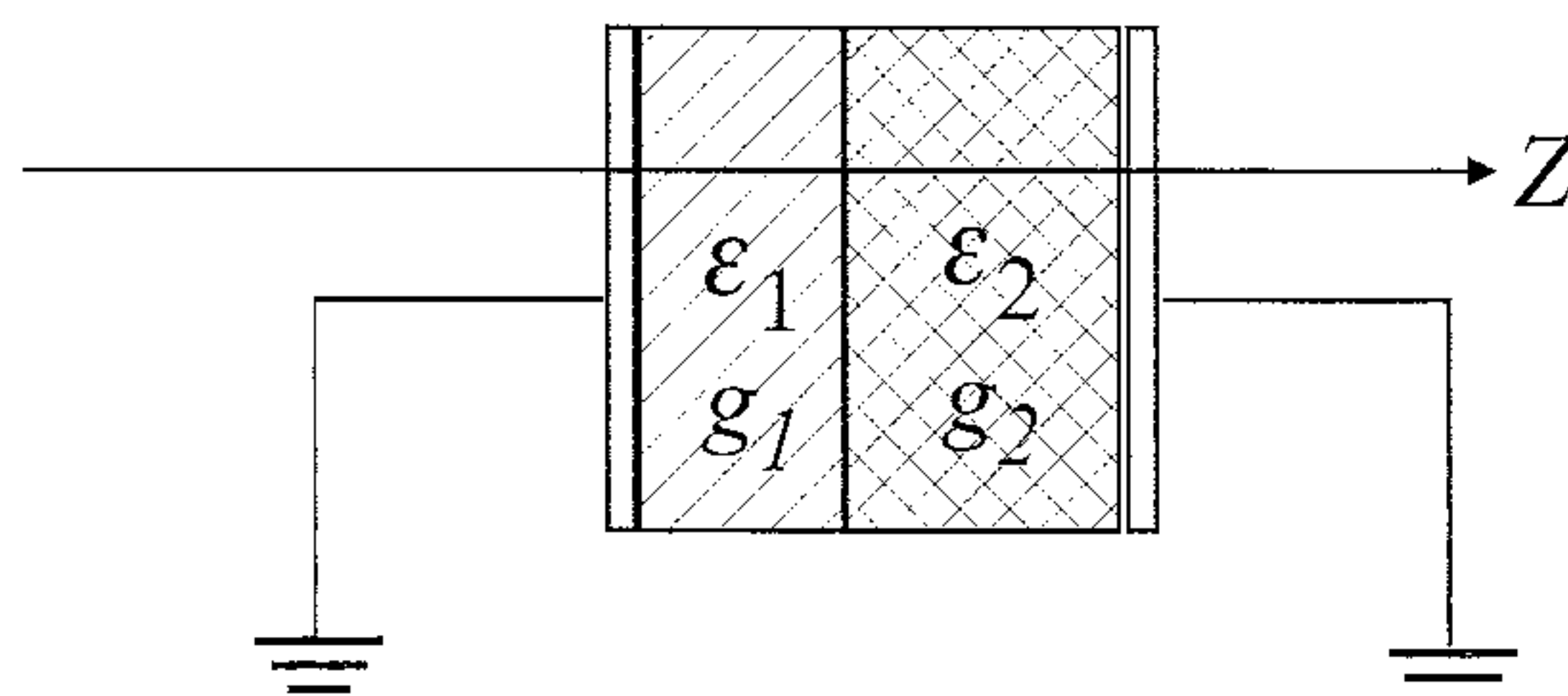
La densidad de carga libre atrapada en la interfaz está dada por

$$\sigma_\ell = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{k} \quad (6)$$

A partir de (3), (4), (5) y (6) obtenemos finalmente,

$$\sigma_\ell = \frac{g_1 g_2}{d_1 g_2 + d_2 g_1} \Delta V \left( \frac{\epsilon_1}{g_1} - \frac{\epsilon_2}{g_2} \right). \quad (7)$$

Vemos que la densidad de carga atrapada es cero si y sólo si  $\epsilon_1/g_1 = \epsilon_2/g_2$ .  
 b) Ahora las placas de la derecha y de la izquierda están conectadas a tierra, en tanto que la placa central tiene una densidad de carga  $\sigma_\ell(0)$  (determinada en la parte [a]).



Llamemos  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  a las densidades de corriente que fluyen desde la placa central hacia las placas de la derecha y de la izquierda respectivamente. Entonces  $\vec{J}_2 = J_2 \hat{k}$  y  $\vec{J}_1 = -J_1 \hat{k}$ , en que las constantes  $J_1$  y  $J_2$  deben ser determinadas. Si llamamos  $\sigma_\ell(t)$  a la densidad de carga depositada en la placa central en un instante cualquiera  $t$ , por la ecuación de continuidad de la corriente (conservación de carga) tenemos,

$$-\frac{\partial \sigma_\ell}{\partial t} = J_1 + J_2 \quad (8)$$

Además, por la ley de Ohm, en cada uno de los medios materiales se tiene,

$$\vec{E}_1 = -\frac{J_1}{g_1} \hat{k} \quad (9)$$

y,

$$\vec{E}_2 = +\frac{J_2}{g_2} \hat{k} \quad (10)$$

respectivamente. Como las dos placas de los extremos están al mismo potencial ( $V = 0$ ), de (9) y (10) obtenemos,

$$\frac{J_1}{g_1} d_1 = \frac{J_2}{g_2} d_2 \quad (11)$$

Tal como en la parte a), a partir de (6), (9), (10), y de la relación entre campo eléctrico y vector de desplazamiento obtenemos,

$$\sigma_\ell = \left( \epsilon_2 \frac{J_2}{g_2} + \epsilon_1 \frac{J_1}{g_1} \right) \quad (12)$$

De las ecuaciones (11) y (12) se tiene,

$$\frac{J_1}{g_1} = \frac{\sigma_\ell d_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \quad (13)$$

y,

$$\frac{J_2}{g_2} = \frac{\sigma_\ell d_1}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \quad (14)$$

Finalmente, reemplazando (13) y (14) en (8) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para  $\sigma_\ell(t)$ ,

$$-\frac{\partial \sigma_\ell}{\partial t} = \left[ \frac{d_1 g_2 + d_2 g_1}{(\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1)} \right] \sigma_\ell \quad (15)$$

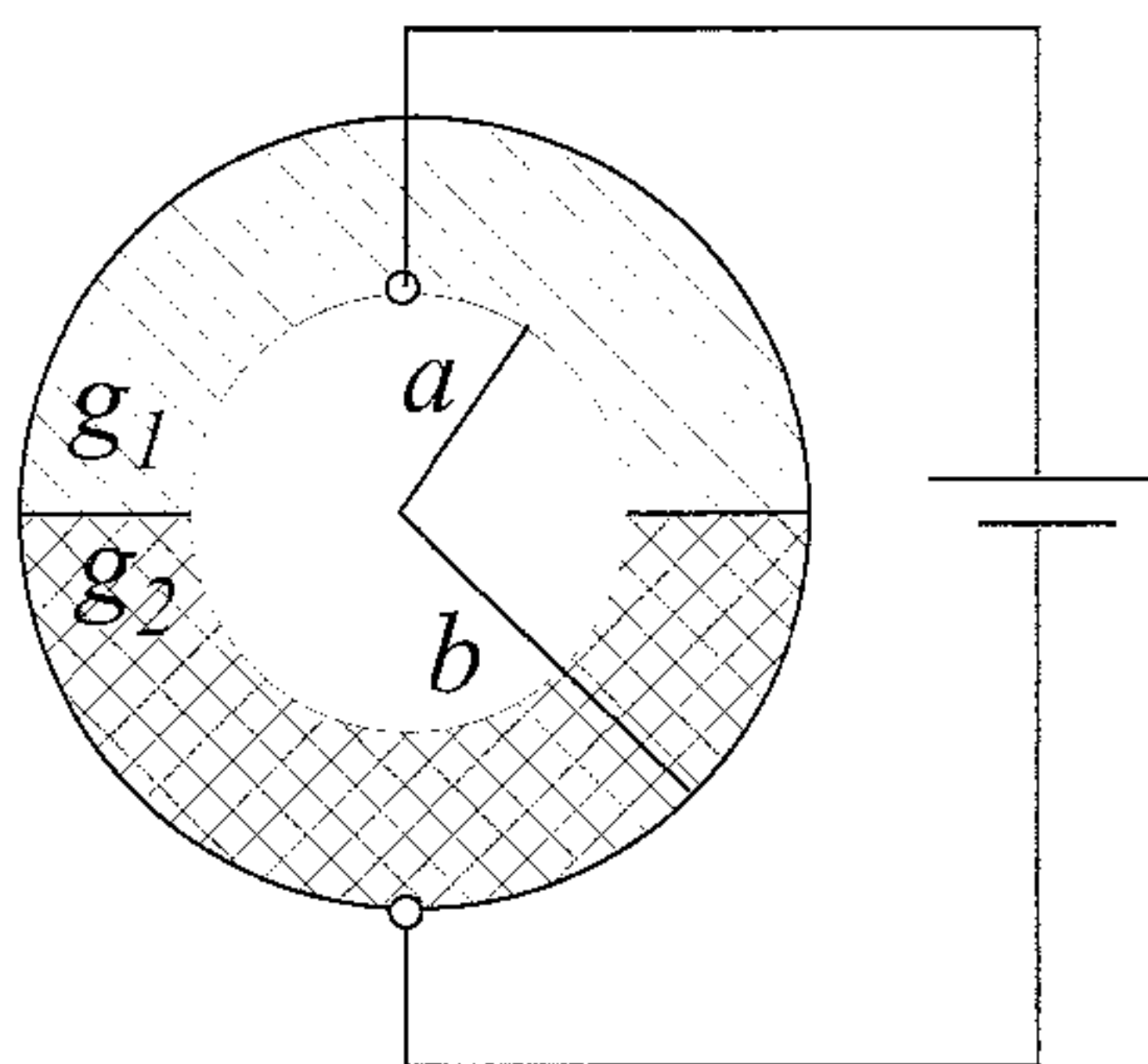
Integrando (15), obtenemos finalmente,

$$\sigma_\ell(t) = \sigma_\ell(0) \exp(-\lambda t) \quad (16)$$

con

$$\lambda = \frac{d_1 g_2 + d_2 g_1}{(\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1)}$$

**2.** Considere dos esferas conductoras (perfectas) concéntricas, de radios  $a$  y  $b$  como se muestra en la figura. La mitad del espacio entre las esferas se llena con un medio de conductividad  $g_1$  y la otra mitad con un medio de conductividad  $g_2$ . Calcule la resistencia equivalente entre los dos conductores.



**Solución:**

Como las componentes tangenciales del campo eléctrico deben ser continuas al atravesar la interfaz entre los dos medios, y como la interfaz es parte de un plano que pasa por el origen, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico en todo el espacio entre los conductores es de la forma

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

para  $a < r < b$ . Aquí  $Q$  es la carga en el conductor interior (la cual no está distribuida homogéneamente en él).

Ahora, por la ley de Ohm, las densidades de corriente en los respectivos medios están dadas por

$$\vec{J}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} g_1 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

y,

$$\vec{J}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} g_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3)$$

respectivamente. La intensidad de corriente que atraviesa una esfera de radio  $a < r < b$ , concéntrica con las esferas conductoras perfectas, está dada por

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 (\vec{J}_1 \cdot \hat{r} + \vec{J}_2 \cdot \hat{r}) \quad (4)$$

en que  $2\pi r^2$  es el área de un hemisferio. De (2), (3) y (4) obtenemos

$$I = \frac{Q}{2\epsilon_0} (g_1 + g_2) \quad (5)$$

Por otra parte, de (1) y de la interpretación del potencial eléctrico, obtenemos,

$$V(a) - V(b) = \Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (6)$$

Finalmente de (5) y (6) obtenemos,

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{g_1 + g_2}$$

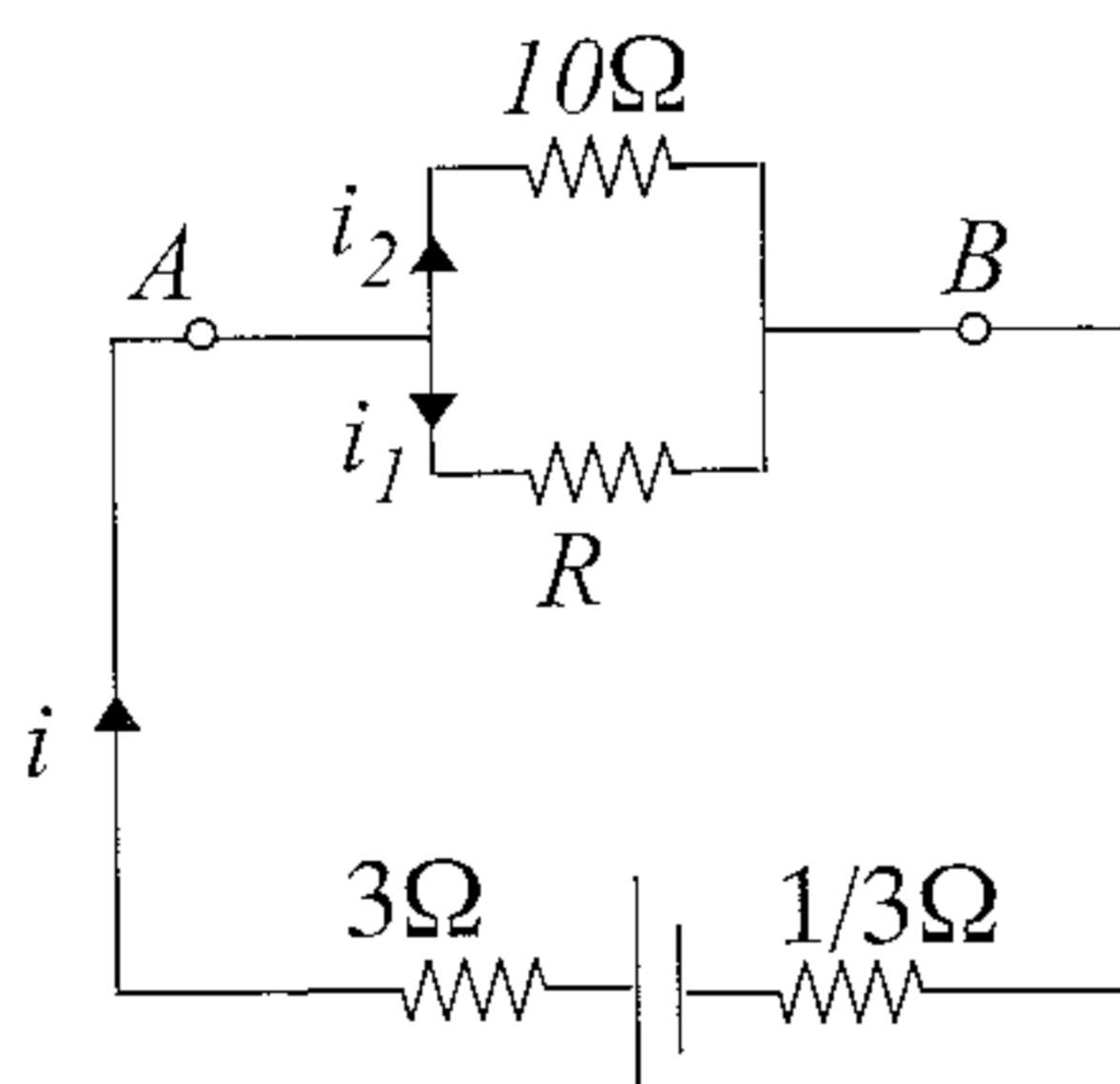
3. Una ampolla de linterna de 0,4 watts se diseña para que trabaje con dos volts entre sus terminales. Una resistencia  $R$  se coloca en paralelo con la ampolla y la combinación se coloca en serie con una resistencia de  $3[\Omega]$  y una batería de 3 volts, y de resistencia interna  $1/3[\Omega]$ . ¿Cuál deberá ser el valor de  $R$  si la ampolla debe funcionar en el voltaje diseñado?

**Solución:**

Primero calculemos la resistencia de la ampolla  $R_a$ . Se supone que la ampolla consume 0,4 W cuando se conecta a una diferencia de potencial de 2 V. Entonces, como la potencia disipada en la ampolla,  $P_a$ , cuando se conecta a una diferencia de potencial  $V_a$ , está dada por

$$P_a = \frac{V_a^2}{R_a} \quad (1)$$

obtenemos de inmediato  $R_a = V_a^2/P_a = 4/0,4 = 10 \Omega$ . A continuación, con el objeto de calcular el valor de la resistencia consideremos el circuito de la figura.



Como deseamos que la diferencia de potencial entre los terminales de la ampolla sea de 2 V, por la ley de mallas, la corriente  $i$  que circula tanto por la batería como por la resistencia de  $3 \Omega$  satisface

$$3 = \left(\frac{1}{3} + 3\right)i + 2 \quad (2)$$

de donde obtenemos,

$$i = \frac{3}{10} = 0,3\text{A} \quad (3)$$

Al llegar al nodo  $B$  de la figura la corriente  $i$  se descompone en una corriente  $i_1$  que circula por  $R$  y una corriente  $i_2$  que circula por la ampolla. Por la ley de Ohm, y puesto que la diferencia de potencial entre

los terminales  $A$  y  $B$  de la ampollita es de 2 V, tenemos

$$i_2 = \frac{2}{R_a} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ A} \quad (4)$$

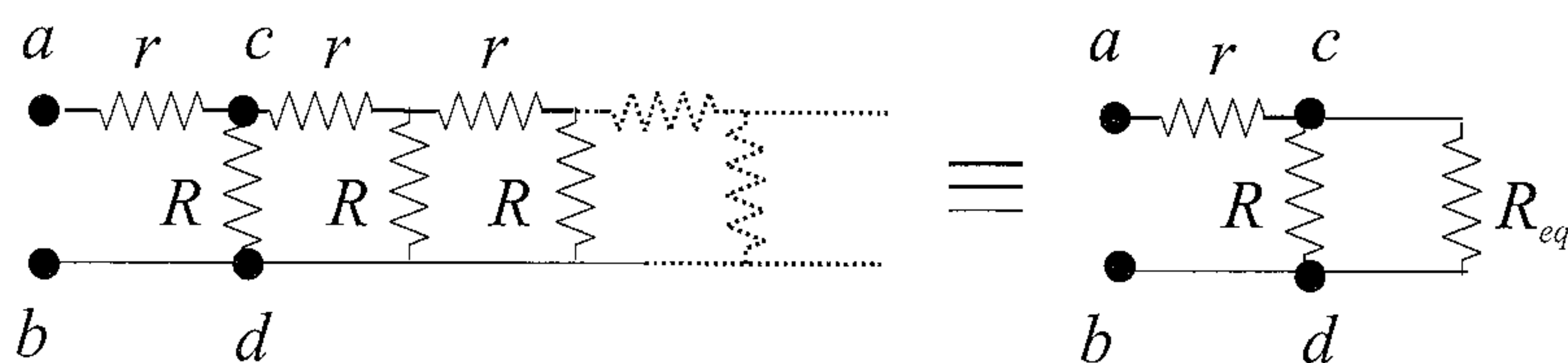
De (3) y (4) obtenemos,

$$i_1 = i - i_2 = 0,1 \text{ A} \quad (5)$$

y, finalmente,

$$R = \frac{2}{i_1} = \frac{2}{0,1} = 20 \Omega$$

4. Una línea de transmisión consiste en un cable sostenido por postes. Si la resistencia del cable entre dos postes es  $r$  y la resistencia de fuga hacia la tierra en cada poste es  $R$ , calcule la resistencia de la línea de transmisión. *Indicación:* Considere que la tierra es un conductor perfecto. Note que como la línea es muy larga, la resistencia no se altera al agregarle un poste y un segmento de cable más.



### Solución:

Como la línea de transmisión es infinita, la resistencia equivalente de la línea vista desde los puntos  $c$  y  $d$  tiene el mismo valor que la resistencia equivalente vista desde los terminales  $a$  y  $b$  (que es la resistencia de la línea de transmisión). Si llamamos  $R_{eq}$  a la resistencia de la línea, la afirmación precedente se puede escribir como

$$R_{eq} = r + \frac{R R_{eq}}{R + R_{eq}} \quad (1)$$

A partir de (1), obtenemos la siguiente ecuación cuadrática para  $R_{eq}$ ,

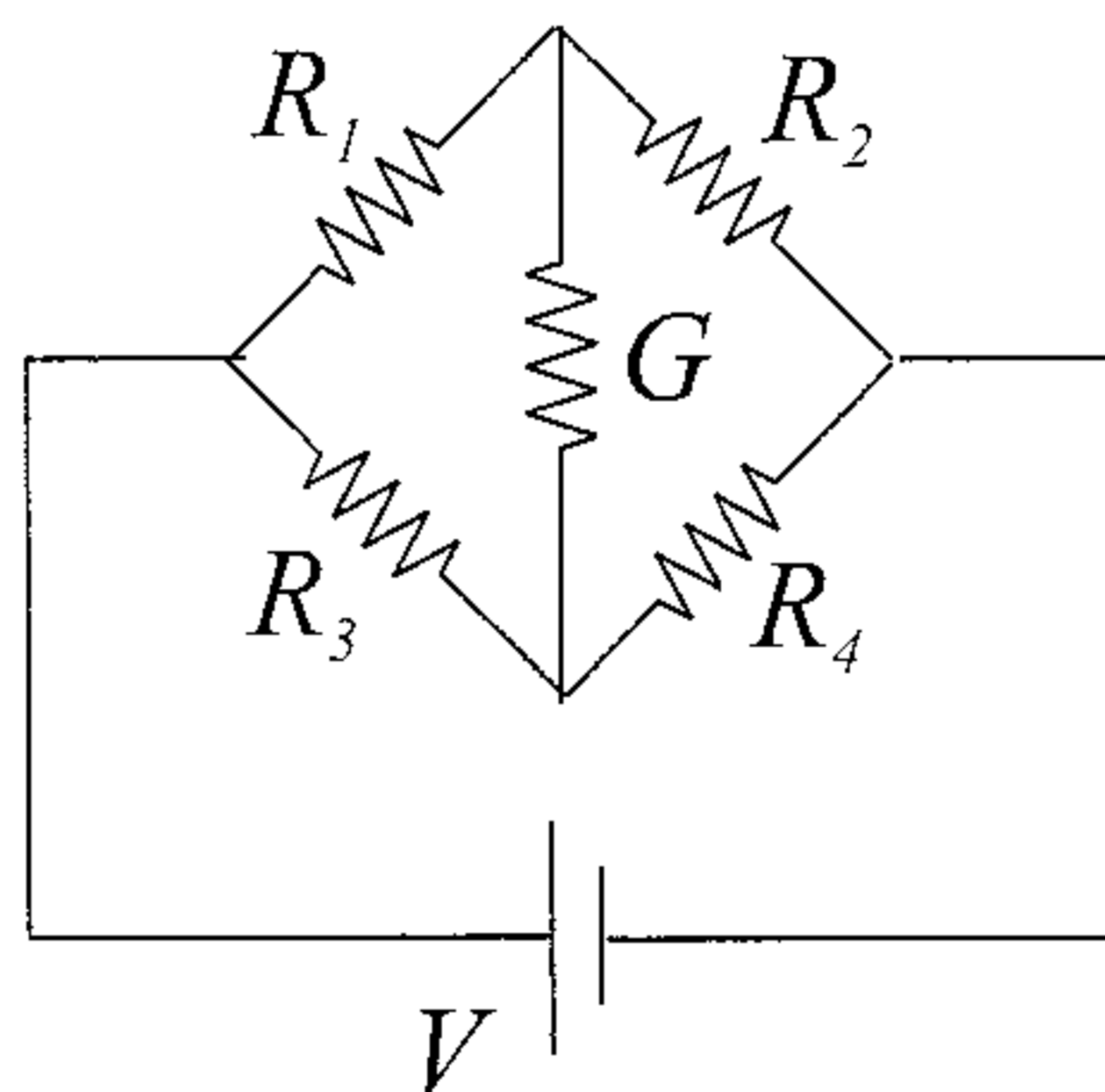
$$R_{eq}^2 - r R_{eq} - r R = 0 \quad (2)$$

La ecuación (2) admite dos soluciones, pero una de ellas es negativa y por lo tanto no es una solución real del problema. La solución positiva es:

$$R_{eq} = \frac{1}{2} \left( r + \sqrt{r^2 + 4rR} \right)$$

que es, por lo tanto, la resistencia de la línea.

**5. Puente de Wheatstone:** Resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ , y  $R_3$ , cada una de  $10[\Omega]$ , están colocadas en tres de los cuatro brazos del circuito que se muestra en la figura (Puente de Wheatstone). El valor de la resistencia en el cuarto brazo ha sido ajustado de manera que la corriente  $i_G$  en el galvanómetro sea nula (es decir, el puente está *balanceado*). A continuación, la resistencia  $R_3$  es reemplazada por una resistencia desconocida  $R_X$  y la condición de balance ( $i_G = 0$ ) se recupera conectando una resistencia de  $1,0123 \times 10^4 \Omega$  en paralelo con  $R_4$ . ¿Cuál es el valor de  $R_X$ ?



**Solución:**

Llamemos  $i_1$  a la corriente que circula por  $R_1$ . Cuando el puente está balanceado, no circula corriente por  $G$ , de modo que la corriente que circula por  $R_2$  es también  $i_1$ . Llamemos  $i_2$  a la corriente que circula por  $R_3$  (y también por  $R_4$ ). Para que no circule corriente por  $G$  es necesario que la diferencia de potencial entre los terminales de  $G$  sea nula. Para asegurar esto necesitamos que la diferencia de potencial a través de  $R_1$  sea igual a la diferencia de potencial a través de  $R_3$ , y que las diferencias a través de  $R_2$  y  $R_4$  sean también iguales. Esto es:

$$R_1 i_1 = R_3 i_2 \tag{1}$$



y

$$R_2 i_1 = R_4 i_2 \quad (2)$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, encontramos la condición de *balance* para el puente,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (3)$$

Si  $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$ , de la ecuación de balance (3) tenemos de inmediato que  $R_4 = 10\Omega$ . Si  $R_3$  es reemplazado por  $R_x$  y  $R_4$  por el paralelo entre  $R_4$  y  $R$  (i.e., por  $R_4 R / (R_4 + R)$ ), de la condición de balance (3) obtenemos,

$$\frac{R_1}{R_x} = \frac{R_3}{R_4 R} (R_4 + R) \quad (4)$$

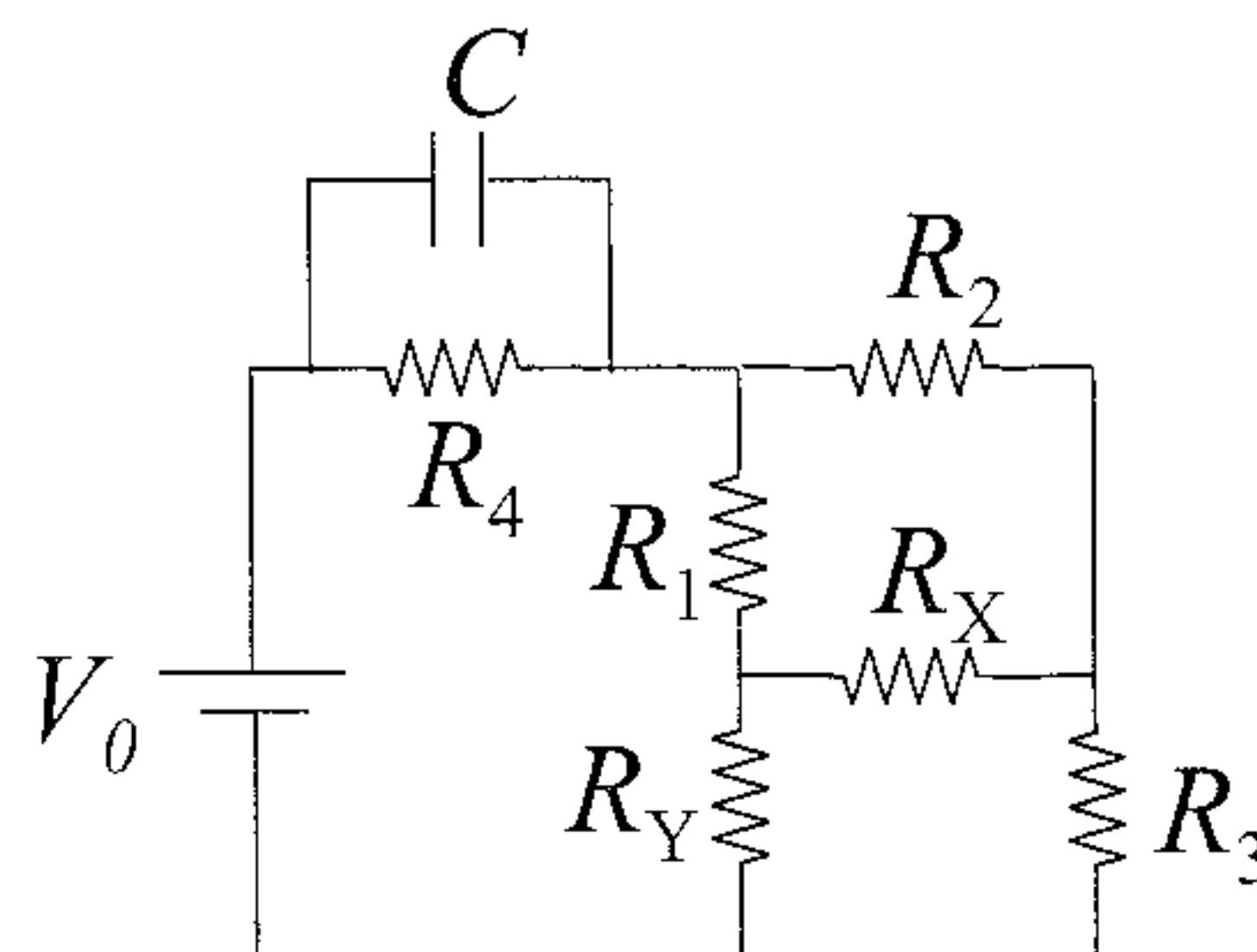
De (4) finalmente obtenemos,

$$R_x = \frac{R_1 R_4 R}{R_3 (R_4 + R)} = \frac{10R}{10 + R} = 9,9901\Omega$$



6. a) En el circuito de la figura, se pide determinar el valor de la resistencia  $R_Y$  como función de los valores de las otras resistencias, cuando se cumple la condición que la corriente por  $R_X$  es nula.

b) Con la misma condición anterior, se pide calcular la carga almacenada en el condensador  $C$  en régimen permanente, como función de  $V_0$  y de las resistencias.



### Solución:

a) Sea  $i_1$  la corriente que circula por  $R_1$  y  $R_Y$ . Sea  $i_2$  la corriente que circula por  $R_2$  y  $R_3$ . (Recuerde que la corriente por  $R_X$  es cero). Para

que la corriente por  $R_X$  sea nula, los puntos  $A$  y  $B$  deben estar al mismo potencial. Así, debe tenerse que,

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad (1)$$

y

$$R_Y i_1 = R_3 i_2 \quad (2)$$

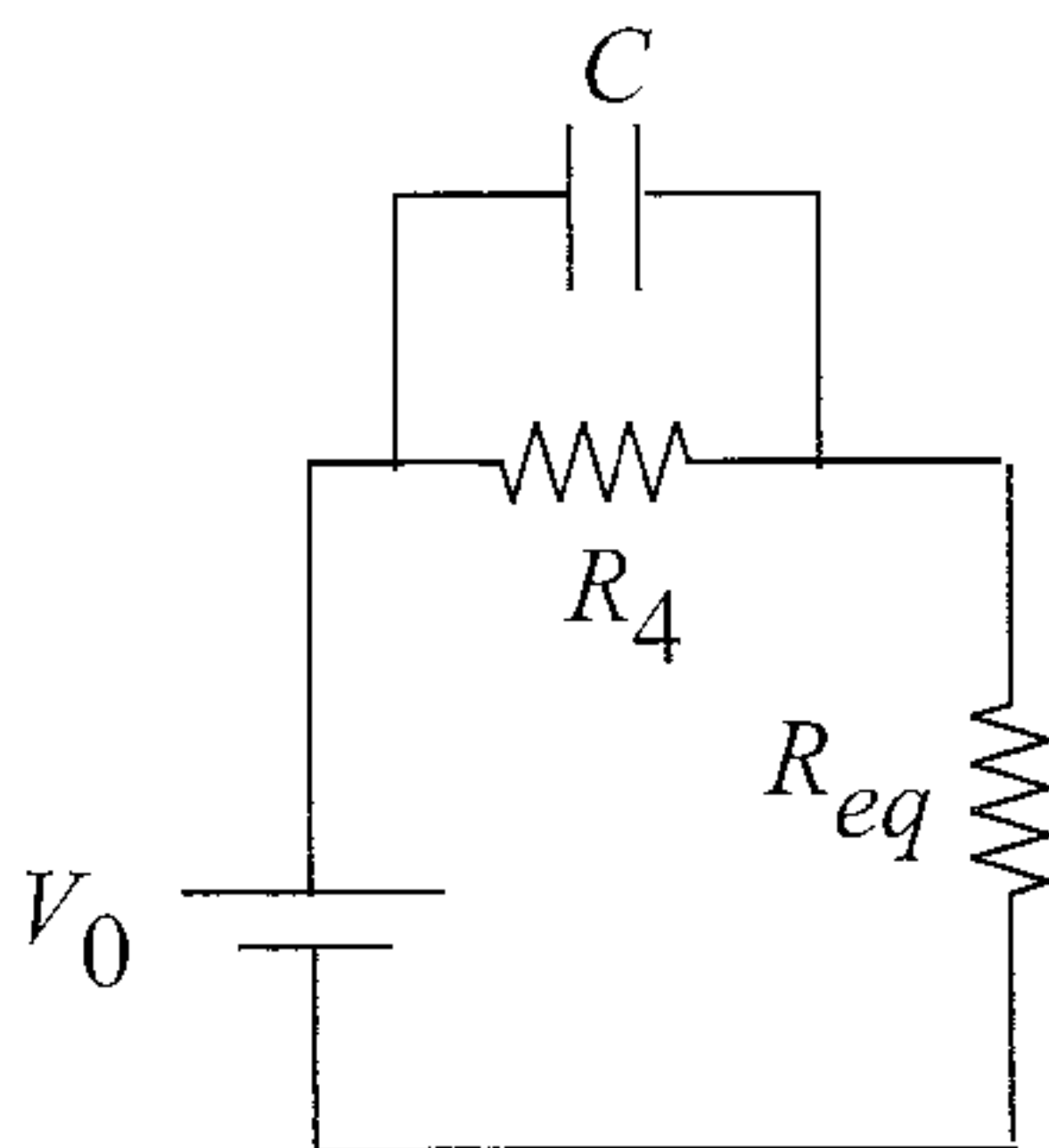
Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene,

$$\frac{R_1}{R_Y} = \frac{R_2}{R_3}$$

y, por lo tanto,

$$R_Y = \frac{R_1 R_3}{R_2} \quad (3)$$

b) En régimen permanente no circula corriente por la rama del condensador. Para calcular la corriente que circula por  $R_4$  basta considerar el circuito de la figura, en que  $R_{eq}$  es la resistencia equivalente de las resistencias  $R_2 + R_3$  y  $R_1 + R_Y$  puestas en paralelo, es decir,



$$R_{eq} = \frac{(R_2 + R_3)(R_1 + R_Y)}{R_2 + R_3 + R_1 + R_Y} \quad (4)$$

Reemplazando el valor de  $R_Y$  encontrado en a) (ecuación [3]) en (4) obtenemos,

$$R_{eq} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2} \quad (5)$$

Entonces, del circuito de la figura, por la ley de Ohm, tenemos,

$$i = \frac{V_0}{R_4 + R_{eq}} \quad (6)$$

Pero, por la ecuación característica del condensador,

$$Q = C\Delta V \quad (7)$$

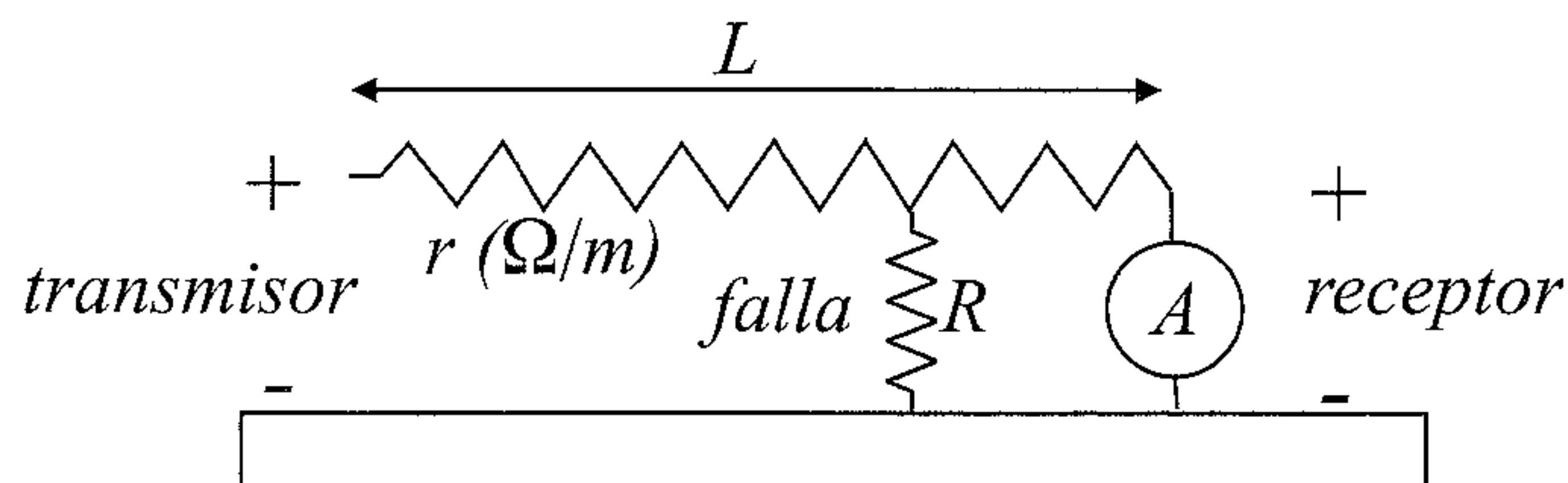
con  $\Delta V = R_4 i$ , puesto que  $C$  está en paralelo con  $R_4$ . Entonces, usando (6) y (7) se tiene que,

$$Q = C V_0 \frac{R_4}{R_4 + R_{eq}}$$

finalmente, reemplazando el valor de  $R_{eq}$  encontrado en (5) obtenemos,

$$Q = C V_0 \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_4(R_1 + R_2) + R_1(R_2 + R_3)}$$

7. Considere una línea telegráfica de resistencia  $r$  por unidad de longitud. Esta línea tiene una falla de resistencia  $R$  en algún punto de ella (ver figura). Demuestre que la corriente que lee el instrumento A conectado a un extremo de la línea es mínima cuando la falla se encuentra a media distancia entre el transmisor y el receptor. Desprecie la resistencia del instrumento.



### Solución:

Llamemos  $x$  a la posición donde ocurre la falla (medida desde el transmisor). Entonces la resistencia total desde el transmisor hasta la falla es  $R_1 = rx$  y desde la falla hasta el receptor es  $R_2 = r(L - x)$ . Si llamamos  $i_1$  a la corriente que circula por  $R_1$ ,  $i_2$  a la corriente que circula por  $R_2$  e  $i$  a la corriente que circula por la falla, por las leyes de Kirchoff tenemos,

$$i_1 = i + i_2 \quad (1)$$

$$V_0 = R_1 i_1 + R i = (rx)i_1 + R i \quad (2)$$

y,

$$R i = R_2 i_2 = r(L - x) i_2 \quad (3)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos

$$i_2 = \frac{V_0 R}{r(r L x - r x^2 + R r L)} \quad (4)$$

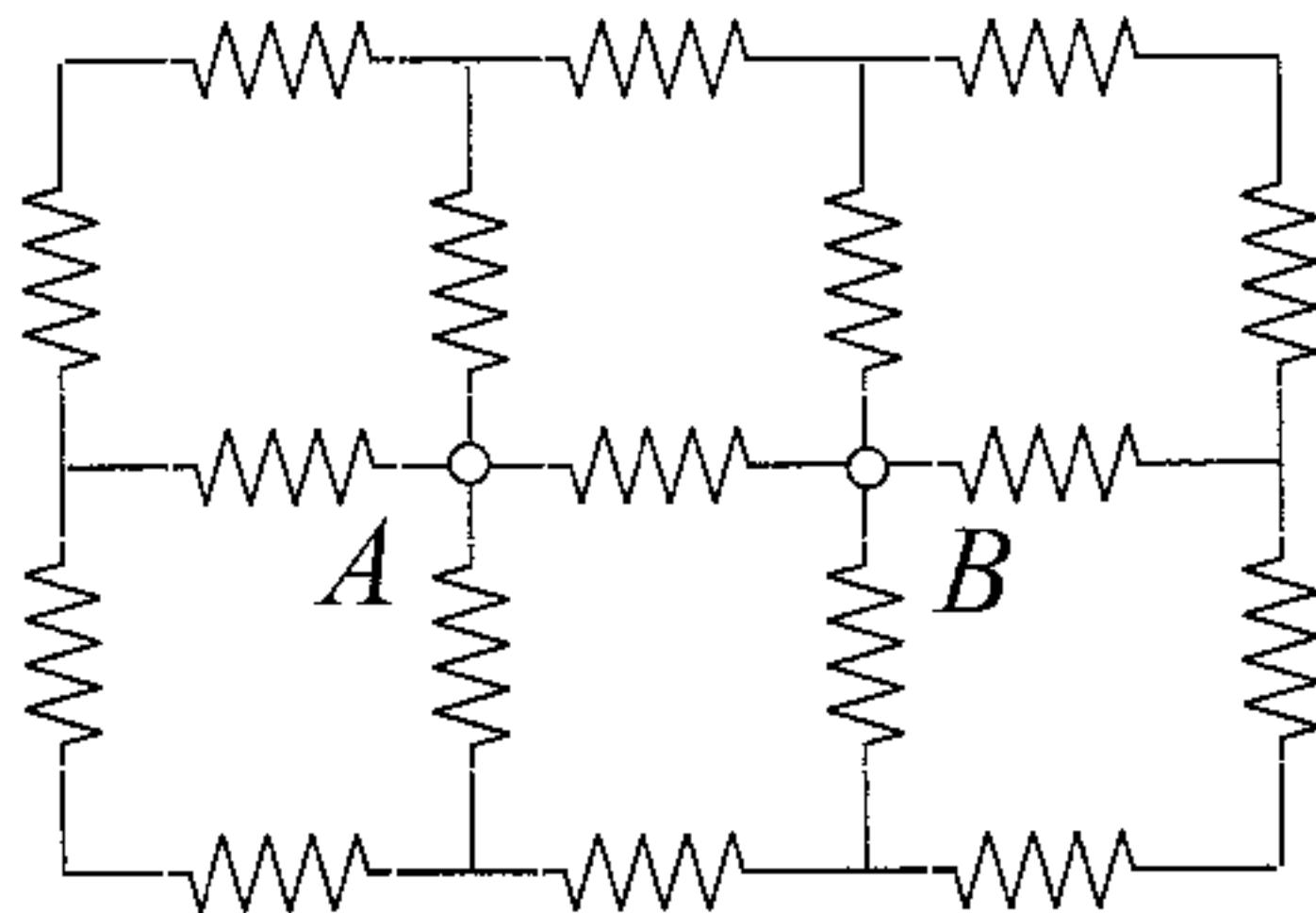
La corriente  $i_2$  es máxima cuando el denominador de (4) es mínimo, es decir, cuando:

$$\frac{d}{dx} (r L x - r x^2 + R L) = r L - 2 r x = 0 \quad (5)$$

De (5) obtenemos  $x = L/2$ , que era lo que se pedía demostrar. Reemplazando este valor en (4), obtenemos que la corriente por el instrumento es, en este caso,

$$i_{2\min} = \frac{V_0 R}{r L (R + [(r L)/4])}$$

**8.** Considere un reticulado plano infinito como se indica en la figura. En cada rama del reticulado se coloca una resistencia  $r$ . Encuentre la resistencia equivalente entre dos puntos vecinos  $A$  y  $B$  como se indica en la figura.



### Solución:

A primera vista este problema parece complicado de resolver, pues uno trata de encontrar la resistencia equivalente utilizando composición de resistencias en serie o en paralelo, o utilizar de alguna manera ideas de simetría. Sin embargo el problema es muy simple de resolver si uno recurre al principio de superposición. En efecto, podemos pensar en la fuente

que alimenta a los vértices adyacentes  $A$  y  $B$  de la malla como consistiendo de dos partes. Por una parte uno inyecta una corriente  $I$  por el vértice  $A$  y por otra extrae una corriente  $I$  (o si queremos pensarlo de esa manera, inyecta una corriente  $-I$ ) del vértice adyacente  $B$ . Ahora, por el principio de superposición, la respuesta de la malla a esta inyección de corriente, es lineal en las fuentes. Así, si sabemos cuánto vale la corriente por una rama cualquiera pero fija del reticulado cuando solo inyectamos la corriente  $I$  por  $A$  (digamos que esa corriente es  $i_1$ ) y también sabemos cuánto vale la corriente que circula por esa misma rama cuando sólo extraemos una corriente  $I$  por  $B$  (digamos que esa corriente es  $i_2$ ), la corriente que circulará por la rama fija cuando a la vez inyectamos una corriente  $I$  por  $A$  y sacamos una corriente  $I$  por  $B$  será precisamente  $i_1 + i_2$ .

Ahora bien, cuando inyectamos una corriente  $I$  por el vértice  $A$ , dada la simetría del reticulado, las corrientes que circulan por cada una de las ramas que confluyen a  $A$  son  $I/4$  (saliendo de  $A$ ). Análogamente cuando extraemos una corriente  $I$  por el vértice  $B$ , las corrientes que circulan por cada una de las ramas que confluyen a  $B$  son  $I/4$  (entrando a  $B$ ). Entonces, usando el principio de superposición, cuando tenemos la fuente de verdad (i.e., inyección por  $A$  y extracción por el vértice vecino  $B$ ), la corriente que circula por la rama  $AB$  es precisamente  $I/4 + I/4 = I/2$ , yendo desde  $A$  hacia  $B$ .

Si la resistencia de cada rama del reticulado es  $r$ , la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$  es  $r I/2$  (por la ley de Ohm). Así pues, tenemos,

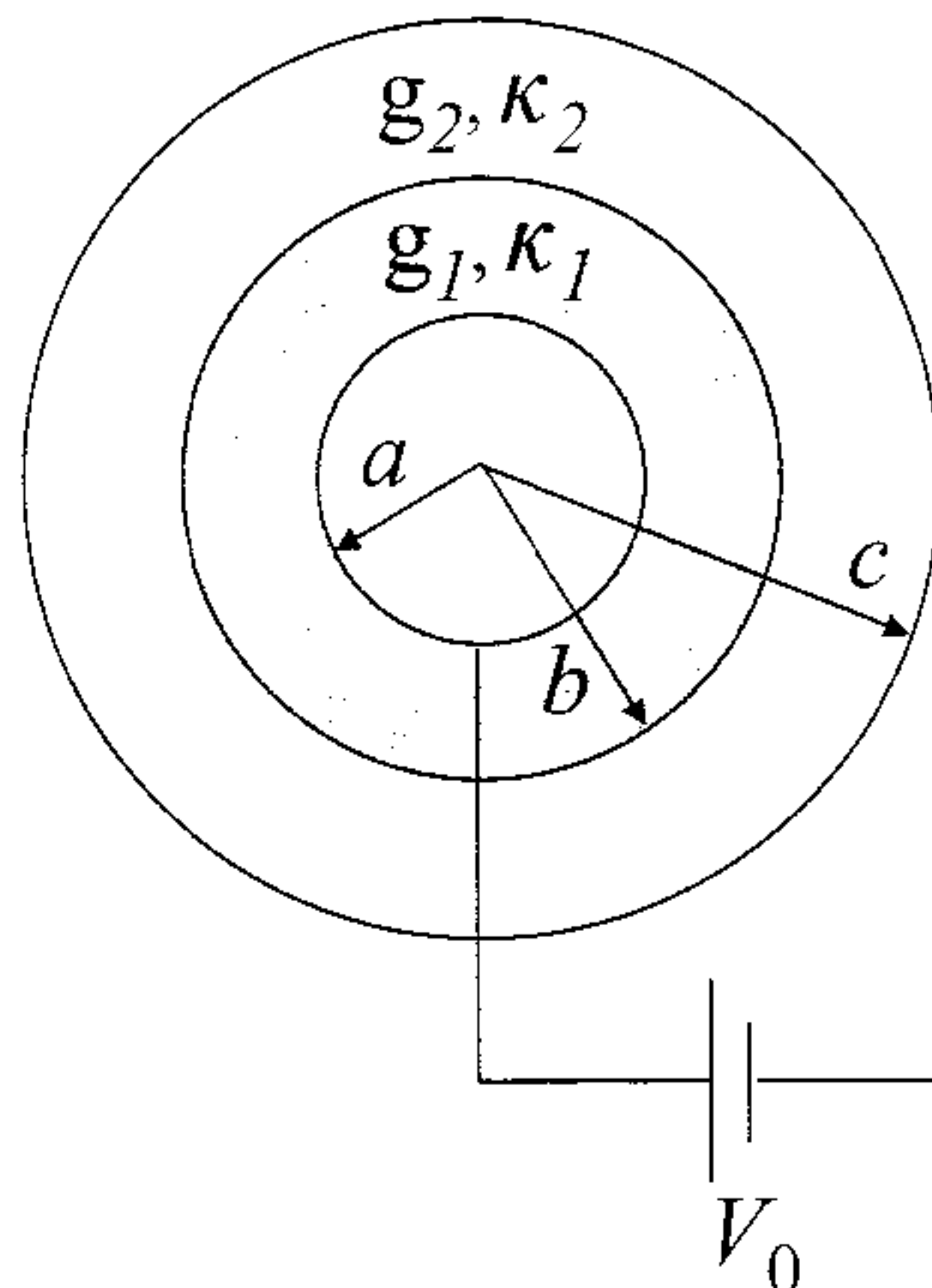
$$V = r \frac{I}{2} = \frac{r}{2} I = R_{eq} I$$

de donde resulta que, finalmente,

$$R_{eq} = \frac{r}{2}$$

Invitamos al lector a encontrar la resistencia equivalente entre dos vértices vecinos de un reticulado triangular (en que en cada uno de las ramas del reticulado se ha colocado una resistencia  $r$ ). También se puede hacer lo propio con una red en forma de *panal de abeja*, i.e., una red hexagonal. Finalmente, se puede hacer algo similar con una red cúbica en tres dimensiones.

9. Se tienen dos cascarones esféricos conductores perfectos de radios  $a$  y  $c$  ( $a < c$ ). El espacio entre conductores se llena con dos materiales dieléctricos no perfectos de constantes dieléctricas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  y conductividades  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente, como se muestra en la figura. Calcule:



- i) La resistencia entre los electrodos (conductores perfectos).
- ii) La densidad de carga eléctrica libre acumulada entre los materiales dieléctricos (superficie de radio  $b$  en la figura), cuando la diferencia de potencial entre los conductores es  $V_0$ .

**Solución:**

i) Para calcular la resistencia debemos calcular la diferencia de voltaje en términos de la intensidad de corriente. El factor de proporcionalidad es la resistencia. Para calcular la diferencia de potencial necesitamos conocer el campo eléctrico, el cual para un conductor de conductividad  $g$  está dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{g}$$

donde  $\vec{j}$  es la densidad de corriente.

La densidad de corriente se puede calcular si se supone conocida la intensidad de corriente  $I$ . Supongamos entonces que por los conductores circula una corriente constante  $I$ . Por la simetría del problema, la corriente y la densidad de corriente serán radiales,  $\vec{j} = j(r)\hat{r}$ . La corriente  $I$  que atraviesa una esfera de radio  $r$  se relaciona con la densidad de corriente por

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^{4\pi} j(r)r^2 d\Omega = 4\pi j(r)r^2$$

de donde obtenemos el campo eléctrico (en cada región con el correspondiente valor de  $g$ )

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{g} = \frac{I}{4\pi g r^2} \hat{r} \quad (1)$$

La diferencia de potencial entre  $r = a$  y  $r = c$  es  $V_0$ , que está dada por:

$$\begin{aligned} V_0 = V(a) - V(c) &= \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{I}{4\pi g_1 r^2} dr + \int_b^c \frac{I}{4\pi g_2 r^2} dr \\ &= \frac{I}{4\pi g_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{I}{4\pi g_2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

La ley de Ohm es  $I = V_0/R$ ; de la expresión para  $V_0$  identificamos

$$R = \frac{1}{4\pi g_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4\pi g_2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

b) La densidad de carga libre acumulada en la interfaz que separa los materiales es:

$$\sigma_{\text{libre}} = (\vec{D}_2(b) - \vec{D}_1(b)) \cdot \hat{r} \quad (2)$$

expresión que se obtiene a partir de la ley de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico

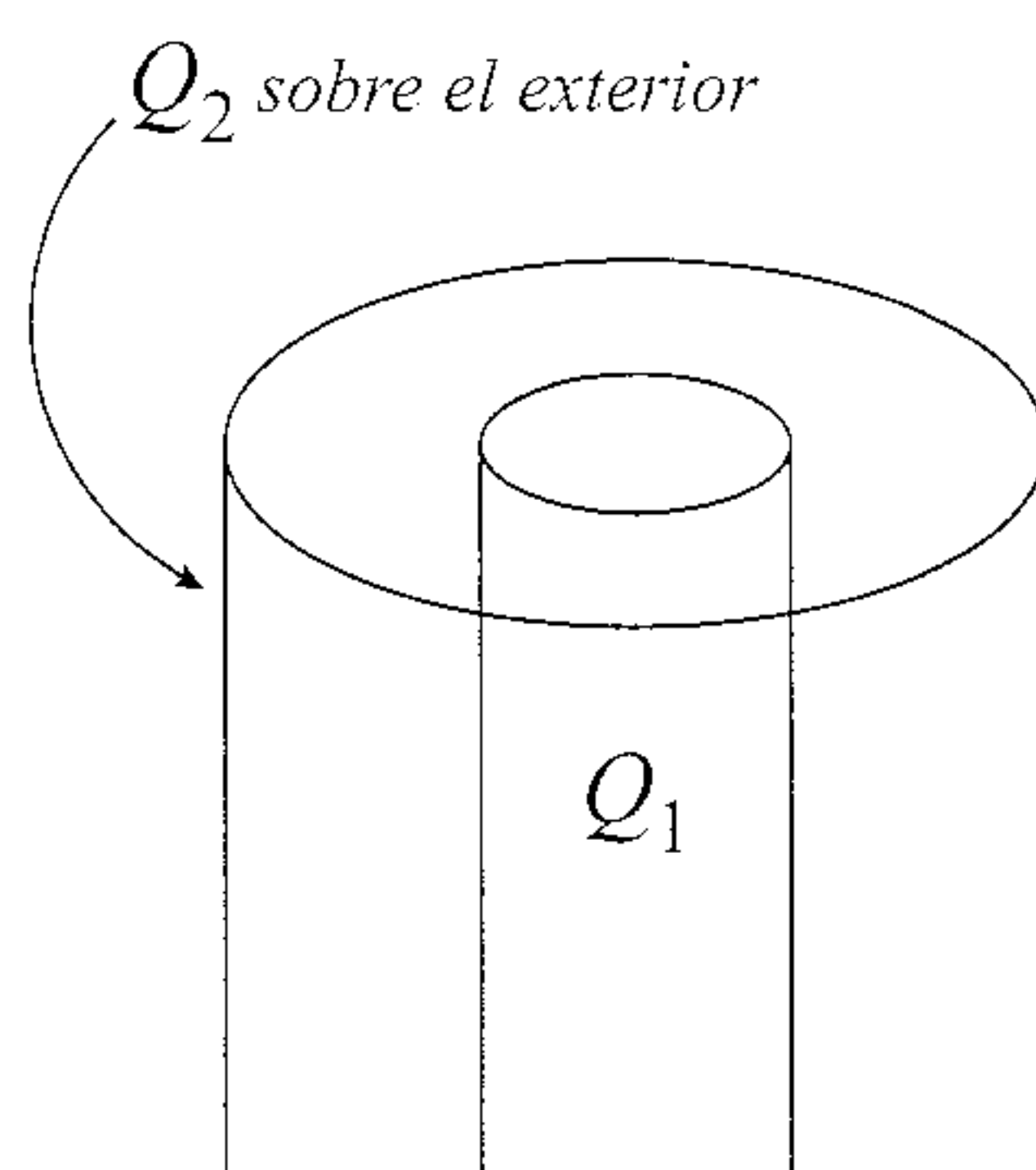
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}$$

Tomando como superficie de integración un pequeño cilindro que encierre la superficie de discontinuidad, obtenemos el resultado (2).

El vector desplazamiento eléctrico es simplemente  $\vec{D} = \kappa\epsilon_0\vec{E}$  en cada medio. Como el dato que nos han dado es  $V_0$  y no  $I$ , reemplazamos  $I = V_0/R$  en la expresión del campo eléctrico, con lo que obtenemos la densidad de carga superficial libre,

$$\sigma_{\text{libre}} = \frac{V_0\epsilon_0}{4\pi R b^2} \left( \frac{\kappa_2}{g_2} - \frac{\kappa_1}{g_1} \right)$$

**10.** Se tienen dos cilindros conductores coaxiales de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ). El espacio entre ellos se llena con un material de conductividad  $g$  y constante dieléctrica  $\kappa$ . En el instante  $t = 0$  se colocan dos cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  por unidad de longitud sobre la superficie de los conductores. ( $Q_1$  sobre el cilindro de radio  $a$ ,  $Q_2$  sobre el cilindro de radio  $b$ ). Calcule:



- La resistencia por unidad de longitud entre ambos conductores.
- La carga total sobre cada conductor cuando el sistema ha llegado al estado de equilibrio.
- La intensidad de corriente por unidad de longitud que fluye entre ambos cilindros, en función del tiempo.
- Calcule la energía disipada por unidad de largo durante el proceso de reordenamiento de las cargas.

**Solución:**

a) Por el teorema de Gauss y la simetría del problema, el campo eléctrico entre los cilindros se debe a la carga  $Q_1$  depositada en el cilindro interior. Si esta carga es positiva el campo es radial, dirigido hacia el exterior. La carga fluye desde el interior hacia el exterior, así es que el potencial es más alto en el cilindro interior y esperamos que al final toda la carga interior fluya hacia el exterior. Para calcular la resistencia procedemos como en el problema anterior. La corriente  $I$  se debe ahora a una densidad de corriente que atraviesa un cilindro de largo  $l$  arbitrario concéntrico con los anteriores. Esto es:

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(\rho)2\pi\rho l = I$$

y,

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi\rho l} \hat{\rho}$$

El campo eléctrico es entonces:

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\rho l g} \hat{\rho} \quad (1)$$



La diferencia de potencial entre los cilindros es:

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\rho \hat{\rho} = \frac{I}{2\pi l g} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La ley de Ohm  $I = V_0/R$  nos permite identificar la resistencia como

$$R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi l g}$$

b) Como dijimos más arriba, el campo entre los cilindros se debe a las cargas del cilindro interior que fluirán hacia afuera. Podemos expresar la carga en términos de la corriente en cualquier instante a través de la ley de Gauss. El desplazamiento eléctrico es  $\vec{D} = \kappa\epsilon_0 \vec{E}$ , con el campo  $\vec{E}$  dado por (1). Aplicando la ley de Gauss

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

tomando como superficie cerrada un cilindro de radio  $a$  con tapas (las tapas no contribuyen a la integral ya que el campo es radial), encontramos que

$$\kappa\epsilon_0 \left( \frac{I}{2\pi a l g} \right) 2\pi a l = Q_1 \quad (2)$$

que simplificando es  $I = gQ_1/\kappa\epsilon_0$ .

Por otra parte, si la carga  $Q_1$  es positiva, la corriente es positiva dirigida hacia afuera. La carga en el cilindro interior disminuye por lo que

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I = -\frac{gQ_1}{\kappa\epsilon_0}$$

cuya solución es:

$$Q_1(t) = Q_1(0) \exp^{-(gt/\kappa\epsilon_0)}$$

Por lo tanto cuando  $t \rightarrow \infty$   $Q_1 \rightarrow 0$ . Por conservación de la carga,  $Q_2 \rightarrow Q_1 + Q_2$ .

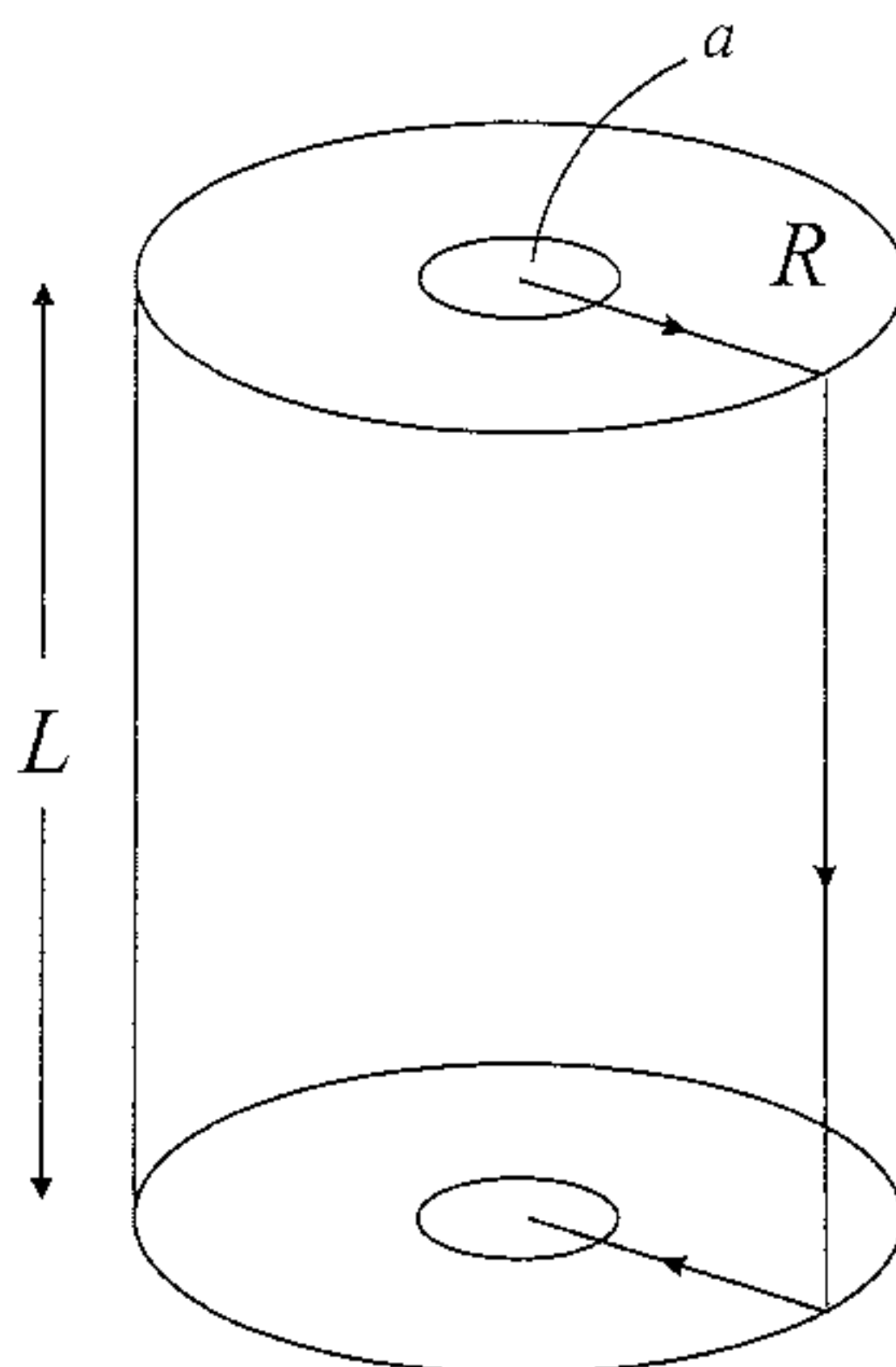
c) De acuerdo al cálculo en b), la relación entre la carga y la corriente es:

$$I(t) = \frac{gQ_1(t)}{\kappa\epsilon_0} = \frac{gQ_1(0)}{\kappa\epsilon_0} \exp^{-(gt/\kappa\epsilon_0)}$$

d) La energía disipada es:

$$\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{Rg}{2\kappa\epsilon_0} Q_1^2(0) = \frac{\ln(b/a)Q_1^2(0)}{4\pi\kappa\epsilon_0 l}$$

11. Considere un manto cilíndrico de largo  $L$ , radio interior  $R$  y espesor  $e$  ( $e \ll R$ ), con tapas en ambos extremos del mismo espesor  $e$ . El manto y las tapas están construidas de un material de conductividad  $g$ . En el centro de ambas tapas se han soldado electrodos circulares de radios  $a$  ( $a < R$ ) de un metal de muy alta conductividad. Calcule la resistencia total entre los electrodos.



### Solución:

La corriente fluirá desde el electrodo a potencial mayor en forma radial hacia el manto. Luego fluirá en forma vertical y luego en forma radial hacia el interior al electrodo a menor potencial. Una línea se muestra en la figura. Si la intensidad de corriente es  $I$  calculamos la densidad de corriente en el manto viendo la corriente que atraviesa una sección de radio  $\rho$  y espesor  $e$ :

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(\rho)2\pi\rho e = I$$

de donde vemos que la densidad de corriente en la tapa superior es:

$$\vec{j}_{sup} = \frac{I}{2\pi\rho e} \hat{\rho}$$

y, de la misma manera,

$$\vec{j}_{inf} = -\frac{I}{2\pi\rho e}\hat{\rho}$$

donde los signos reflejan que arriba sale y abajo entra al electrodo.

La densidad de corriente en el manto está dirigida según el eje  $z$ , en dirección  $-\hat{z}$ . Para calcular la densidad en el manto tomamos como superficie un anillo de espesor  $e$  ubicado en  $r = R$  (más precisamente, entre  $R$  y  $R + e$ ). Como el espesor es muy pequeño comparado con  $e$  su superficie es aproximadamente  $2\pi Re$  y la densidad de corriente es:

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j2\pi Re = I$$

o sea, es constante sobre el manto y vale:

$$\vec{j} = -\frac{I}{2\pi Re}\hat{z}$$

El campo eléctrico en cada región es  $\vec{j}/g$ . La diferencia de potencial entre los electrodos es, recorriendo el trayecto de la corriente:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(r=0, z=L) - V(r=0, z=0) \\ &= V(r=0, z=L) - V(r=R, z=L) \\ &\quad + V(r=R, z=L) - V(r=R, z=0) \\ &\quad + V(r=R, z=0) - V(r=0, z=0) \end{aligned}$$

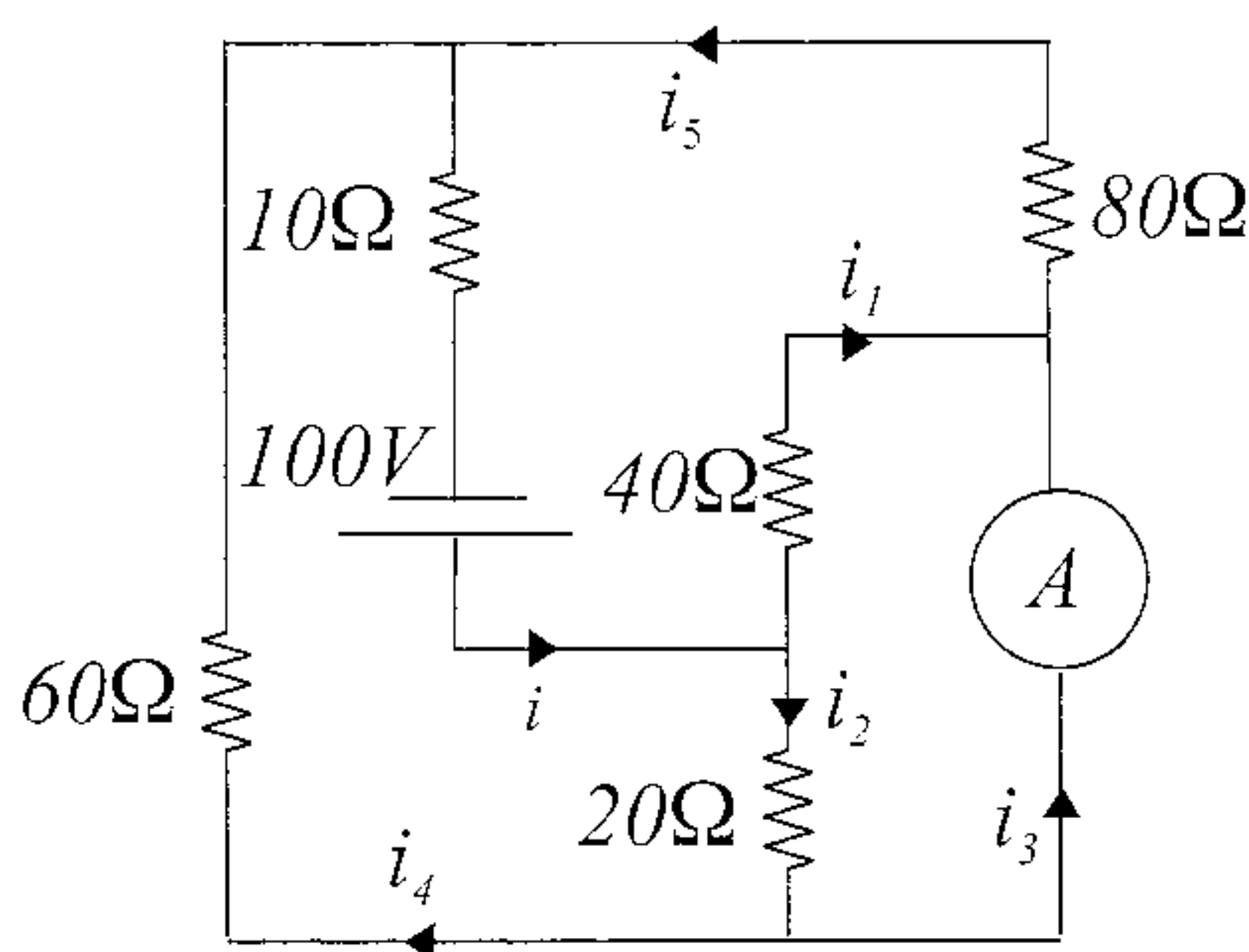
que es:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 2 \int_0^R E_{\text{tapa}} dr + \int_0^L E_{\text{manto}} dz \\ &= \frac{I}{2\pi eg} \left( \ln\left(\frac{R}{a}\right) + \frac{L}{e} \right) \end{aligned}$$

De esta expresión podemos identificar la resistencia  $R = \Delta V/I$ , que resulta ser:

$$R = \frac{1}{2\pi eg} \left( \ln\left(\frac{R}{a}\right) + \frac{L}{e} \right)$$

**12.** En el circuito de la figura se pide la corriente que mide el amperímetro ideal (i.e., de resistencia interna nula).

**Solución:**

Llamamos  $i_1 \dots i_5$  (ver la figura) a las corrientes que circulan por cada tramo. La corriente que se nos pide encontrar es  $i_3$ , la corriente que pasa por el amperímetro.

En cada nodo la suma de las corrientes que llegan es igual a la suma de las corrientes que salen. Esto es:

$$i = i_1 + i_2 \quad (1)$$

$$i_2 = i_3 + i_4 \quad (2)$$

$$i_1 + i_3 = i_5 \quad (3)$$

$$i_5 + i_4 = i \quad (4)$$

Observamos inmediatamente que estas cuatro ecuaciones no son independientes ya que siempre podemos expresar una de ellas como suma de otras. Tenemos entonces tres ecuaciones linealmente independientes.

Sabemos también que la diferencia de potencial a lo largo de un circuito cerrado es nula. Aplicando esto, recorriendo los circuitos en contra de los punteros del reloj, obtenemos:

$$-100 + 40i_1 + 80i_5 + 10i = 0 \quad (5)$$

$$-40i_1 + 20i_2 = 0 \quad (6)$$

$$100 - 10i - 60i_4 - 20i_2 = 0 \quad (7)$$

De (6) obtenemos inmediatamente  $i_2 = 2i_1$ ; al reemplazar esto en (1) obtenemos  $i = 3i_1$ . Como de las cuatro primeras ecuaciones sólo tres son independientes, y ya hemos usado una, podemos usar solamente dos más. Las ecuaciones independientes que nos quedan las reescribimos luego de

eliminar  $i$  e  $i_2$ . Tomemos la ecuación (3), que no involucra  $i$  ni  $i_2$ ; el resto queda como sigue:

$$i_5 + i_4 = 3i_1 \quad (4')$$

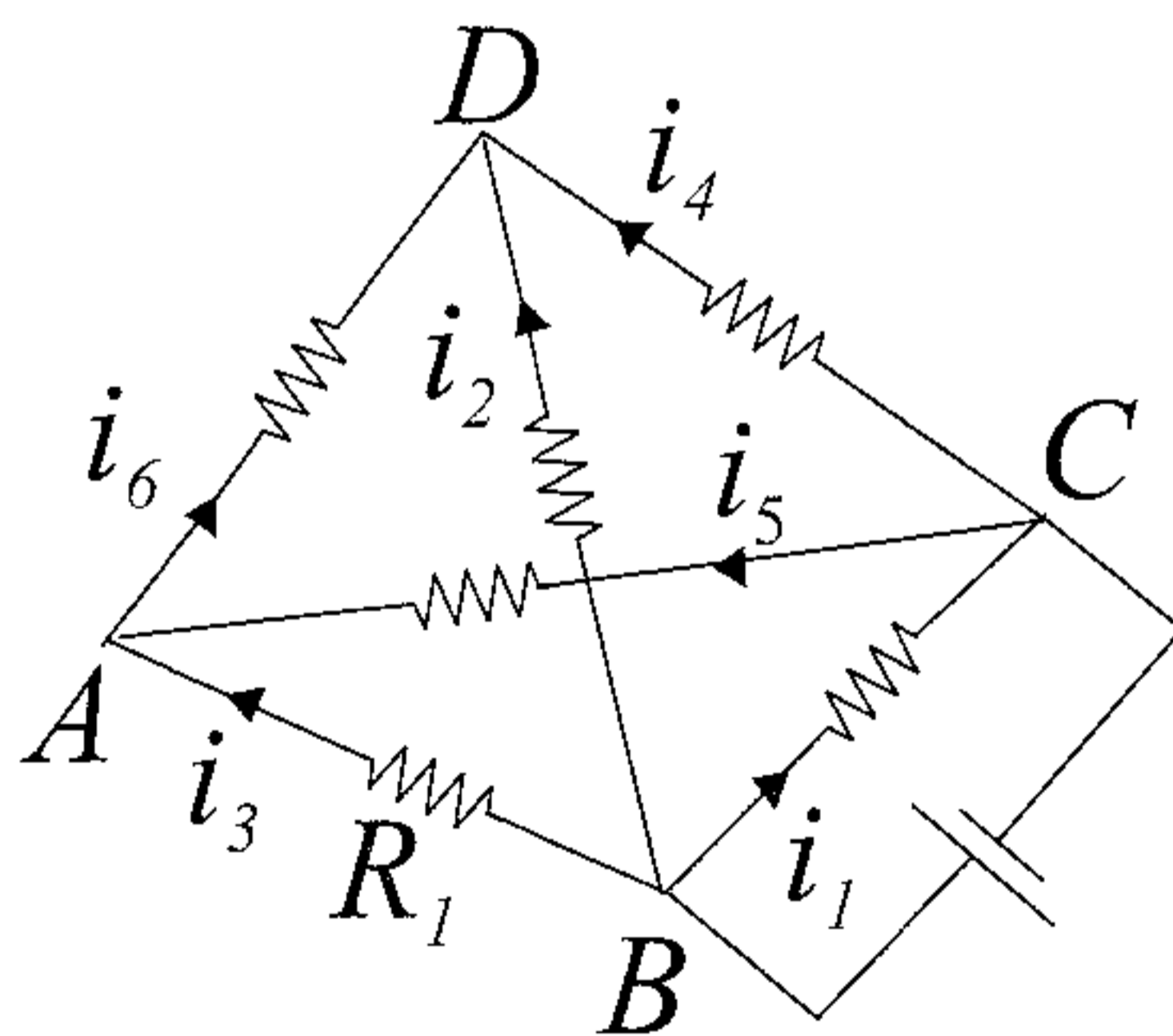
$$10 = 7i_1 + 8i_5 \quad (5')$$

$$10 = 7i_1 + 6i_4 \quad (7')$$

De estas tres ecuaciones (4'), (5') y (7') podemos calcular  $i_1$ ,  $i_4$  e  $i_5$ . Obtenemos  $i_1 = 70/121$ ,  $i_4 = 120/121$ ,  $i_5 = 90/121$ . La corriente que pasa por el amperímetro la obtenemos de la ecuación (3):

$$i_3 = i_5 - i_1 = \frac{20}{121} \text{ A}$$

**13.** Seis resistencias forman los lados de un tetraedro. Cinco de los resistores son idénticos ( $R$ ) y el sexto es  $R_1$ . Se aplica una diferencia de potencial a través de uno de los resistores adyacentes a  $R_1$ . Demuestre que la producción de calor por efecto Joule en  $R_1$  es máxima cuando  $R_1 = (3/5)R$ .



### Solución

Supongamos que circulan corrientes como se muestra en la figura. Aplicando la ley de Kirchoff en los nodos obtenemos lo siguiente:

$$i_3 + i_5 = i_6 \quad (1)$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (2)$$

$$i_1 = i + i_4 + i_5 \quad (3)$$

$$i_6 + i_2 + i_4 = 0 \quad (4)$$

Como ya sabemos, de estas cuatro ecuaciones solamente tres son linealmente independientes. Por ejemplo, la condición en el nodo B se obtiene al sumar las demás. Podemos usar tres cualesquiera según nuestra conveniencia.

Aplicando la segunda ley de Kirchoff obtenemos lo siguiente:

$$\text{malla fuente} \quad Ri_1 = V \quad (5)$$

$$\text{malla ABC} \quad i_3R_1 - Ri_5 - Ri_1 = 0 \quad (6)$$

$$\text{malla ABD} \quad i_3R_1 - Ri_2 + Ri_6 = 0 \quad (7)$$

$$\text{malla ACD} \quad i_6R - Ri_4 + Ri_5 = 0 \quad (8)$$

$$\text{malla BCD} \quad i_2R - Ri_4 - Ri_1 = 0 \quad (9)$$

y lo que nos interesa calcular es la potencia disipada en  $R_1$  que es  $P = R_1(i_3)^2$ .

De las cuatro primeras ecuaciones elegimos usar (1), (2) y (4). De la ecuación (2) calcularemos  $i$  ya que es el único lugar donde aparece. Para encontrar el resto de las corrientes usamos (1), (4), (5)-(9). De (5) obtenemos  $i_1 = V/R$  que eliminamos en las otras ecuaciones. Nos queda:

$$i_3R_1 - i_5R - V = 0 \quad (6')$$

$$i_2R - i_4R - V = 0 \quad (9')$$

Las otras ecuaciones no cambian. Usamos (1) para eliminar  $i_5$  en términos de  $i_6$  e  $i_3$ . Nos queda

$$(R_1 + R)i_3 = V + Ri_6, \quad (6^*)$$

$$2i_6 = i_4 + i_3. \quad (8^*)$$

Sumando (8\*) + (4) expresamos  $i_2$  de  $i_3$  e  $i_6$ :  $i_2 = i_3 - 3i_6$ . Reemplazamos  $i_2$  en (7) y despejamos  $i_6$  en términos de  $i_3$ . Resulta  $i_6 = i_3(R - R_1)/(4R)$ . Finalmente reemplazamos este valor en (6\*) y obtenemos  $i_3$  que es lo que nos interesaba:

$$i_3 = \frac{4V}{5R_1 + 3R}$$

La potencia disipada en  $R_1$  es:

$$P = R_1 i_3^2 = \frac{16R_1 V^2}{(5R_1 + 3R)^2}$$

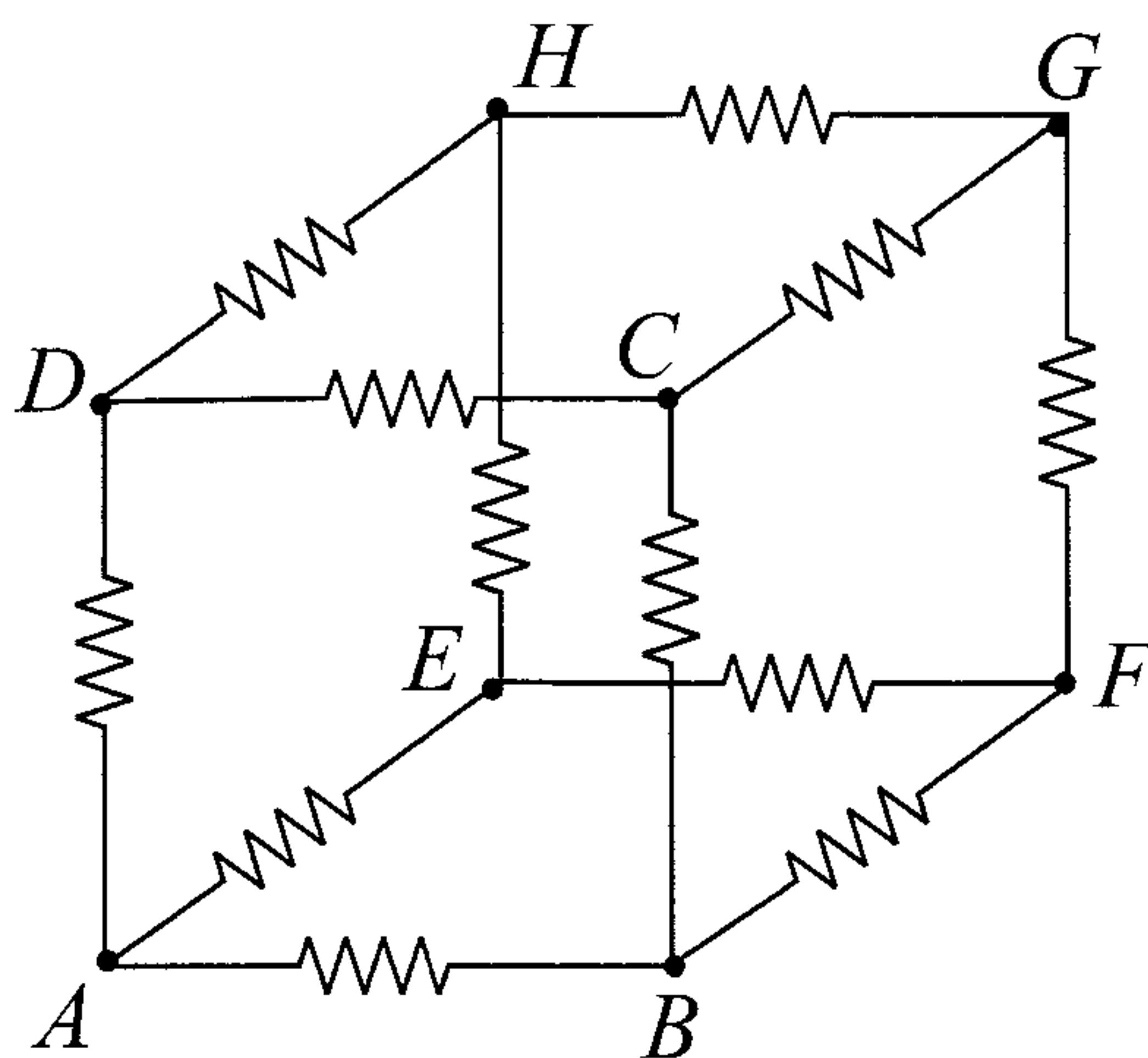
La pregunta que nos hacen es, ¿para qué resistencia  $R_1$  será la potencia disipada máxima? Para  $R_1$  tal que  $dP/dR_1 = 0$ . Tomando la derivada encontramos:

$$\frac{dP}{dR_1} = \frac{16V^2}{(5R_1 + 3R)^3} (3R - 5R_1)$$

que se anula cuando  $R_1 = (3/5)R$ . La potencia disipada por esta resistencia es  $P_{\max} = 4V^2/(15R)$ .

**14.** Un cubo tiene una resistencia  $r$  en cada una de sus aristas.

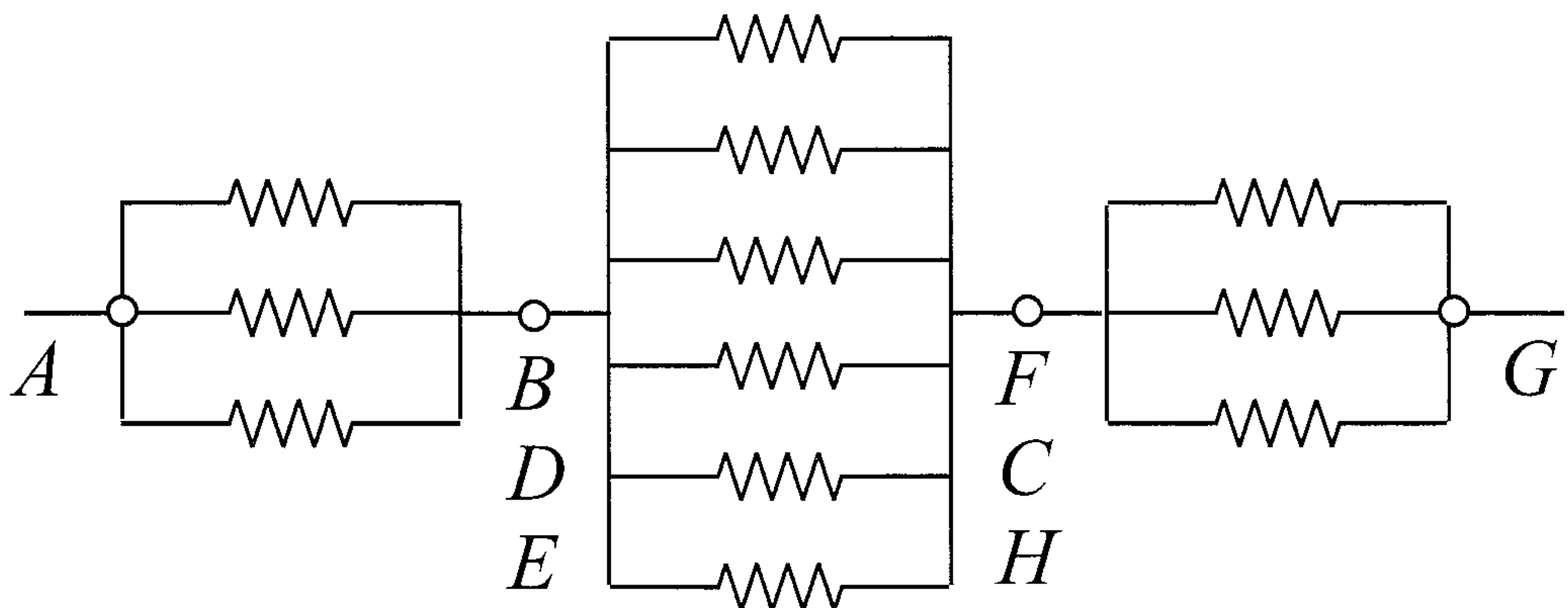
- Calcule la resistencia entre dos vértices opuestos.
- Calcule la resistencia entre dos vértices opuestos de una cara del cubo.
- Calcule la resistencia entre dos vértices adyacentes.



**Solución:**

a) Conexión entre A y G.

Por la simetría del problema los puntos B, E y D son equivalentes y por lo tanto se encuentran al mismo potencial. Los puntos C, F y H son equivalentes también. El circuito que representa esta geometría es entonces el de la figura.



La resistencia equivalente es entonces:

$$R_{A-G} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6}$$

b) Conexión entre A y F.

Los puntos B y C son equivalentes. También lo son los puntos H y G.

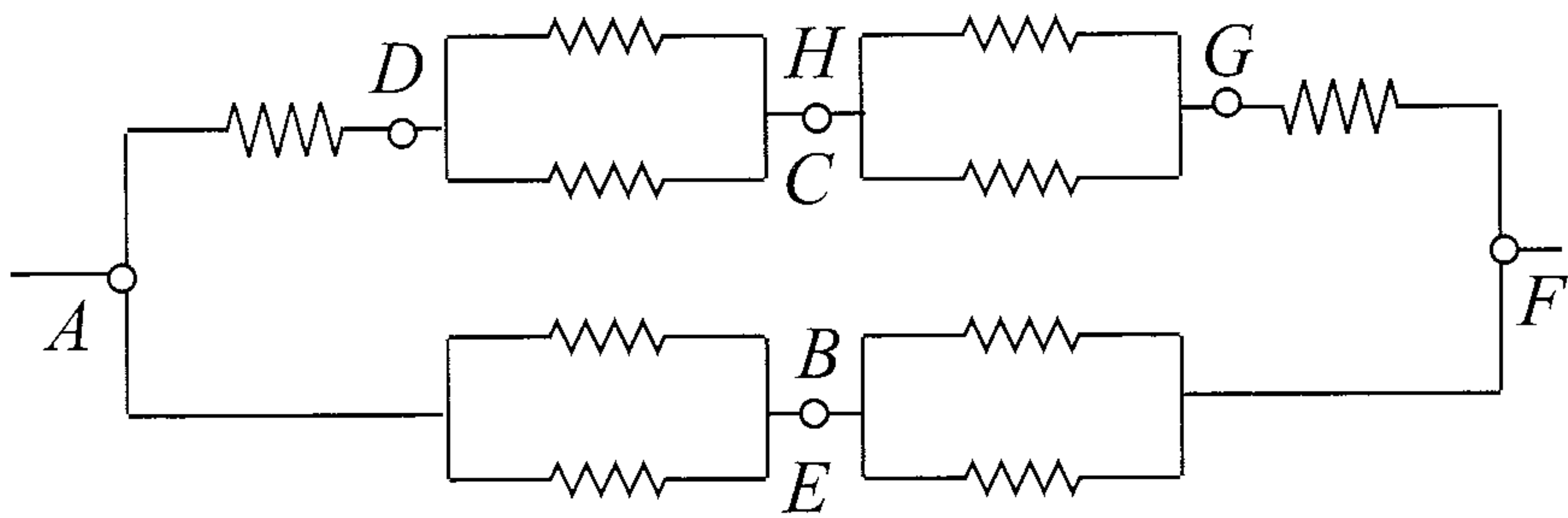
Por otra parte, para calcular la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre A y F hay tres posibilidades, dos de ellas idénticas: ir de A a B y luego a F o, ir de A a E y luego a F. En estos dos casos los puntos B y E se encuentran simétricos entre A y F y por lo tanto la diferencia de potencial entre A y B o entre A y E es  $\Delta V/2$ .

El tercer camino es distinto: ir de A a D y luego a H o C. Se recorren dos resistencias en cualesquiera de estos casos. Luego para llegar de H o C a F se recorren otras dos resistencias cualquiera sea el camino que se tome. Por lo tanto H y C son un punto de simetría entre A y F. Por esto, la diferencia de potencial entre C o H y A tiene que ser  $\Delta V/2$ .

En conclusión, B, E, H y C están al mismo potencial por lo que no circulará corriente en las ramas CB y HE.

El circuito que representa esta geometría es entonces,





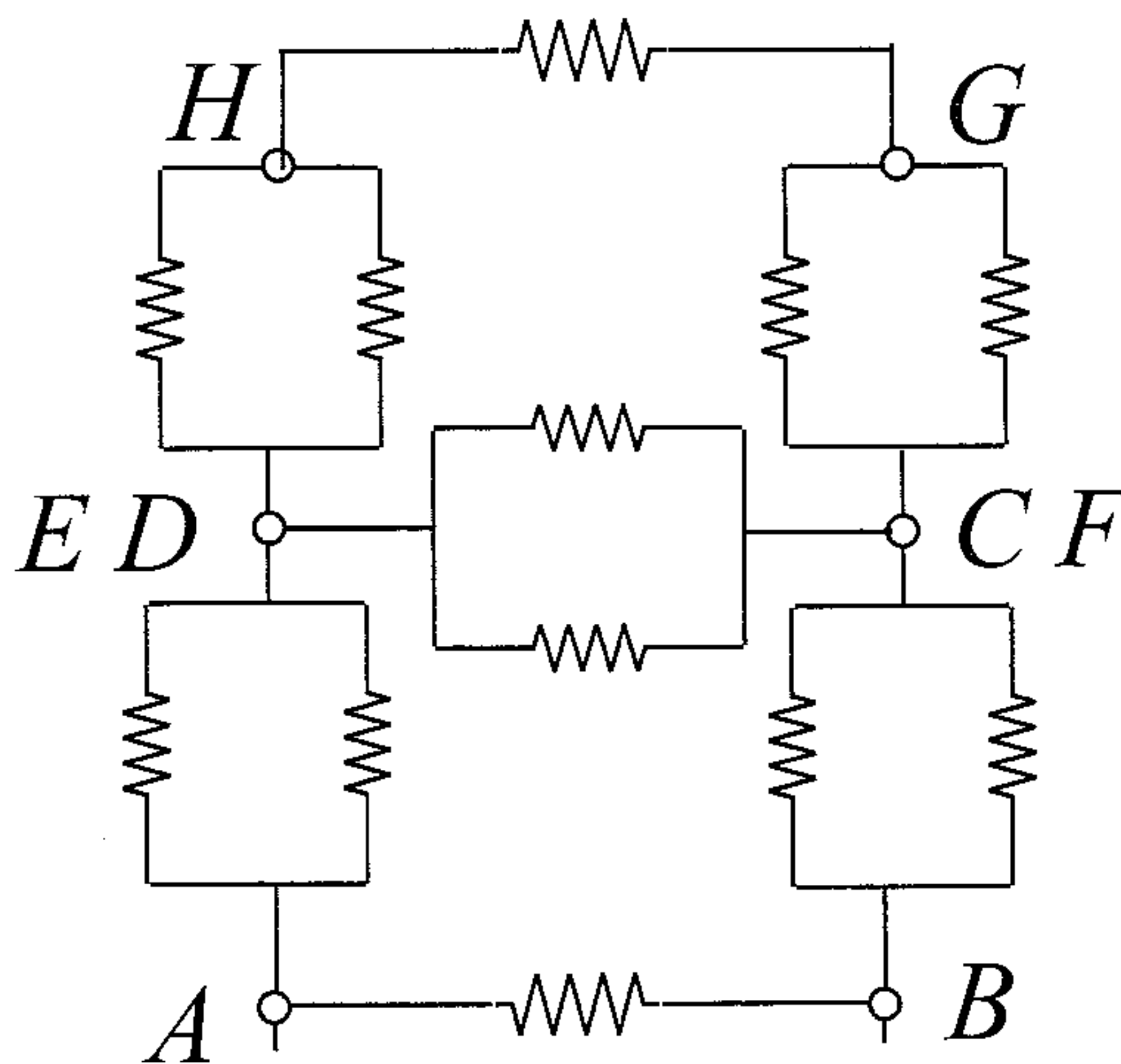
y la resistencia equivalente se calcula fácilmente. Su resultado es

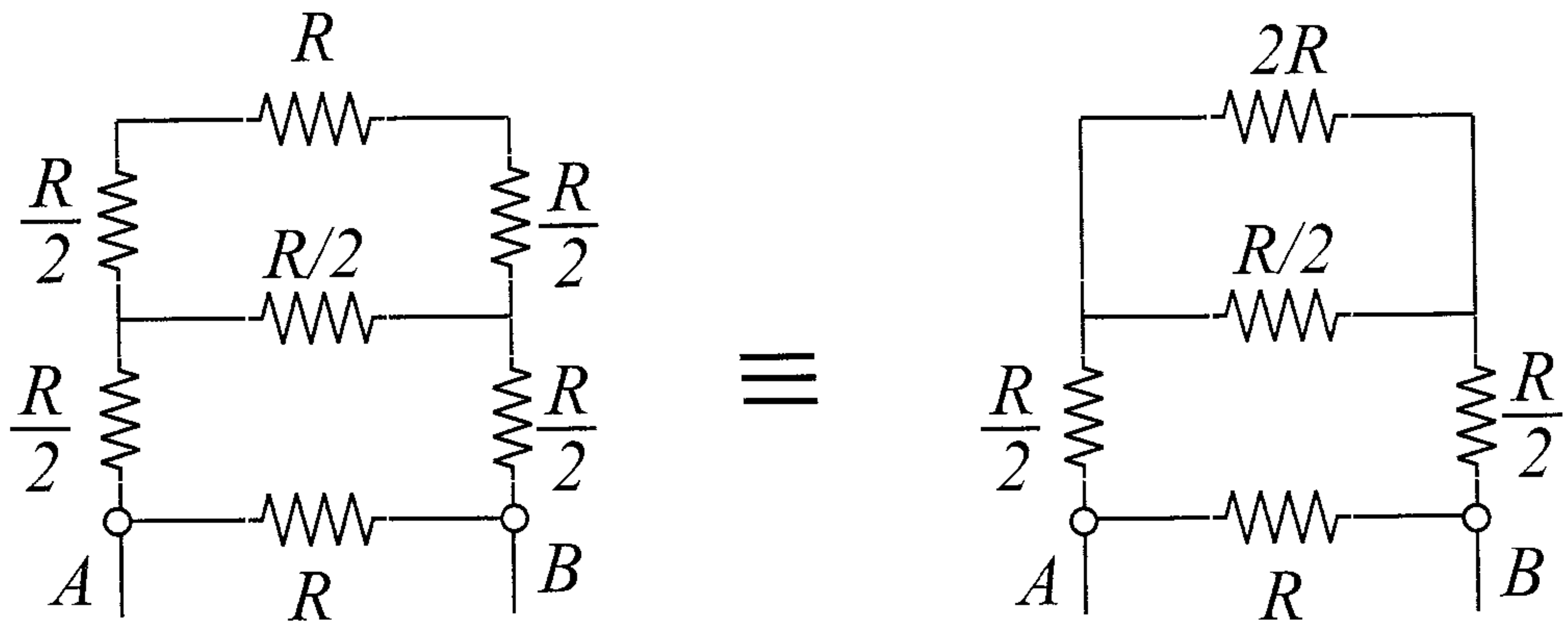
$$R_{AF} = \frac{3R}{4}.$$

Si Ud. no está convencido de que no circula corriente por HE y BC, dibuje estas resistencias en el circuito, escriba la ecuación para las dos mallas y verifique que, efectivamente, no circula corriente por ellas.

c) Conexión entre A y B.

En este caso el punto F está al mismo potencial que el punto C y el punto E está al mismo potencial que D. El circuito a considerar es entonces:





y la resistencia equivalente es:

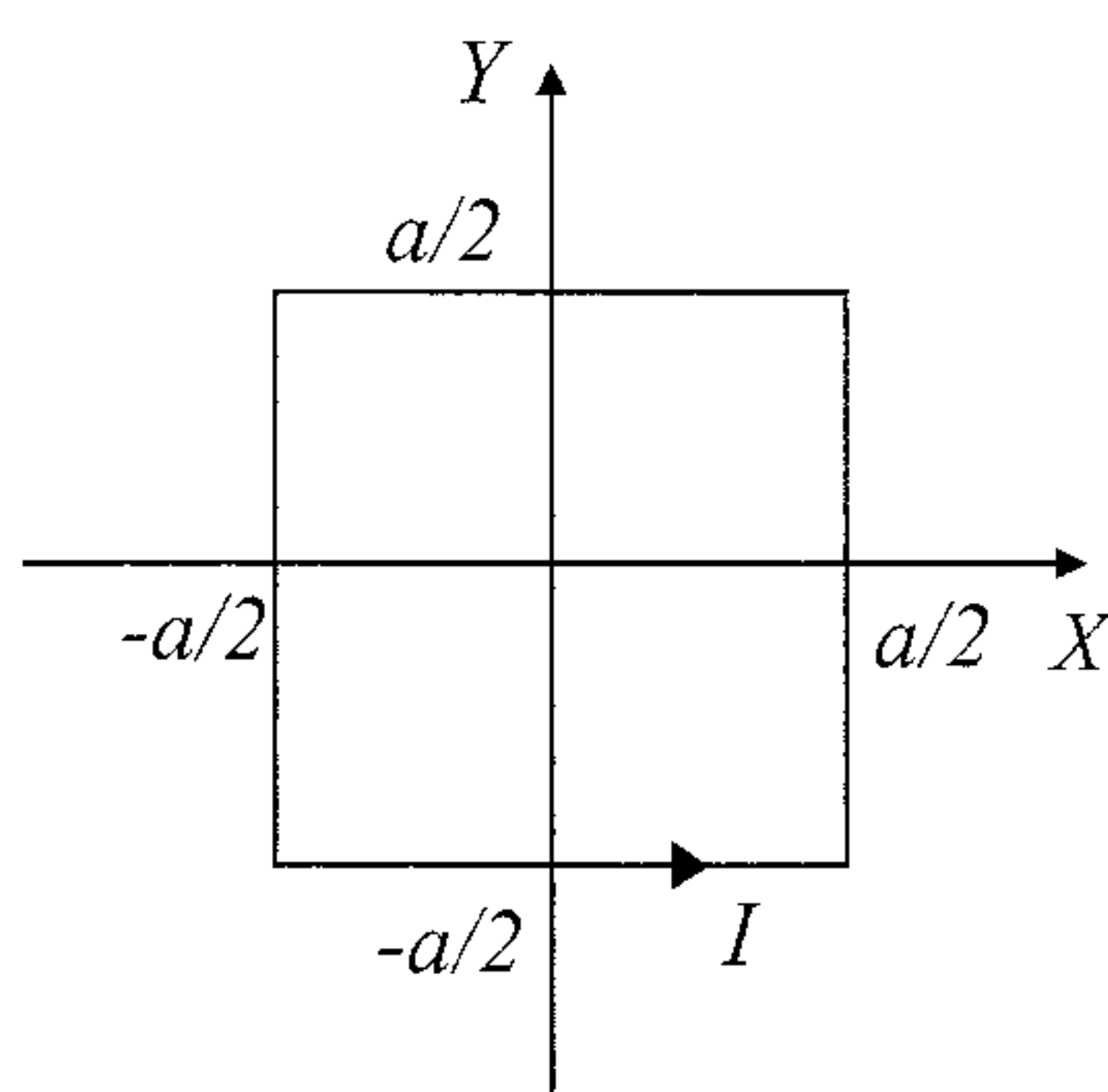
$$R_{AB} = \frac{7R}{12}.$$

## 7. Magnetostática

1. Calcule el campo magnético  $\vec{B}$  en el centro de una espira cuadrada de lado  $a$  por la que circula una corriente  $I$ .

**Solución:**

Elijamos coordenadas cartesianas de modo que la espira se encuentre en el plano  $x$ - $y$ , con su centro en el origen, con dos de sus lados paralelos al eje  $x$  y los otros dos paralelos al eje  $y$ . Supongamos que la corriente circula en el sentido opuesto al de los punteros del reloj.



La contribución de los cuatro lados del cuadrado al campo total es la misma, de modo que el campo en el centro de la espira  $\vec{B}(0) = 4\vec{B}_1(0)$ , en que  $\vec{B}_1(0)$  es el campo producido por el lado ubicado en  $x = a/2$ , entre  $y = -a/2$  e  $y = a/2$ . Para calcular el campo de uno de los lados usamos la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{d\vec{R} \times (\vec{0} - \vec{R})}{|\vec{R}|^3} \quad (1)$$

donde  $\vec{R} = (a/2)\hat{i} + y\hat{j}$ ,  $d\vec{R} = dy\hat{j}$ , e  $y$  varía entre  $-a/2$  y  $a/2$ . Además,  $|R| = (y^2 + (a^2/4))^{1/2}$ , y  $d\vec{R} \times (-\vec{R}) = (a/2) dy \hat{k}$  (aquí  $\hat{k}$  sale de la hoja). Reemplazando estas expresiones en (1) obtenemos,

$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(a/2) dy}{((a/2)^2 + y^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (2)$$

Haciendo el reemplazo trigonométrico  $y = (a/2) \tan \alpha$  en la última integral obtenemos,

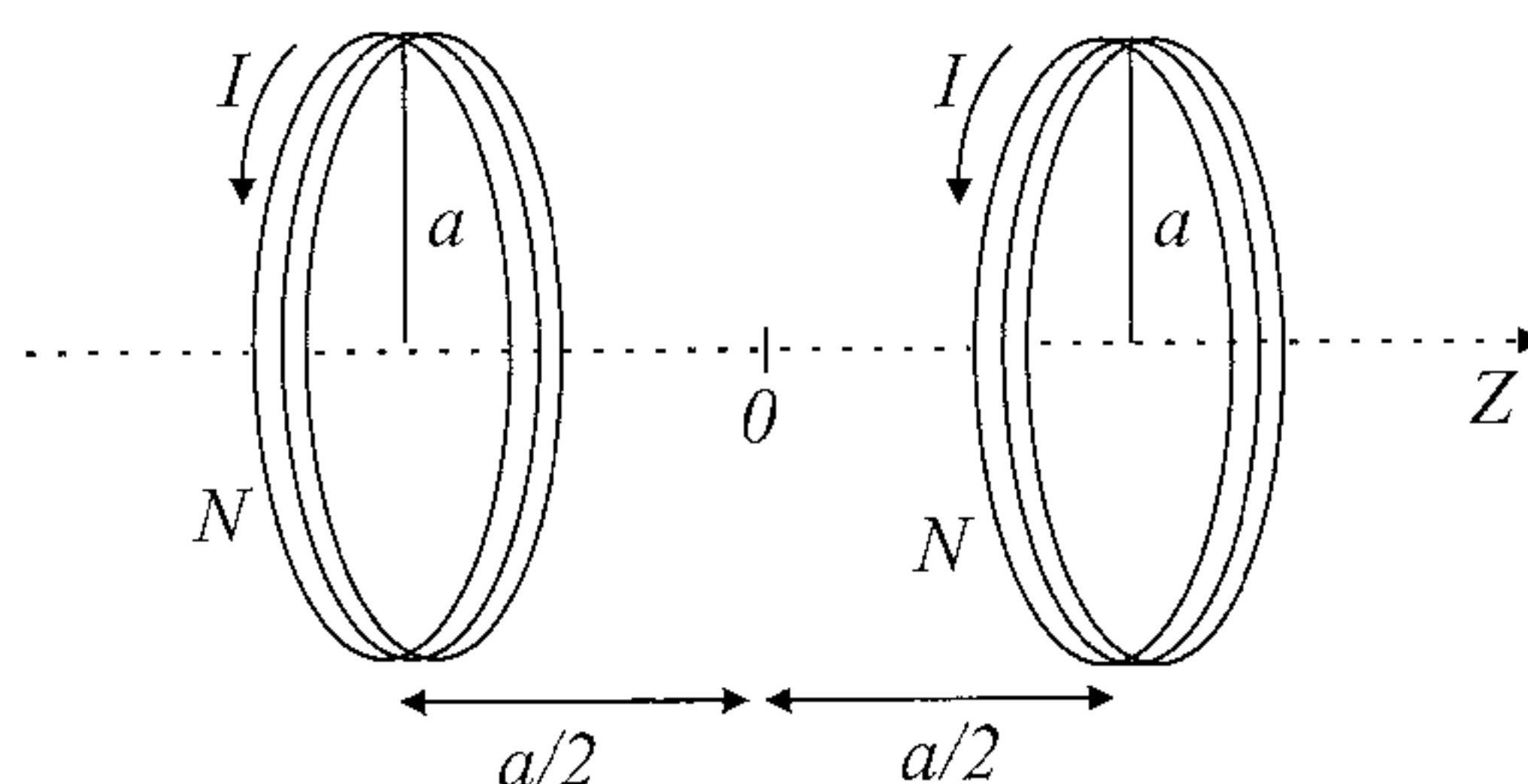
$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \alpha d\alpha \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{k} \quad (3)$$

y, finalmente, el campo producido por toda la espira en su centro es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} 2\sqrt{2} \hat{k}$$

*Nota:* El lector puede comparar los campos magnéticos producidos por una espira circular y una espira cuadrada de la misma área en sus respectivos centros. Se puede hacer lo mismo cuando las espiras tienen el mismo perímetro. ¿Cuál de estas geometrías produce un campo mayor?

**2. Bobinas de Helmholtz** En el laboratorio a menudo se requiere producir un campo magnético uniforme sobre una región apreciable. En esos casos se usa un par de bobinas de Helmholtz como se indica en la figura. Muestre que el campo sobre el eje de simetría, en el punto medio entre las dos bobinas es:  $(0,8)^{3/2} \mu_0 NI/a$ , en que  $N$  es el número de vueltas de cada bobina.



**Solución:**

Elijamos el eje  $z$  coincidiendo con el eje de simetría de las bobinas, y el origen en el punto medio entre las bobinas. De este modo el centro de una de las bobinas se encuentra en  $z = -a/2$  y el de la otra en  $z = a/2$ . Recordemos que el campo magnético producido por una espira de radio  $a$ , por la que circula una corriente  $I$ , en un punto de su eje de simetría a distancia  $z$  de su centro está dado por:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (1)$$

Usando (1) y el principio de superposición, teniendo debida cuenta la posición del centro de las bobinas, obtenemos la siguiente expresión para el campo de las bobinas (en un punto cualquiera del eje  $z$ ),

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 N I}{2a} \left[ \frac{a^3}{(a^2 + (z + (a/2))^2)^{3/2}} + \frac{a^3}{(a^2 + (z - (a/2))^2)^{3/2}} \right] \hat{k} \quad (2)$$

Si definimos las funciones

$$g(u) \equiv (u^2 + u + (5/4))^{-3/2} \quad (3)$$

y,

$$f(u) \equiv g(u) + g(-u) \quad (4)$$

vemos que el campo magnético (2) se puede escribir simplemente como:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 N I}{2a} f\left(\frac{z}{a}\right) \hat{k} \quad (5)$$

Como la función  $f(u)$  es par (i.e.,  $f(u) = f(-u)$ ) y analítica cerca de  $u = 0$ , todas sus derivadas de orden impar evaluadas en el origen son nulas. Por otra parte, de (3) obtenemos

$$g(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}, \quad g''(0) = 0, \quad \text{y} \quad g^{iv}(0) = -54\left(\frac{4}{5}\right)^{9/2} \quad (6)$$

Entonces, de (4) y (6) obtenemos,

$$f(0) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}, \quad f''(0) = 0, \quad \text{y} \quad f^{iv}(0) = -108\left(\frac{4}{5}\right)^{9/2} \quad (7)$$

y desarrollando  $f(z)$  en serie de Taylor alrededor de  $u = 0$ , se tiene

$$f(u) = 2 \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{144}{125}u^4 + O(u^6)\right) \quad (8)$$

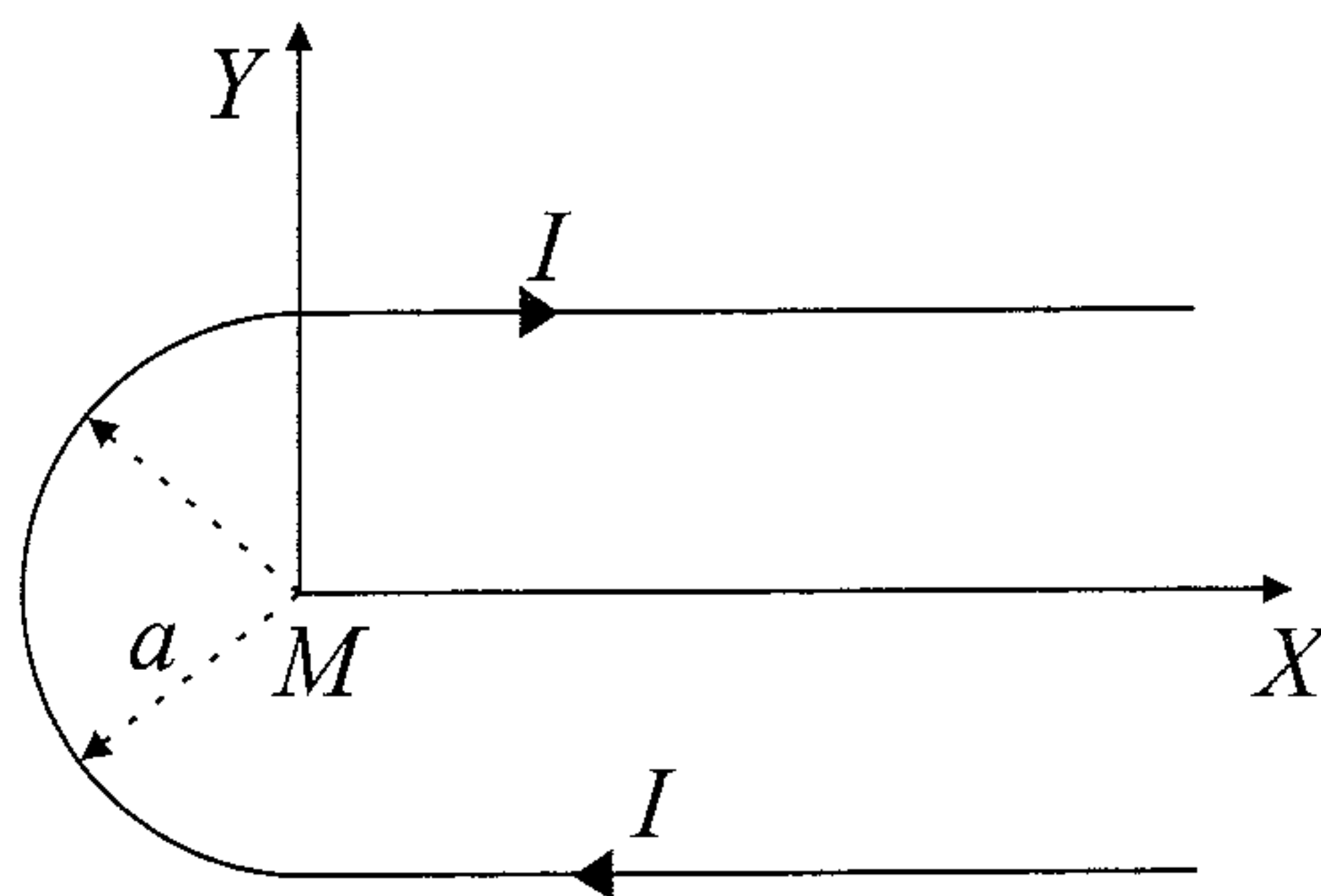
Finalmente, de (5) y (8) obtenemos,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 N I}{a} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{144}{125}\left(\frac{z}{a}\right)^4 + O\left(\left(\frac{z}{a}\right)^6\right)\right) \hat{k} \quad (9)$$

Al evaluar en  $z = 0$  obtenemos el resultado deseado. Observamos que una pequeña desviación de  $z = 0$  produce un cambio despreciable en el campo.

*Nota:* Aunque no lo señalamos al principio del problema, la relación entre el radio de las bobinas,  $a$ , y la separación entre éstas (también  $a$ ) es lo que hace que el campo sea aproximadamente constante en una vecindad alrededor del punto medio entre los centros de las bobinas.

**3.** Calcule el campo magnético en el punto  $M$  de la figura. (Suponga que los dos segmentos rectos de alambre del circuito son muy largos comparados con  $a$ ). Calcule el valor numérico de  $\vec{B}$  para el caso  $I = 2[A]$  y  $a = 5[cm]$ .



**Solución:**

Usando el principio de superposición calculamos el campo magnético como la suma de las contribuciones debidas a los dos alambres semiinfinitos y al semicírculo de radio  $a$ . Por la ley de Biot–Savart, los campos magnéticos producidos por estas tres fuentes son perpendiculares a la

hoja y entrando a ésta. Elijamos coordenadas cartesianas con origen en el punto  $M$ , con el eje  $x$  paralelo a los alambres, eje  $y$  perpendicular a éstos, y eje  $z$  saliendo de la hoja. Por la ley de Biot–Savart, el campo magnético producido por el alambre semiinfinito de arriba está dado por

$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R} \times (\vec{0} - \vec{R})}{|\vec{R}|^3} \quad (1)$$

en que  $\vec{R} = a\hat{j} + x\hat{i}$  y  $x$  varía entre 0 e infinito. Entonces  $|\vec{R}|^3 = (a^2 + x^2)^{3/2}$ ,  $d\vec{R} = dx\hat{i}$  y  $d\vec{R} \times (-\vec{R}) = -a dx \hat{k}$ . Reemplazando estas cantidades en (1) obtenemos,

$$\vec{B}_1(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{a dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (2)$$

Usando el reemplazo trigonométrico  $x = a \tan \alpha$ , podemos escribir (2) de la forma

$$\vec{B}_1(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{k} \quad (3)$$

La contribución del alambre inferior,  $\vec{B}_3(0)$ , es exactamente igual a  $\vec{B}_1(0)$ . Finalmente, el campo producido por el semicírculo en el punto  $M$ ,  $\vec{B}_2(0)$ , está dado por el lado derecho de la ecuación (1), pero esta vez con  $\vec{R} = a(-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$  y  $\theta$  varía entre  $-\pi/2$  y  $+\pi/2$ . Así,  $d\vec{R} = a(\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})d\theta$ , de modo que  $d\vec{R} \times (-\vec{R}) = -a^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)d\theta \hat{j} = -a^2 d\theta \hat{j}$ . Obviamente  $|\vec{R}| = a$ . Reemplazando en el lado derecho de (1) obtenemos,

$$\vec{B}_2(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \hat{j} = -\frac{\mu_0 I}{4a} \hat{j} \quad (4)$$

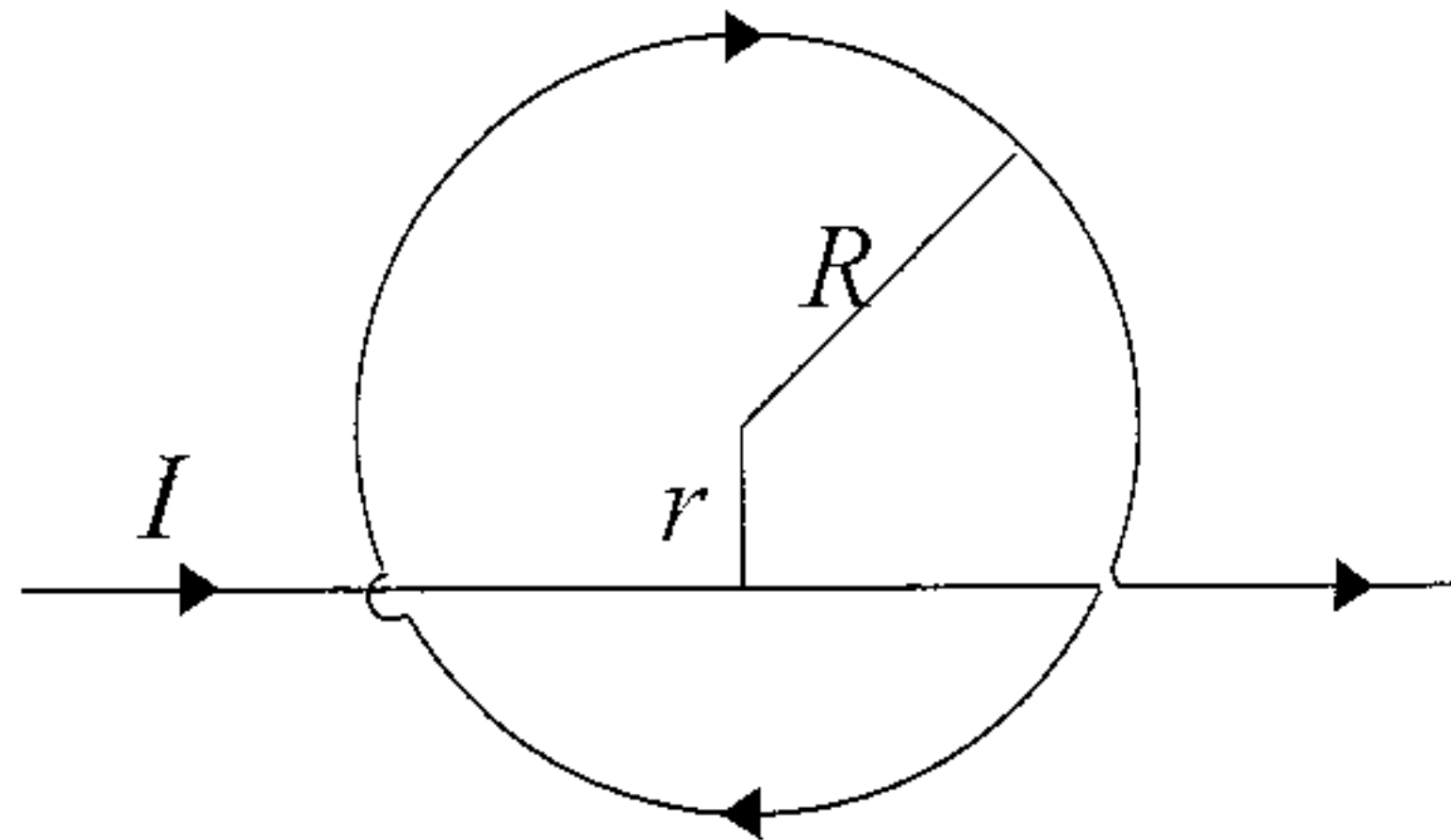
Sumando las contribuciones de los dos alambres rectos y del semicírculo (i.e., las expresiones para  $\vec{B}_1(0)$ ,  $\vec{B}_2(0)$  y  $\vec{B}_3(0)$  obtenidas en (3) y (4)) obtenemos finalmente,

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{2a} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \hat{k} \quad (5)$$

Para los datos numéricos del problema,  $|\vec{B}| = 2,06 \times 10^{-5}$  T.

4. Un conductor recto infinitamente largo es doblado en la forma que muestra la figura. La porción circular es coplanar con la sección recta,

y tiene radio  $R$ , con su centro ubicado a distancia  $r$  de la parte recta. Despreciando efectos asociados a las dobladuras del conductor, determine el valor de  $r$  de modo que al circular por el conductor una corriente  $I$ , el campo magnético en el centro de la porción circular sea cero.



### Solución:

El campo producido por la configuración de la figura es la suma del campo magnético debido a una espira circular de radio  $R$  por la que circula una corriente  $I$  y del campo magnético producido por el alambre recto infinito por el cual circula la misma corriente. El campo magnético producido por la espira circular, en el centro de ésta (por la ley de Biot-Savart) está dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{n} \quad (1)$$

en que  $\hat{n}$  es un vector perpendicular a la hoja y entrando en ésta. Por otra parte, el campo producido por el alambre recto infinito en el centro de la espira es:

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{n} \quad (2)$$

(sale de la hoja). A partir de (1) y (2) obtenemos el campo magnético total en el centro de la espira,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\pi r} \right) \hat{n} \quad (3)$$

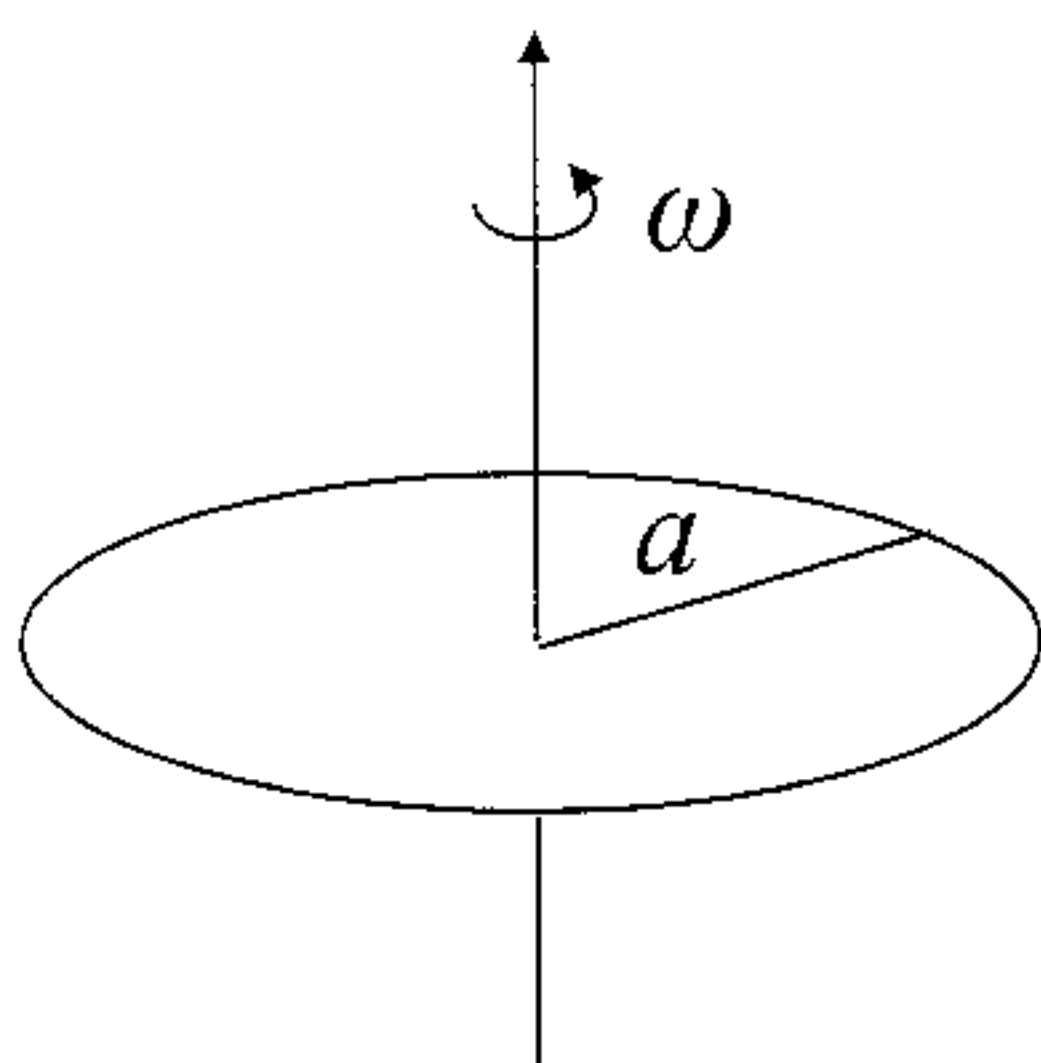
De (3) vemos de inmediato que el campo magnético en el centro de la espira es cero si

$$r = \frac{1}{\pi} R$$

5. Considere un disco aislante de radio  $a$  sobre el cual se ha depositado una densidad de carga superficial uniforme,  $\sigma$ . Si el disco rota en torno a



su eje de simetría con velocidad angular  $\omega$ , calcule el campo magnético producido por el disco sobre el eje.



### Solución:

Dada la simetría de la configuración, conviene elegir coordenadas cilíndricas de modo que el disco se encuentre en el plano  $z = 0$  y su centro en el origen. Como el disco es aislante, las cargas giran solidariamente con el disco. Una partícula que se encuentra a distancia  $r$  del centro tiene velocidad  $\vec{v} = \omega r \hat{\theta}$ . Entonces la densidad de corriente superficial está dada por

$$\vec{J} = \sigma \vec{v} = \sigma r \omega \hat{\theta} \quad (1)$$

En general, el campo magnético producido por una densidad de corriente distribuida sobre una superficie está dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} dS \quad (2)$$

en que  $\vec{R}$  varía sobre los puntos de la superficie, y  $\vec{r}$  es el punto donde estamos calculando el campo. En nuestro ejemplo:

$$\vec{J}(\vec{R}) = \sigma R \omega \hat{\theta}, \quad (3)$$

$\vec{r} = z \hat{k}$ ,  $\vec{R} = R \hat{R}$ , y el elemento de superficie del disco, en coordenadas polares, es  $dS = R dR d\theta$ . Reemplazando todas estas cantidades en (2) obtenemos,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma R \omega \times (z \hat{k} - R \hat{R})}{(z^2 + R^2)^{3/2}} R dR d\theta \quad (4)$$

En coordenadas cilíndricas,  $\hat{\theta} \times \hat{k} = \hat{R}$  y  $\hat{\theta} \times \hat{R} = -\hat{k}$ . Además,

$$\int_0^{2\pi} \hat{R}(\theta) d\theta = 0 \quad (5)$$

Por lo tanto de (4) obtenemos finalmente,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega \int_0^a \frac{R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dR \quad (6)$$

Pero,

$$\int_0^a \frac{R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dR = \frac{a^2 + 2z^2 - 2|z|(a^2 + z^2)^{1/2}}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \quad (7)$$

así es que,

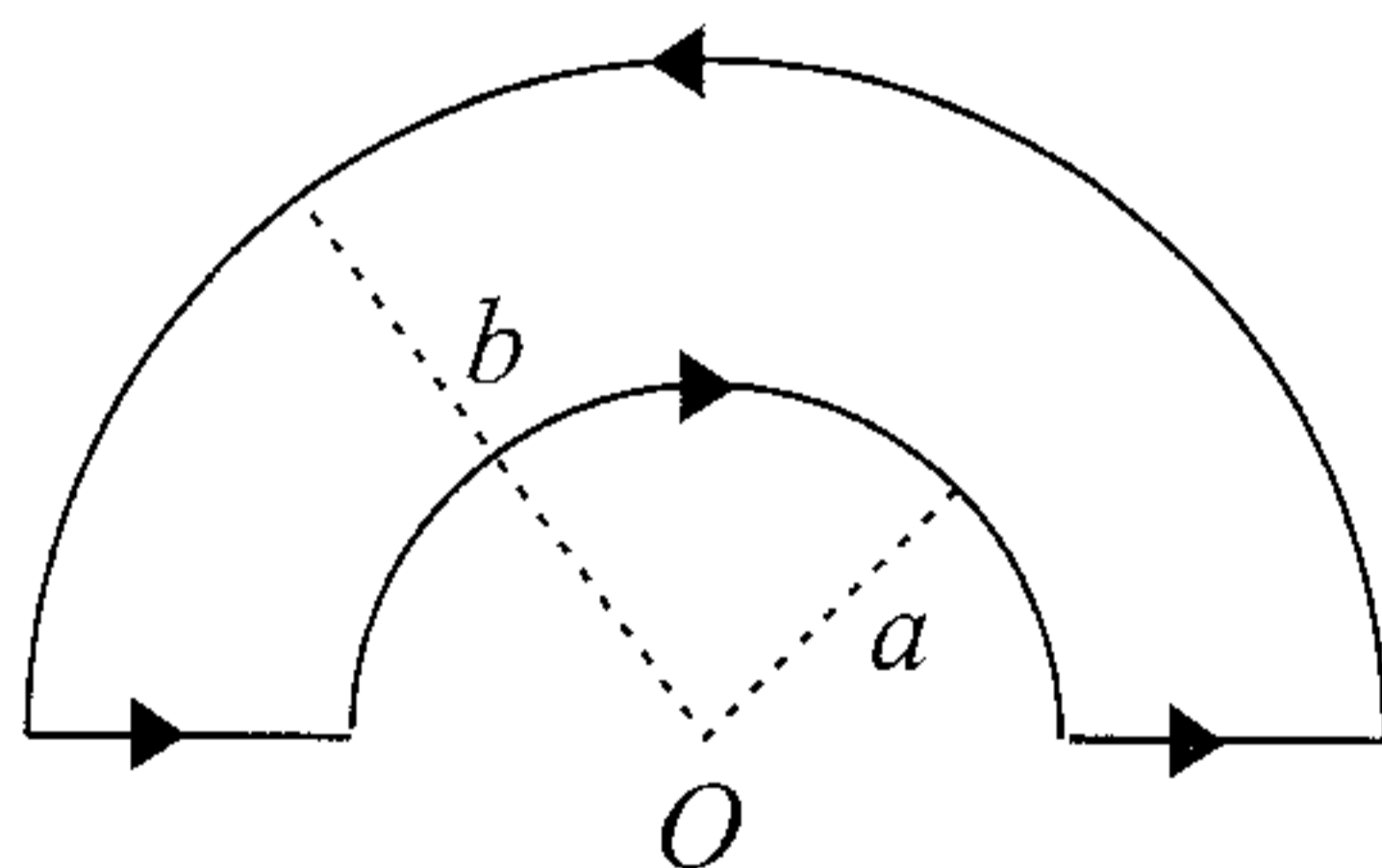
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{a^2 + 2z^2 - 2|z|(a^2 + z^2)^{1/2}}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{k}$$

En particular,  $\vec{B}(0) = (\mu_0 \omega \sigma a / 2) \hat{k}$ . Por otra parte, si  $z \gg a$ ,  $\vec{B}(z) \approx (\mu_0 \omega \sigma a^4 / (8z^3)) \hat{k}$ .

**6.** Considere una espira formada por dos semicírculos coplanares concéntricos, de radios  $a$  y  $b > a$  respectivamente, unidos por dos segmentos como se indica en la figura. Suponga que por la espira circula una corriente  $I$ .

a) Calcule el campo magnético producido por la espira en el centro de los semicírculos.

b) Calcule el potencial magnético vector (en el gauge de Coulomb) en el centro de los semicírculos.



**Solución:**

a) Por la ley de Biot-Savart, el campo magnético en un punto  $\vec{r}$ , producido por un alambre por el que circula una corriente  $I$ , está dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (1)$$

en que  $\vec{R}$  varía sobre el alambre. Para calcular el campo magnético producido por la espira del problema, elegiremos coordenadas polares centradas en el punto  $O$ . Como tenemos que calcular el campo magnético en el centro de los semicírculos,  $\vec{r} = 0$  en (1). Para el cálculo del campo magnético, podemos considerar la espira formada de cuatro partes: los dos segmentos rectos y los dos semicírculos. Los dos segmentos rectos no contribuyen al campo magnético en  $O$  pues  $d\vec{R}$  es colineal con  $\vec{r} - \vec{R} = -\vec{R}$  sobre dichos segmentos por lo que el producto cruz se anula. Por otra parte, sobre el semicírculo de radio  $a$ ,  $\vec{R} = a\hat{R}$  y  $d\vec{R} = -a d\theta \hat{\theta}$ , y  $|\vec{R}| = a$ . Además, en coordenadas cilíndricas,  $\hat{R} \times \hat{\theta} = \hat{k}$  (el vector unitario que sale de la hoja). Entonces, reemplazando todas estas cantidades en (1) obtenemos el campo producido por el semicírculo de radio  $a$ ,

$$\vec{B}_a(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{1}{a} d\theta \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{4} \frac{1}{a} \hat{k} \quad (2)$$

Un cálculo similar nos da el campo producido por el semicírculo de radio  $b$ ,

$$\vec{B}_b(0) = +\frac{\mu_0 I}{4} \frac{1}{b} \hat{k} \quad (3)$$

De (2) y (3) tenemos finalmente el campo total producido por la espira,

$$\vec{B}(0) = +\frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \hat{k}$$

b) El potencial magnético vector  $\vec{A}(\vec{r})$  producido por una espira por la que circula una corriente  $I$  (en el gauge de Coulomb), está dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \quad (4)$$

en que  $\vec{R}$  varía sobre los distintos puntos de la espira. En nuestro caso,  $\vec{r} = 0$ . Nuevamente consideramos la espira del problema como si fuera compuesta de cuatro partes. Esta vez la suma de las contribuciones de los dos semicírculos resultará nula, y son los dos segmentos rectos los que dan una contribución distinta de cero. Sobre el semicírculo de radio  $a$ ,  $d\vec{R} = -a d\theta \hat{\theta}$ , y  $|\vec{R}| = a$ . Reemplazando en (4) obtenemos la contribución del semicírculo de radio  $a$ ,

$$\vec{A}_a(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{i} \quad (5)$$

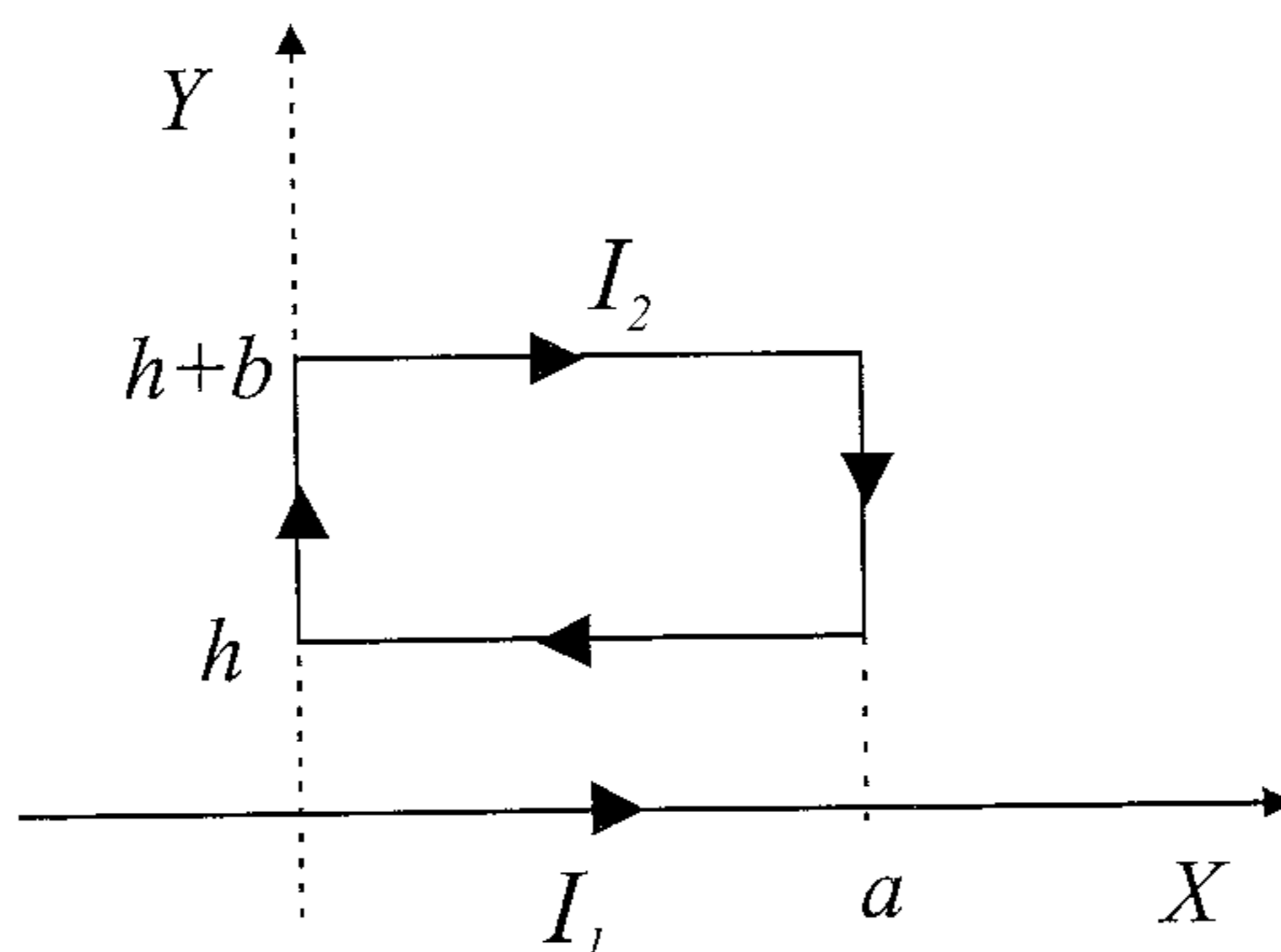
pues  $\int_0^\pi \hat{\theta} d\theta = -2\hat{i}$  (Para verificar esto escriba  $\hat{\theta}$  en coordenadas cartesianas e integre). Note que el valor de  $\vec{A}_a(0)$  no depende del valor de  $a$ . Así, es evidente que la contribución del semicírculo de radio  $b$  es igual en magnitud pero de signo contrario a la contribución del semicírculo de radio  $a$ , por lo que la contribución de ambos se cancela. En cuanto a la contribución de los segmentos rectos, ambas son iguales. Basta calcular la contribución del segmento de la derecha, para el cual  $\vec{R} = x\hat{i}$ ,  $d\vec{R} = dx\hat{i}$  y  $x$  varía entre  $a$  y  $b$ . Reemplazando estos valores en (4) encontramos:

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{dx}{x} \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{i} \quad (6)$$

y el potencial total en el origen está dado por

$$\vec{A}(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{i}$$

7. Considere un alambre infinito por el que circula una corriente  $I_1$  y una espira rectangular de lados  $a$  y  $b$ , coplanar con el alambre y tal que el lado  $a$  es paralelo a éste y a una distancia  $h$  del alambre. Suponga que por la espira rectangular circula una corriente  $I_2$ . ¿Cuál es la fuerza entre el alambre y la espira rectangular?



### Solución:

Elijamos coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ , en el plano formado por el alambre infinito y la espira rectangular. Elegimos el eje  $x$  coincidiendo con el alambre infinito (apuntando según el sentido de  $I_1$ ). Elegimos el eje  $y$

como en la figura. Con esta elección de coordenadas, la espira rectangular consiste en los segmentos: i)  $x = 0, h \leq y \leq h+b$ , ii)  $y = h+b, 0 \leq x \leq a$ , iii)  $x = a, h+b \geq y \geq h$ , y iv)  $y = h, a \geq x \geq 0$ . Calcularemos la fuerza que ejerce el alambre infinito sobre cada uno de estos segmentos en forma separada. En general la fuerza que hace un campo magnético sobre un trozo de espira está dado por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = \int I d\vec{R} \times \vec{B} \quad (1)$$

El campo producido por el alambre infinito está dado por

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{k} \quad (2)$$

Sobre el segmento i),  $d\vec{R} = dy \hat{j}$ , de modo que:

$$\vec{F}_i = I_2 \int_h^{h+b} dy \hat{j} \times \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{k} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b+h}{h}\right) \hat{i} \quad (3)$$

Un cálculo similar muestra que  $\vec{F}_{iii} = -\vec{F}_i$ . En el caso del segmento ii),  $d\vec{R} = dx \hat{i}$  y de (1) y (2) tenemos,

$$\vec{F}_{ii} = I_2 \int_0^a dx \hat{i} \times \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(b+h)} \hat{k} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(b+h)} \hat{j} \quad (4)$$

Un cálculo similar nos da

$$\vec{F}_{iv} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi h} \hat{j} \quad (5)$$

Finalmente, la fuerza total que el alambre infinito ejerce sobre la espira es igual a la suma de (4) y (5), es decir

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left( \frac{ba}{h(b+h)} \right) \hat{j}$$

y se trata de una fuerza de repulsión.

**8.** Una espira cuadrada de lado  $a$  por la que fluye una corriente  $I$  se encuentra formando un ángulo  $\alpha$  con respecto a un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Calcule el torque que el campo hace sobre la espira.

**Solución:**

Como la espira cuadrada es una espira plana, su momento magnético se puede calcular como

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (1)$$

en que  $\vec{S}$  es un vector cuya magnitud es el área encerrada por la espira (en nuestro caso  $a^2$ ) y cuya dirección es normal a la espira. El sentido del vector  $\vec{S}$  está ligado al sentido de circulación de la corriente a través de la regla de la mano derecha. Si el pulgar apunta a lo largo de  $\vec{S}$ , el resto de las mano derecha describe el sentido de la corriente.

Una vez obtenido el momento magnético de la espira, podemos calcular de inmediato el torque producido por el campo magnético externo sobre ella. El torque está dado por

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos,

$$\vec{\tau} = I a^2 |B| \sin \alpha \hat{n}$$

en que  $\hat{n}$  es un vector perpendicular a  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$ .

**9.** Una barra imantada larga y estrecha que tiene su momento magnético  $\vec{m}$  paralelo a su eje mas largo está suspendida por el centro como la aguja de una brújula sin rozamiento. Situada en un campo magnético  $\vec{B}$ , la aguja se alinea con el campo. Si se desplaza un ángulo pequeño  $\theta$  de su posición de equilibrio, demuestre que la aguja oscilará en torno a dicha posición con la frecuencia  $f = \sqrt{(mB/J)}/(2\pi)$ , en que  $J$  es el momento de inercia de la aguja alrededor del punto de suspensión.

*Nota:* Este fue precisamente el método empleado por J.B. Biot y F. Savart en 1820 para determinar experimentalmente el campo magnético producido por un alambre recto por el que cicula una corriente  $I$ .

**Solución:**

Supongamos que la barra es pequeña de modo que el campo magnético es aproximadamente uniforme en la región donde ésta se mueve. Entonces, el torque ejercido por el campo magnético sobre la barra es:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (1)$$

Si llamamos  $\theta$  ángulo que forma  $\vec{m}$  con  $\vec{B}$ , y  $\hat{k}$  a la dirección perpendicular a ambos vectores, de (1) obtenemos,

$$\vec{\tau} = -m B \text{sen } \theta \hat{k} \quad (2)$$

en que  $m = |\vec{m}|$  y  $B = |\vec{B}|$ . Por otra parte, el momentum angular de la aguja con respecto al punto de donde está suspendida es

$$\vec{L} = J\dot{\theta} \hat{k} \quad (3)$$

en que  $J$  es el momento de inercia de la aguja alrededor del eje  $\hat{k}$ . La ecuación de torque de la aguja está dada por

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (4)$$

De (2), (3) y (4) obtenemos la ecuación de movimiento para el ángulo  $\theta$ ,

$$J\ddot{\theta} = -mB \text{sen } \theta \quad (5)$$

Para pequeñas oscilaciones con respecto a la posición de equilibrio podemos aproximar  $\text{sen } \theta \approx \theta$ , de modo que

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\theta = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) corresponde a una ecuación de movimiento armónico simple con frecuencia angular  $\omega = \sqrt{mB/J}$ , i.e.,  $f = (1/2\pi)\sqrt{mB/J}$ , que era lo que se pedía demostrar.

**10.** Dos dipolos magnéticos  $\vec{m}_1$  y  $\vec{m}_2$  se encuentran en las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respectivamente. Calcule el campo magnético producido por  $\vec{m}_1$  en el lugar en que se encuentra el segundo dipolo. Calcule la energía de interacción entre ellos y el torque entre ellos.

**Solución:**

El potencial magnético vector (en el gauge de Coulomb) producido por el dipolo magnético  $\vec{m}_1$  (ubicado en la posición  $\vec{r}_1$ ) en cualquier punto del espacio  $\vec{r}$  ( $\neq \vec{r}_1$ ) está dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1)$$

A partir de (1) podemos calcular el campo magnético producido por  $\vec{m}_1$  en un punto cualquiera  $\vec{r}$ ,

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\vec{m}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) \quad (2)$$

Ahora, si  $\vec{F}$  es una función vectorial y  $\vec{m}$  es un vector constante, es fácil deducir la siguiente identidad:

$$\nabla \times (\vec{m} \times \vec{F}) = \vec{m}(\nabla \cdot \vec{F}) - (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{F} \quad (3)$$

En nuestro caso,  $\vec{F} = (\vec{r} - \vec{r}_1)/|\vec{r} - \vec{r}_1|^3$ . Hemos visto en los problemas de electrostática que la función  $\vec{r}/|\vec{r}|^3$  tiene divergencia nula fuera del origen. Así pues, si  $\vec{r} \neq \vec{r}_1$ ,  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ . Por otra parte, un cálculo directo nos da

$$(\vec{m} \cdot \nabla)\vec{F} = \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - 3 \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^5} (\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) y usando el hecho que la divergencia de  $\vec{F}$  es nula en nuestro caso, obtenemos la siguiente expresión para el campo magnético producido por  $\vec{m}_1$  en  $\vec{r} \neq \vec{r}_1$ ,

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \left( 3 \frac{\vec{m}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} (\vec{r} - \vec{r}_1) - \vec{m}_1 \right) \quad (5)$$

Ahora, la energía de interacción entre los dos dipolos está dada por

$$U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi d^3} \left( \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3 (\vec{m}_1 \cdot \hat{d})(\vec{m}_2 \cdot \hat{d}) \right) \quad (6)$$

en que  $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $d = |\vec{d}|$  es la separación entre los dos dipolos magnéticos, y  $\hat{d} = \vec{d}/d$ .

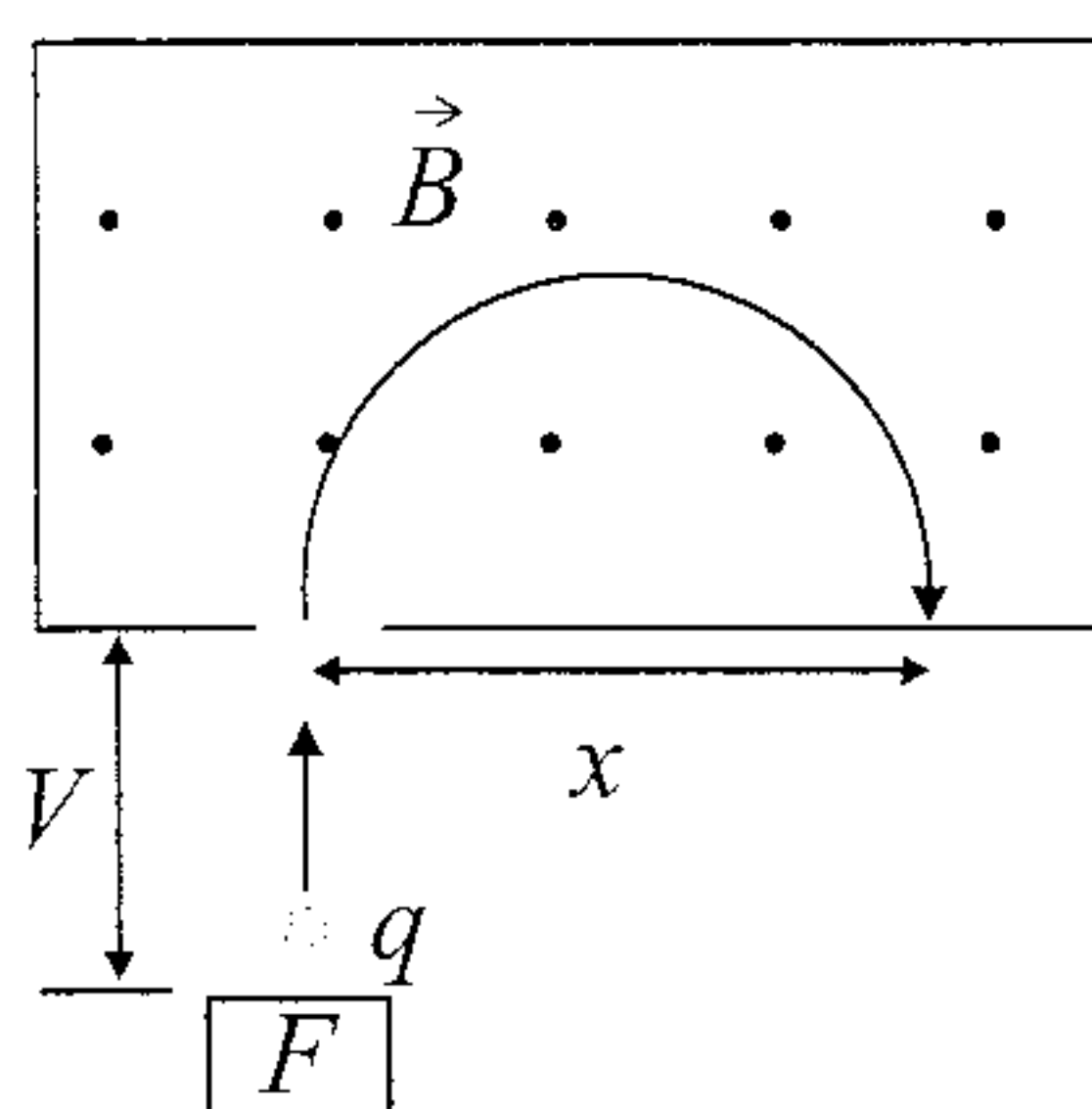
Nótese que, como era de esperar, la expresión de la energía de interacción entre los dos dipolos es simétrica en los índices 1 y 2 de los dipolos (i.e., hubieramos obtenido exactamente el mismo resultado calculando la energía como  $-\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2(\vec{r}_1)$ ).

Dejaremos el cálculo del torque para el lector. Este puede ser calculado directamente como  $\vec{m}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$ , utilizando (5).

**11.** El diagrama de la figura representa un dispositivo para medir las masas de iones. Un ion de masa  $m$  y carga  $+q$  sale de la fuente  $F$  prácticamente en reposo. Luego, el ion es acelerado por una diferencia de



potencial  $V$  y se le permite entrar a una región de campo magnético  $\vec{B}$ . En presencia de este campo se mueve en un semicírculo, incidiendo sobre una placa fotográfica a una distancia  $x$  desde la rejilla de entrada. Obtenga una expresión para la masa del ion en términos de  $|\vec{B}|$ ,  $q$ ,  $V$  y  $x$ .



### Solución:

Primero calculamos la velocidad con que el ion entra a la región con campo magnético. Recordemos que el ión en cuestión sale de la fuente  $F$  con velocidad cero y es acelerado por una diferencia de potencial  $V$ . Si llamamos  $v$  a la velocidad que tiene el ion luego de ser acelerado por la diferencia de potencial  $V$ , y usamos conservación de energía tenemos,

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad (1)$$

Es decir,  $v = (2qV/m)^{1/2}$ . Por otra parte, mientras el ion describe la órbita circular, en la región donde existe un campo magnético uniforme tenemos,

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad (2)$$

es decir, la fuerza centrífuga es igual a la fuerza de Lorentz ejercida por el campo magnético sobre el ión. Aquí, el radio  $R$  de la órbita circular es igual a la mitad de  $x$ . Reemplazando el valor de  $v$  encontrado en (1) en la ecuación (2) encontramos:

$$R^2 = \frac{2mV}{qB^2}. \quad (3)$$

Reemplazando  $R = x/2$  en (3), finalmente encontramos la masa del ión:

$$m = \frac{1}{8}q \frac{B^2 x^2}{V}$$

12. a) Una partícula cargada, de carga  $q$  y masa  $m$  parte del reposo en el origen de coordenadas en una región donde existe un campo eléctrico  $\vec{E}$  paralelo al eje  $x$ , y un campo magnético  $\vec{B}$  paralelo al eje  $z$ . Muestre que las coordenadas de la partícula un instante  $t$  más tarde serán:

$$\begin{aligned}x &= \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \\y &= -\frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t) \\z &= 0,\end{aligned}$$

donde  $\omega = |q|B/m$  (la trayectoria descrita por la partícula es una cicloide).

b) Se liberan electrones con velocidad cero desde la placa negativa de un condensador plano de placas paralelas, al cual se le aplica un campo magnético uniforme, paralelo a las placas. Demuestre que los electrones no alcanzan a llegar a la placa positiva si la separación  $d$  entre las placas es mayor que  $2mE/eB^2$ , en que  $E$  es el campo entre las placas.

**Solución:**

a) La fuerza que actúa sobre las partículas de carga  $q$  en presencia del campo electromagnético está dada en general por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

en que  $\vec{v}$  es la velocidad de las partículas. La ecuación de movimiento para una partícula cargada en presencia de la fuerza de Lorentz (1), es

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2)$$

En este caso particular  $\vec{E} = E\hat{i}$ ,  $\vec{B} = B\hat{k}$ . Si descomponemos la velocidad de la partícula en coordenadas cartesianas, i.e.,  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ , y reemplazamos las expresiones para  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  en (2) obtenemos las siguientes ecuaciones para las componentes de la velocidad:

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}(E + v_y B) \quad (4)$$

y,

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B \quad (5)$$

Integrando (3) obtenemos  $v_z(t) = c = v_z(0) = 0$ . Ahora derivando la ecuación (5) con respecto al tiempo y luego utilizando (4) para reemplazar  $dv_x/dt$  en términos de  $v_y$ , obtenemos una ecuación diferencial para  $v_y$ . Esta es:

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2v_y = -\omega^2\frac{E}{B} \quad (6)$$

en que  $\omega = |q|B/m$  (la frecuencia de Larmor). La solución general de la ecuación (6) es:

$$v_y(t) = A \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t - \frac{E}{B} \quad (7)$$

en que  $A$  y  $D$  son constantes de integración. Derivando (7) con respecto al tiempo y utilizando (5) encontramos:

$$v_x(t) = A \operatorname{sen} \omega t - D \cos \omega t \quad (8)$$

Usando las condiciones iniciales para la velocidad determinamos las constantes  $A$  y  $D$ . Como  $v_x(0) = v_y(0) = 0$ , obtenemos a partir de (7) y (8) que  $A = E/B$  y  $D = 0$ . Entonces,

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = \frac{E}{B} \operatorname{sen} \omega t \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) = \frac{E}{B}(\cos \omega t - 1) \quad (10)$$

y,

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = 0 \quad (11)$$

Integrando (9), (10) y (11), usando las condiciones iniciales  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ , finalmente obtenemos,

$$x = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \quad (12)$$

$$y = -\frac{E}{\omega B}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t) \quad (13)$$

y,

$$z = 0 \quad (14)$$

que era lo que se pedía demostrar.

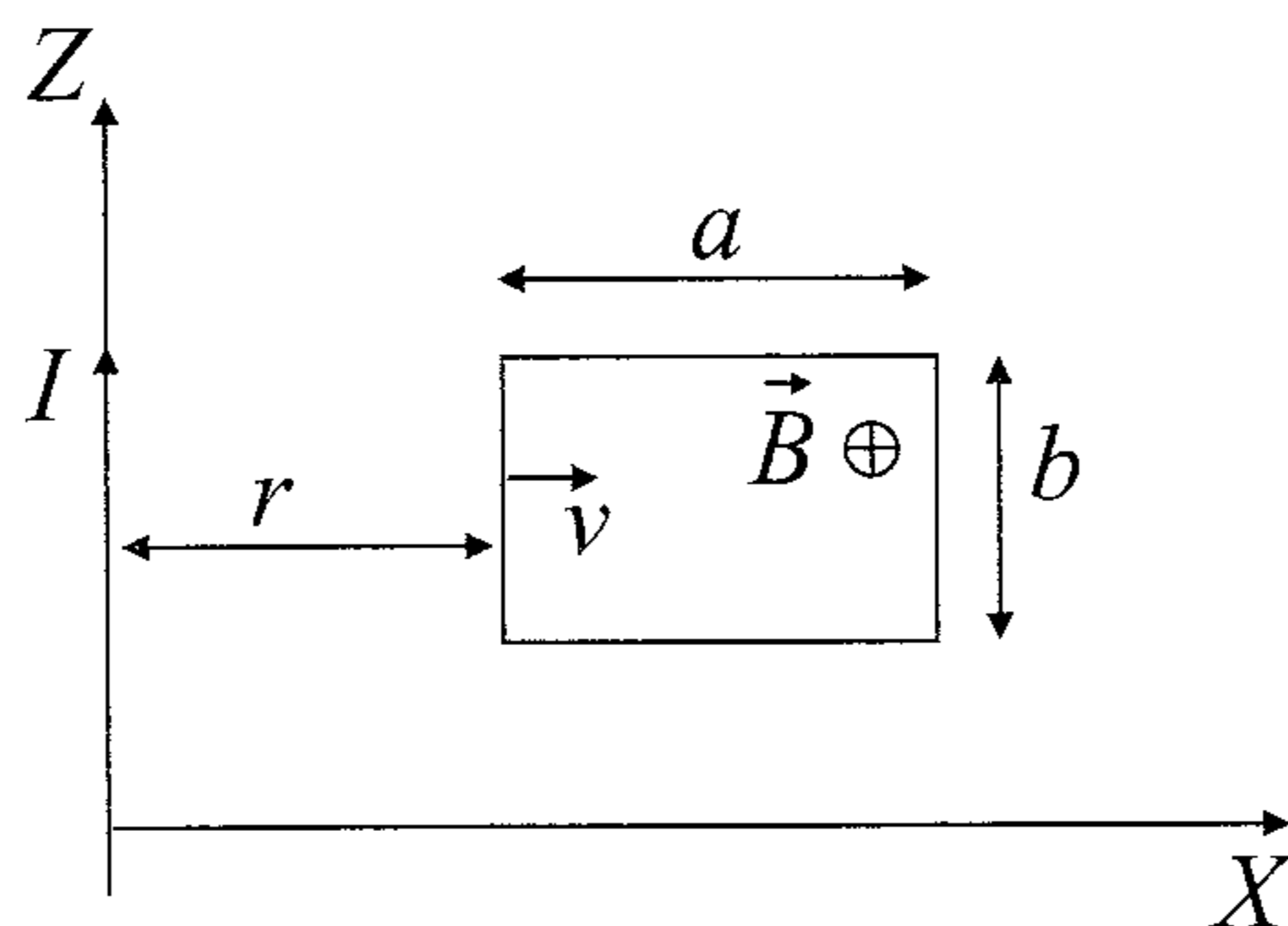
b) De (12) vemos que la amplitud máxima de  $x$  se obtiene cuando  $\cos \omega t = -1$ . En ese instante,

$$x_{\max} = \frac{2E}{\omega B} = \frac{2Em}{qB^2}$$

Por lo tanto, si  $d > (2Em/qB^2)$ , los electrones no alcanzan a llegar a la placa positiva.

## 8. Inducción

1. Si una espira rectangular de lados  $a$  y  $b$  se aleja con velocidad constante  $\vec{v}$  de un alambre infinito por el que circula una corriente  $I$ , como se muestra en la figura, determine la fuerza electromotriz inducida en la espira como función del tiempo. Suponga que en  $t = 0$ , la distancia del lado más cercano de la espira al alambre es  $r = h$ .



### Solución:

Elijamos ejes cartesianos de modo que el eje  $z$  coincida con el alambre infinito,  $x$  sea paralelo al vector  $\vec{v}$  e  $y$  sea perpendicular al plano de la espira, como se indica en la figura. Entonces, el campo producido por el alambre infinito en el plano de la espira, está dado por

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi|x|} \hat{j} \quad (1)$$

Si tomamos la dirección que entra a la hoja (i.e., la dirección  $\hat{j}$ ) como la dirección positiva para evaluar el flujo enlazado por la espira, el flujo

total de campo magnético enlazado por la espira está dado por

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi|x|} dx dz \quad (2)$$

Aquí hemos usado que el elemento de superficie está dado por  $d\vec{S} = dx dz \hat{j}$ . Evaluando la integral (2) obtenemos,

$$\phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \quad (3)$$

El flujo  $\phi$  enlazado por la espira varía en el tiempo debido al movimiento de ésta. Como la espira se aleja del alambre con rapidez constante  $v = |\vec{v}|$ , e inicialmente se encuentra a distancia  $h$  del alambre, tenemos  $r = r(t) = h + vt$ . Por la ley de inducción de Faraday, como el flujo de campo magnético enlazado por la espira varía en el tiempo, se induce una *fem* a lo largo de ésta. La fem inducida está dada por

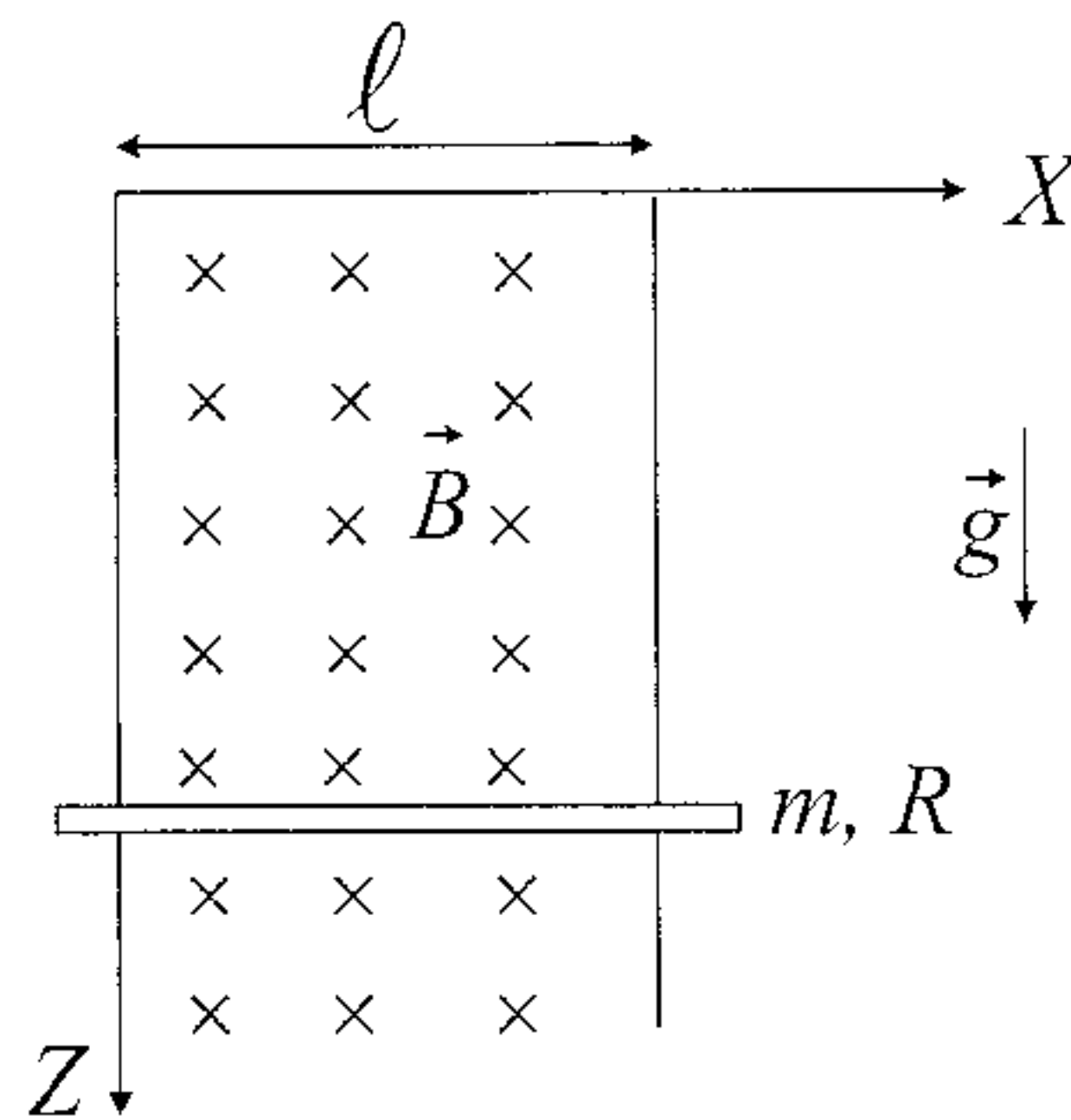
$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} v b \left( \frac{1}{a+h+vt} - \frac{1}{h+vt} \right)$$

que es, juntando términos,

$$\epsilon = \frac{\mu_0 I a b}{2\pi(h+vt)(h+vt+a)} v$$

La corriente inducida circula en el sentido de los punteros del reloj ya que el campo generado por ella debe compensar la pérdida de flujo que experimenta al alejarse del cable rectilíneo. De este hecho nos damos cuenta ya sea por esta consideración física, o, formalmente, nos es indicado por el hecho que, eligiendo el elemento de superficie  $d\vec{S}$  a lo largo de el eje  $y$ , hemos encontrado  $\epsilon > 0$ . Esto indica que la corriente inducida circula en el sentido de recorrido dado por la ley de la mano derecha (sentido indicado por los dedos al poner el pulgar derecho en la dirección del elemento de superficie).

**2.** Una varilla conductora con resistencia  $R$  se puede deslizar por una horquilla de resistencia despreciable, fija en el espacio, como se indica en la figura. El plano de la horquilla es vertical y lo atraviesa un campo magnético perpendicular uniforme y constante,  $\vec{B}$ . Hay contacto eléctrico



entre la varilla y la horquilla de modo que constituyen un circuito eléctrico cerrado. Si la varilla tiene masa  $m$ , calcule la velocidad con que ella cae (en el campo gravitatorio) si parte del reposo. Desprecie el efecto del roce, y los efectos autoinductivos.

**Solución:**

Al caer la barra, por acción del campo gravitatorio, aumenta el área del circuito eléctrico cerrado (formado por la varilla y la horquilla). Así, a pesar de que el campo magnético externo  $\vec{B}$  es constante (estamos despreciando efectos autoinductivos), el flujo enlazado por el circuito varía en el tiempo. Llamemos  $\ell$  al ancho de la horquilla, y  $z(t)$  la posición de la varilla, medida desde la parte superior de la horquilla. Elijamos el eje  $z$  de modo que  $\vec{g} = g\hat{z}$  y  $\vec{B} = -B\hat{y}$ . Tomando como elemento de superficie  $d\vec{S} = dx dz \hat{y}$ , encontramos que el flujo enlazado por el circuito está dado por

$$\phi(t) = -B \ell z(t) \quad (1)$$

Por la ley de Faraday, la fem inducida en el circuito está dada por

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B \ell v(t) \quad (2)$$

y la corriente inducida es en el sentido opuesto a los punteros del reloj. En (2),  $v(t) = dz/dt$  denota la velocidad con que cae la varilla. Como la varilla tiene una resistencia  $R$ , la corriente que circula por el circuito (por la ley de Ohm) está dada por

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} = \frac{B \ell}{R} v(t) \quad (3)$$

en el sentido opuesto a los punteros del reloj. Ya que por la varilla está circulando una corriente  $I$  y la varilla se encuentra inmersa en el campo

magnético  $B$ , existe una fuerza sobre ésta (la fuerza de Lorentz) cuyo módulo está dado por

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = -I B \ell \hat{z} \quad (4)$$

Esta fuerza se opone al movimiento de la varilla (está dirigida en el sentido contrario a  $\vec{g}$ ). Así pues sobre la varilla actúan dos fuerzas: su peso  $mg$  y la fuerza de Lorentz dada por (4). La ecuación de movimiento de la varilla está dada por

$$m \frac{dv}{dt} = mg - B\ell I \quad (5)$$

Usando (3) podemos reemplazar la corriente  $I$  en término de la velocidad  $v(t)$  en el lado derecho de (5) y de este modo obtenemos una ecuación diferencial para  $v(t)$ . Así tenemos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(B\ell)^2}{R} v \quad (6)$$

La solución general de (6) es:

$$v(t) = \frac{mgR}{(B\ell)^2} + A \exp(-(B\ell)^2 t / mR)$$

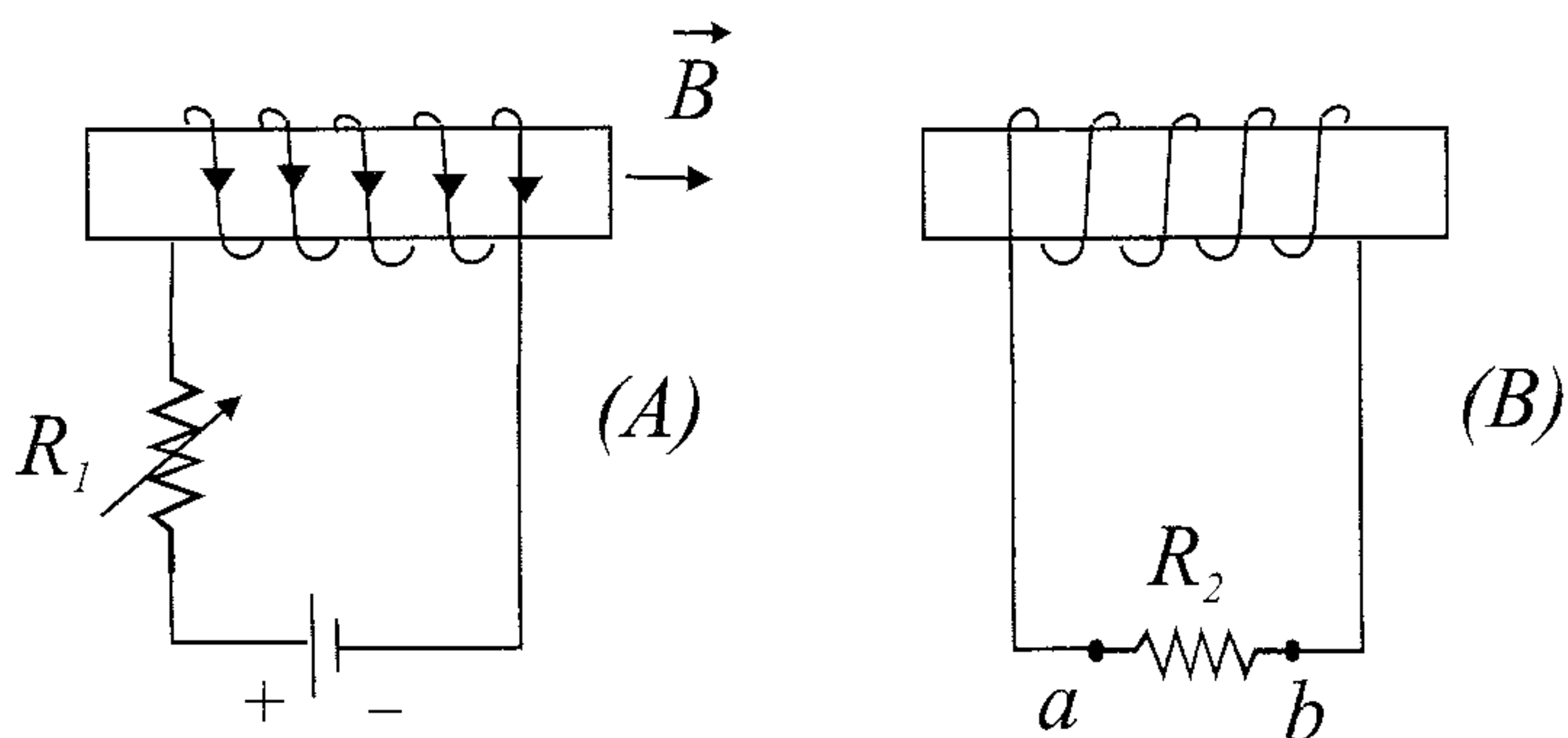
en que  $A$  es una constante de integración que se determina a partir del dato inicial. Si la varilla parte del reposo en  $t = 0$ ,  $A = -mgR/(B\ell)^2$ , y de este modo, la velocidad de la varilla es:

$$v(t) = \frac{mgR}{(B\ell)^2} \left( 1 - \exp(-(B\ell)^2 t / mR) \right)$$

**3.** Considere los dos circuitos acoplados que se indican en la figura ( $A$  y  $B$ ). Determine la dirección de la corriente inducida que circula por la resistencia  $R_2$ , cuando:

- la bobina  $B$  se acerca a  $A$ .
- la resistencia  $R_1$  disminuye.
- el circuito en  $A$  se abre.



**Solución:**

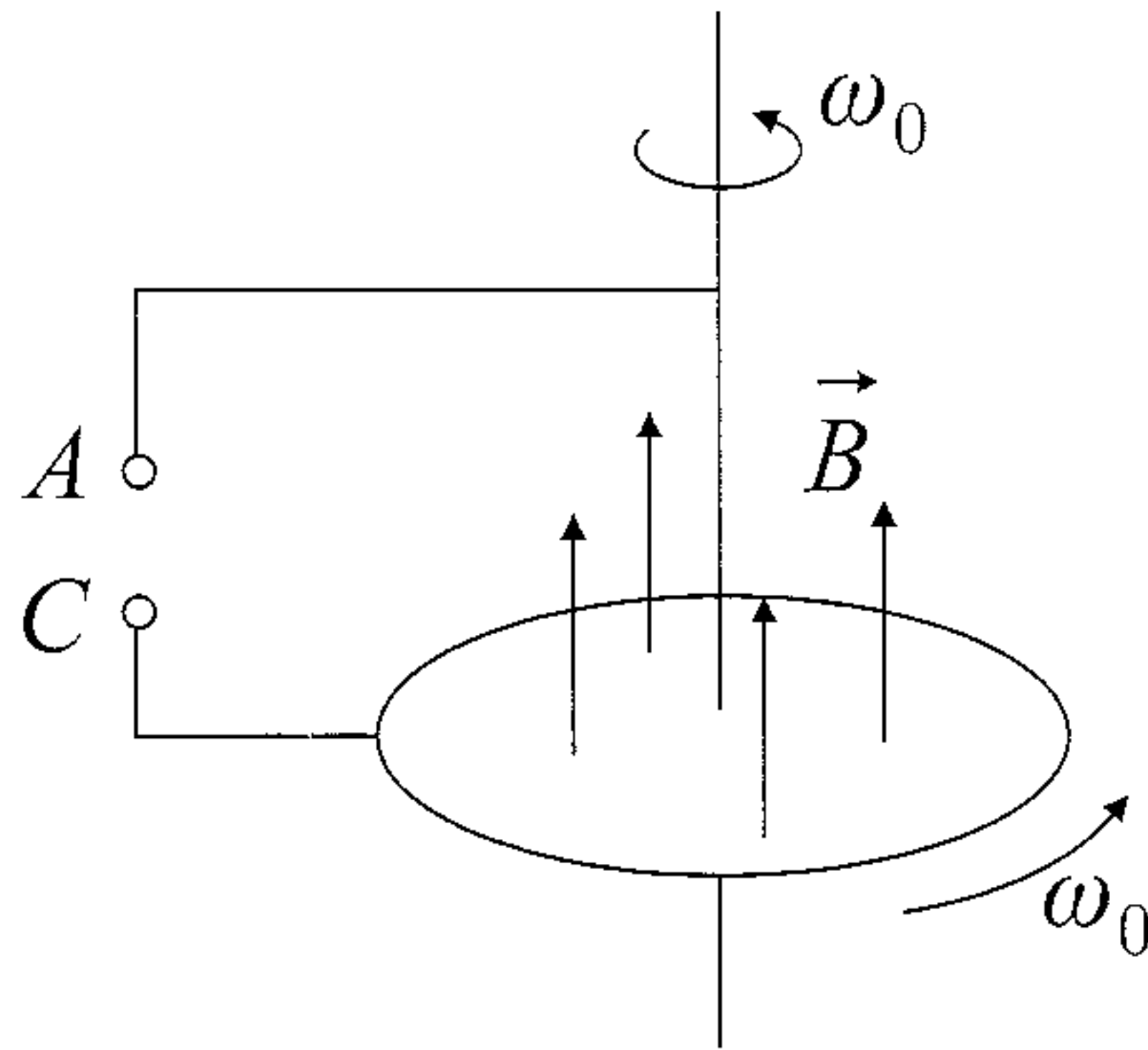
Utilizando la ley de Biot–Savart, vemos que el campo magnético producido por el circuito  $A$  apunta hacia la derecha (es prácticamente uniforme en el interior de la bobina  $A$ , apuntando hacia la derecha, y se abre al salir de la bobina). Parte de las líneas de fuerza del campo magnético generado por  $A$  son enlazadas por la bobina  $B$ . Ciertamente el flujo del campo magnético producido por  $A$ , que es enlazado por las espiras de la bobina  $B$  es positivo hacia la derecha. A continuación analizamos lo que sucede en cada una de las situaciones descritas en el enunciado: a) Si la bobina  $B$  se acerca a la bobina  $A$ , el flujo enlazado por  $B$  aumenta, y de acuerdo a la ley de Faraday–Lenz, se inducirá una *fem* en  $B$ , de tal modo que la corriente que circula por ella genera un campo (y por lo tanto un flujo) que se opone al aumento en cuestión. El campo creado por esta corriente debe ser, por lo tanto, dirigido hacia la izquierda. Esto ocurre cuando la corriente circula por  $R_2$  desde  $b$  hacia  $a$ .

b) Si  $R_1$  disminuye, la intensidad de corriente por el solenoide  $A$  aumenta, por lo que también aumenta el campo que produce. El flujo por el solenoide  $B$  también aumenta en consecuencia y tenemos la misma situación que en el caso anterior. La corriente circula por  $R_2$  desde  $b$  hacia  $a$ .

c) En este caso, al abrir el circuito, la corriente y el campo creado por el solenoide  $A$  disminuyen abruptamente. La corriente inducida en el solenoide  $B$  debe crear un campo hacia la derecha que compense esta pérdida de flujo. Esto implica que la corriente que se induce pasa por  $R_2$  desde  $a$  hacia  $b$ .

**4. El disco de Faraday.** Considere un disco conductor de radio  $a$  que gira a velocidad angular constante  $\omega$  en presencia de un campo magnético

uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ . Calcule la fem inducida entre los terminales  $A$  y  $C$  de la figura.



**Solución:**

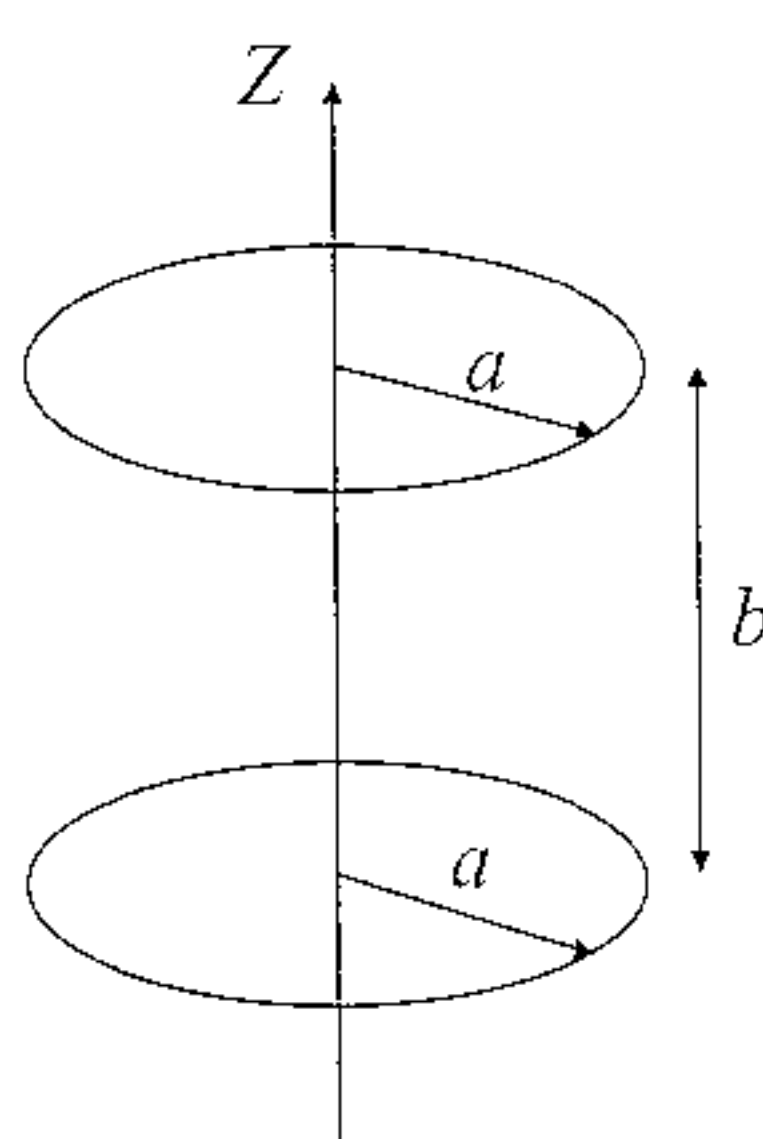
El disco es conductor. Supongamos que  $q$  es la carga de cada uno de los portadores en el interior del conductor. Como estos se mueven con el disco, y el disco está rotando con velocidad angular uniforme, los portadores a distancia  $r$  del centro del disco se mueven con una velocidad  $\vec{v} = \omega_0 r \hat{\theta}$ . Por otra parte el disco está sumergido en un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B \hat{k}$ . Entonces, los portadores están sometidos a una fuerza

$$\vec{F}(r) = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q B \omega_0 r \hat{\rho} \quad (1)$$

Esta fuerza desplaza las cargas positivas hacia el exterior del disco el que estará entonces a potencial más alto que el eje. La fem inducida entre los terminales  $A$  y  $C$  es igual al trabajo hecho por el campo de fuerzas (1), por unidad de carga, es decir,

$$V_C - V_A = \int_0^a B \omega_0 r dr = \frac{1}{2} B \omega_0 a^2 \quad (2)$$

5. Deduzca una formula aproximada para la inducción mutua entre dos anillos circulares del mismo radio  $a$ , dispuestos como ruedas en el mismo eje con sus centros separados a una distancia  $b$ . Use una aproximación válida para  $b \gg a$ .

**Solución:**

El campo magnético  $B$  producido por una espira circular de radio  $a$ , por la que circula una corriente  $I$ , en el eje de la espira y a una distancia  $z$  del centro de ella, está dado por

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2 z^3} \hat{k} \quad (1)$$

si  $z \gg a$ . Si la segunda espira se encuentra a una distancia  $b \gg a$ , el flujo del campo magnético producido por la primera, enlazado por la segunda es aproximadamente:

$$\phi \approx B(b) \pi a^2 \approx \frac{\mu_0 I}{2 b^3} \pi a^4 \quad (2)$$

Aquí hemos usado el hecho que el campo magnético en los puntos interiores del círculo encerrado por la segunda espira está dado aproximadamente por  $\vec{B}(b)$ . También usamos la expresión aproximada para  $\vec{B}(b)$  dada por (1).

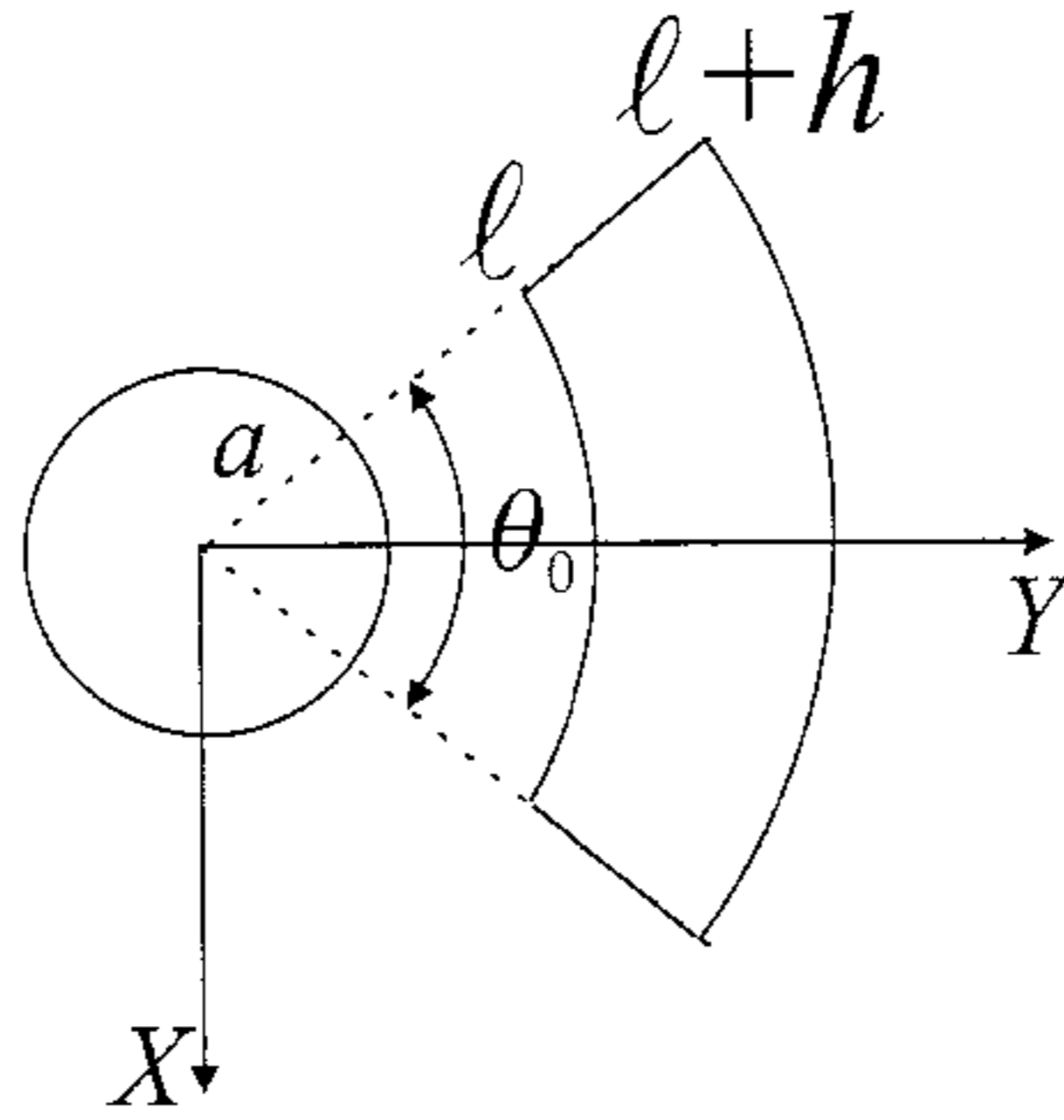
Finalmente, el coeficiente de inductancia mutua está dado por

$$M = \frac{\phi}{I} \approx \mu_0 \frac{(\pi a^2)^2}{2 \pi b^3}$$

**6.** Encuentre la inductancia mutua entre las dos espiras que se muestran en la figura ( $\ell \gg a$ ). Ambas espiras se encuentran en el plano  $z = 0$ . La primera es un círculo de radio  $a$ . La segunda está constituida por dos segmentos de círculo (concéntricos con la primera espira y de radios  $\ell$  y  $\ell + h$ ) y por dos segmentos radiales como se muestra en la figura.

Indicaciones:

- i) Use la aproximación dipolar en sus cálculos.
- ii) Para calcular el flujo de campo magnético, conviene usar el teorema de Stokes.



**Solución:**

El momento dipolar magnético de la espira circular está dado por

$$\vec{m} = I\vec{S} = \pi a^2 I \hat{k} \quad (1)$$

A grandes distancias de la espira circular (i.e., para  $|\vec{r}| \gg a$ ), el potencial magnético vector (en el gauge de Coulomb) es aproximadamente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

en que  $\vec{m}$  es el momento calculado en (1) y  $r = |\vec{r}|$ . Si utilizamos coordenadas polares en el plano de la espira circular (i.e., en el plano  $z = 0$ ), podemos escribir:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad \text{y} \quad \vec{m} \times \vec{r} = \pi a^2 I r \hat{\theta} \quad (3)$$

Reemplazando estas cantidades en (2) obtenemos el potencial magnético vector en cualquier punto  $(r, \theta)$  del plano de la espira circular (a grandes distancias de ésta),

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^2 I \hat{\theta} \quad (4)$$

Ahora, con el objeto de calcular la inductancia mutua entre las dos espiras, necesitamos calcular el flujo del campo magnético producido por la

espira circular y enlazado por la segunda espira. Usando el ley de Stokes y el hecho que  $\vec{B} = \nabla \times A$ , el flujo en cuestión puede ser escrito como

$$\phi = \int_{S_2} B \cdot d\vec{S} = \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (5)$$

En (5), la última integral es una integral de línea sobre la segunda espira. Para efectuar esta integral, conviene dividir la segunda espira en cuatro partes, dos segmentos radiales y dos segmentos circulares. Sobre los segmentos radiales el potencial magnético vector (paralelo a  $\hat{\theta}$ ) y el elemento de longitud  $d\vec{\ell}$  (paralelo a  $\hat{r}$ ) son ortogonales entre sí. Así pues, los segmentos radiales no contribuyen a la integral de línea de  $\vec{A}$  sobre la espira. Calculemos ahora la contribución del segmento circular de radio  $\ell + h$ . Sobre ese segmento  $d\vec{\ell} = -r d\theta \hat{\theta}$ , de modo que usando (4) obtenemos,

$$\int_{r=\ell+h} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\mu_0}{4} a^2 I \frac{\theta_0}{\ell + h} \quad (6)$$

Análogamente, sobre el segmento circular de radio  $\ell$ ,  $d\vec{\ell} = +r d\theta \hat{\theta}$ , de modo que usando (4) obtenemos,

$$\int_{r=\ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = +\frac{\mu_0}{4} a^2 I \frac{\theta_0}{\ell} \quad (7)$$

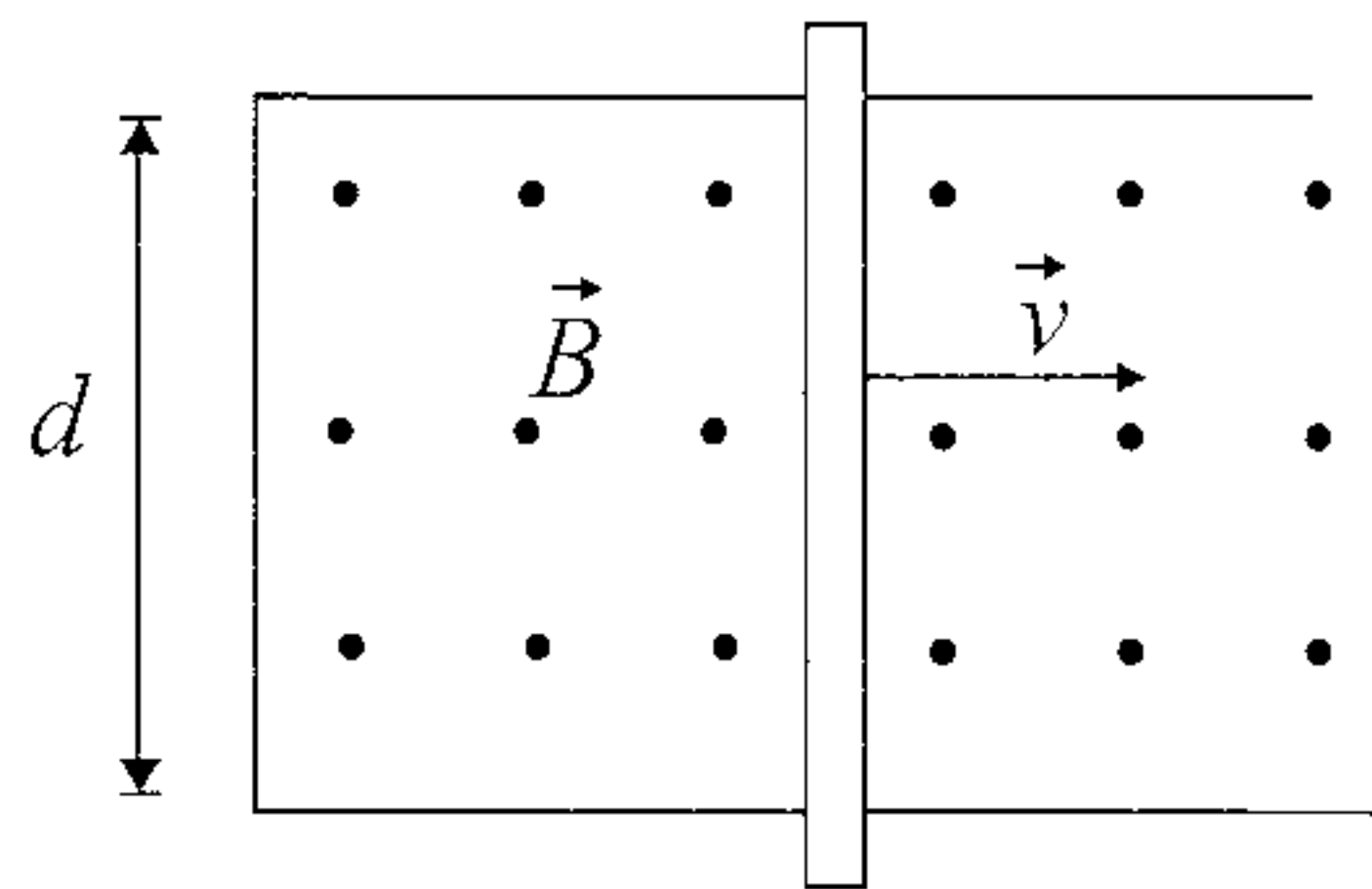
Sumando (6) y (7), obtenemos,

$$\phi = +\frac{\mu_0}{4} a^2 I \theta_0 \left( \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell + h} \right) \approx \frac{\mu_0}{4} \frac{a^2}{\ell^2} I (\theta_0 h) \quad (8)$$

puesto que  $\ell \gg h$ . Finalmente de (8) obtenemos,

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{4} \frac{a^2}{\ell^2} (\theta_0 h)$$

**7.** El generador elemental consiste en una horquilla de separación  $d$  y por la que puede deslizar una barra móvil de masa  $m$ , resistencia  $R$ . El circuito está inmerso en un campo magnético  $B$  perpendicular al plano de la horquilla. Con el objeto de generar una *fem* en el circuito cerrado formado por la horquilla y la barra móvil, se desplaza la barra en forma paralela a sí misma y con velocidad constante  $v$ . ¿Cuál es la potencia



que se debe entregar a la barra móvil para que ésta tenga una velocidad constante  $v$ ? ¿Cuánto vale la potencia disipada en la resistencia?

**Solución:**

Al desplazar la barra, el área del circuito cerrado varía y por lo tanto el flujo del campo magnético externo (aquí estamos despreciando los efectos de autoinducción) enlazado por el circuito varía linealmente en el tiempo. Por la ley de Faraday–Lenz la *fem* inducida al desplazar la barra es:

$$\epsilon = \frac{d\phi}{dt} = v B d \quad (1)$$

Si la resistencia de la horquilla es despreciable frente a la resistencia de la barra móvil, la corriente que circula por el circuito (por la ley de Ohm) es

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{v B d}{R}. \quad (2)$$

La fuerza que hace el campo magnético externo sobre la barra móvil, debida a la corriente que circula por ella (fuerza de Lorentz) está dada por

$$F = I d B = \frac{(Bd)^2}{R} v \quad (3)$$

y se opone al movimiento de ésta. Entonces la potencia mecánica que se debe entregar a la barra con el objeto de mantenerla en movimiento uniforme es:

$$P_{\text{mec}} = F v = \frac{(Bd)^2}{R} v^2 \quad (4)$$

Por otra parte, la potencia disipada en la resistencia por efecto joule es:

$$P_{\text{elec}} = R I^2 = \frac{(Bd)^2}{R} v^2 \quad (5)$$

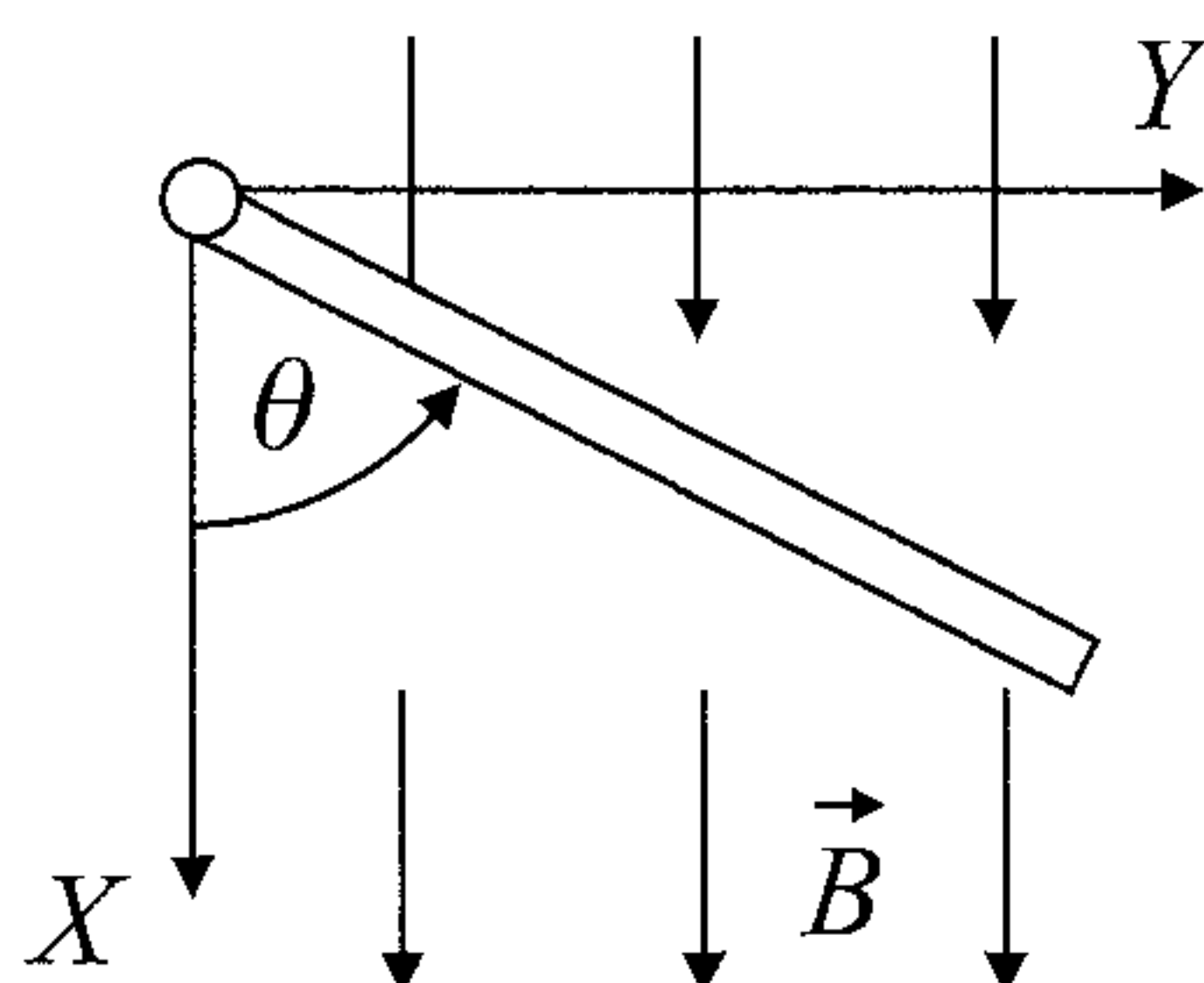
en que hemos usado (2) para expresar la corriente en términos de  $v$ . Como vemos de (4) y (5), en este generador ideal, toda la potencia mecánica entregada a la barra es disipada en la resistencia (toda la energía mecánica se transforma en energía eléctrica).

**8. Freno Magnético.** Una espira cuadrada de lado  $a$  y masa  $m$  puede girar libremente en torno a uno de sus lados (que se elige como eje  $z$ ). La espira tiene resistencia  $R$ . En el semiespacio  $y \geq 0$  existe un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{i}$  y en el resto del espacio el campo es nulo.

a) Suponga que en  $t = 0$  la espira tiene velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$  y que se encuentra en el plano  $y = 0$  como se muestra en la figura 2. Despreciando efectos de autoinducción encuentre la velocidad angular de la espira, una vez que ésta ha entrado en la región  $y > 0$ , como función del ángulo  $\theta$  entre la espira y el eje  $X$ . En particular calcule la velocidad angular con que la espira sale del semiespacio  $y \geq 0$ .

b) Calcule la energía disipada en la resistencia durante el tiempo que la espira permaneció en la región donde hay campo magnético.

c) ¿Cuál es la carga neta que pasó por un punto cualquiera, pero fijo, de la espira mientras ésta estuvo en dicha región?



Indicaciones:

i) El momento de inercia de la espira con respecto al eje  $z$  es  $J = 5ma^2/12$ .

ii) La ecuación de torque es  $\vec{\tau} = d(J\vec{\omega})/dt$ .

**Solución:**

a) Cuando la espira forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $\hat{i}$ , el flujo de campo magnético enlazado por la espira (ignorando efectos de autoinducción, i.e., ignorando el campo producido por la propia espira) es:

$$\phi = -B_0 a^2 \sin \theta \quad (1)$$

Con el objeto de calcular la *fem* inducida en la espira, primero fijemos los sentidos que llamaremos positivos para medir el flujo enlazado y la *fem* generada. Digamos que el flujo es positivo si entra a la espira (mirada desde el eje  $\hat{i}$ ). Fijemos como sentido positivo para recorrer la espira, el del sentido de los punteros del reloj cuando vemos la espira desde el eje  $\hat{i}$ . Con esta convención de signos, y de acuerdo a la ley de Faraday, la *fem* inducida en la espira está dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = +B_0 a^2 \cos \theta \dot{\theta} \quad (2)$$

Dado que la espira tiene una resistencia  $R$ , la corriente que circula por ella (de acuerdo a la ley de Ohm) es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = +\frac{B_0 a^2}{R} \cos \theta \dot{\theta} \quad (3)$$

(de acuerdo con la convención hecha más arriba, el sentido positivo de la corriente a lo largo de la espira es el sentido de los punteros del reloj cuando observamos la espira desde el eje  $\hat{i}$ ). Como la espira en cuestión es plana, su momento magnético se puede escribir como

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (4)$$

en que  $\vec{S}$  es un vector cuya magnitud es la superficie encerrada por la espira, en este caso  $a^2$ , y cuya dirección está relacionada con el sentido de circulación de la corriente por la espira de acuerdo a la regla de la mano derecha. En el presente caso, entonces,

$$\vec{S} = a^2(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (5)$$

El torque sobre la espira hecho por el campo magnético  $\vec{B}$  está dado por  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ , y de (3), (4), y (5), obtenemos,

$$\vec{\tau} = -\frac{B_0^2 a^4}{R} \cos^2 \theta \dot{\theta} \hat{k} \quad (6)$$

El momento angular de la espira con respecto al punto  $O$  es:

$$\vec{L} = J\dot{\theta} \hat{k} \quad (7)$$



donde el momento de inercia de la barra con respecto al eje  $z$  está dado por  $J = 5ma^2/12$ . La ecuación de torque por lo tanto, utilizando (6) y (7), se escribe como

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = J\ddot{\theta} = -\frac{B_0^2 a^4}{R} \cos^2 \theta \dot{\theta} \quad (8)$$

Usando  $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ , podemos reescribir (8) como

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{B_0^2 a^4}{4R} (2\theta + \sin 2\theta) \right) \quad (9)$$

Finalmente, integrando (9) entre  $t = 0$  y el instante en que la espira abandona la región con campo magnético (i.e.,  $\theta = \pi$ ), obtenemos,

$$-\Delta\omega \equiv (\omega_f - \omega_i) = -\frac{B_0^2 a^4}{2RJ} \pi$$

y, reemplazando el valor de  $J$ ,

$$\Delta\omega = \frac{6\pi (B_0 a)^2}{5 mR} \quad (10)$$

Uno puede calcular a partir de (10) el número  $n$  de vueltas que alcanza a dar la espira antes de detenerse, haciendo  $n\Delta\omega = \omega_0$ .

b) La energía disipada en la resistencia es igual a la pérdida de energía cinética de la espira, pérdida que está dada por

$$\Delta U = \frac{1}{2} J\omega_i^2 - \frac{1}{2} J\omega_f^2 \quad (11)$$

Reemplazando el valor de  $\omega_f$  en términos de  $\omega_i \equiv \omega_0$  en la ecuación (11), usando el resultado de la parte a) (i.e., la ecuación [10]), finalmente tenemos,

$$\Delta U = \frac{B_0^2 a^4}{4R} \pi \left( 2\omega_0 - \frac{6\pi (B_0 a)^2}{5 mR} \right)$$

c) De (2) y (3) tenemos que

$$\frac{dq}{dt} = I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} \quad (12)$$

Integrando (12) entre  $t = 0$  y el instante que la espira abandona la región con campo magnético (i.e., el instante en que  $\theta = \pi$ ), tenemos  $\Delta q = -\Delta\phi/R = 0$ .

9. Un experimento que suele utilizarse para ilustrar la fuerza magnética es el de la contracción que sufre un resorte al hacer circular por él una corriente. Para tal efecto, considere un resorte de constante elástica  $k$  y de largo natural  $\ell_0$ . Supongamos que el resorte está hecho de un material conductor, que tiene  $N$  vueltas (espiras) y que es de sección transversal de área  $A$ . ¿Cuánto se comprime el resorte al hacer circular por él una corriente  $I$ ?

**Solución:**

Llamemos  $x$  al largo del resorte. La fuerza que ejerce el resorte está dada por

$$\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\hat{i} \quad (1)$$

Ahora, si consideramos al resorte (desde el punto de vista electromagnético) como una bobina de  $N$  vueltas, de largo  $x$  y de sección transversal  $A$ , presenta una inductancia que está dada aproximadamente por

$$L = L(x) = \mu_0 \left(\frac{N}{x}\right)^2 x A = \mu_0 \frac{N^2 A}{x} \quad (2)$$

en que  $N/x$  es el número de vueltas por unidad de largo de la bobina, y  $xA$  es el volumen encerrado por la bobina. Cuando circula por el resorte una corriente  $I$ , la energía magnética almacenada en el campo en el interior del resorte (i.e., de la *bobina*) está dada por

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (3)$$

Al hacer circular una corriente por el resorte (i.e., por la *bobina*), actúan dos fuerzas sobre él. Por una parte está la fuerza elástica dada por (1), y por otro la fuerza magnética, que se puede calcular a partir de (3), utilizando el principio de los Trabajos Virtuales. En efecto:

$$\vec{F}_m = \frac{\partial W_m^I}{\partial x} \hat{i} \quad (4)$$

en que el rótulo  $I$  significa que debemos mantener  $I$  constante al derivar. (Recuerde que  $\phi$ , juega, en el caso de las bobinas, un papel análogo al que juega  $Q$  en el caso de los condensadores. La corriente  $I$  a su vez, juega un papel análogo al voltaje  $V$  de los condensadores). De (3) y (4) obtenemos,

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 A}{x^2} I^2 \hat{i} \quad (5)$$

En equilibrio, la suma de las fuerzas debe ser cero,  $\vec{F}_r + \vec{F}_m = 0$ . Así, de (1) y (5) obtenemos,

$$\frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 A^2}{x^2} I^2 + k(x - \ell_0) = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación cúbica para  $x$ , el valor de equilibrio del largo del resorte. Fuera de los parámetros propios del problema, este valor de equilibrio depende de la corriente  $I$  que circula por el resorte. Con el objeto de analizar las soluciones de la cúbica (6), es conveniente definir:

$$S = \mu_0 \frac{N^2 A^2}{k} I^2 \quad (7)$$

Podemos entonces reescribir la ecuación (6) para  $x \geq 0$  como

$$f(x) \equiv \frac{S}{2x^2} + x = \ell_0 \quad (8)$$

La función  $f(x)$  tiene un mínimo para  $x = x_m \equiv S^{1/3}$  y  $f(x_m) = 3S^{1/3}/2$ . Entonces, solo existe solución (positiva) de (8) si  $3S^{1/3}/2 \leq \ell_0$ , i.e., si  $S \leq (2\ell_0/3)^3$ . Si  $S = (2\ell_0/3)^3$  existe solución única,  $x = x_m$ , en tanto que si  $S < (2\ell_0/3)^3$  existen dos soluciones, digamos  $x_-$  y  $x_+$ . Estas dos soluciones positivas son tales que  $x_- < x_m$  y  $x_+ > x_m$ . A continuación veremos que solamente  $x_+$  corresponde a un punto de equilibrio estable. En efecto, de (1) y (5), la fuerza total sobre el resorte está dada por

$$F(x) = -k(x - \ell_0) - \frac{1}{2}S kx^2 \quad (9)$$

Ciertamente  $F(x_{\pm}) = 0$ . Si evaluamos  $F(x)$  alrededor de los puntos de equilibrio, usando expansión en serie de Taylor alrededor de  $x_{\pm}$ , tenemos de (9),

$$F(x_{\pm} + \epsilon) \approx k\epsilon \left( \frac{S}{x_{\pm}^3} - 1 \right) \quad (10)$$

De (10) vemos que  $x_+$  es un punto de equilibrio estable, pues alrededor de dicho punto

$$F(x_+ + \epsilon) = -kA\epsilon \quad (11)$$

en que  $A = (1 - S/x_+^3) > 0$ , es una fuerza restitutiva (i.e., si nos apartamos ligeramente de la posición  $x_+$  la fuerza apunta hacia  $x_+$ ). Un análisis similar demuestra que  $x_-$  es una posición de equilibrio inestable.

Podemos resumir la situación en términos de la corriente  $I$  que circula por el resorte como sigue:

a) Si  $I > I_c \equiv (2\ell_0/3)^{3/2} \sqrt{(k/\mu_0)/(NA)}$ , entonces no hay posición de equilibrio (en este caso el resorte colapsa).

b) Si  $I \leq I_c$  hay una sola posición de equilibrio estable, que corresponde a la única solución de (9) tal que  $x > S^{1/3}$  (esta solución es la que hemos denotado como  $x_+$ ).

**10.** Un cable coaxial está constituido por dos cascarones cilíndricos conductores perfectos, concéntricos, de radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ). Este cable se cortocircuita en uno de sus dos extremos, mediante un disco conductor perfecto que puede moverse. La corriente que circula por cada cilindro es  $I$ . Calcule la energía magnética y la inductancia propia del sistema, para el caso en que el extremo móvil se encuentre a una distancia  $z$  del otro extremo.

**Solución:**

Si elegimos coordenadas cilíndricas, con el eje  $z$  como el eje de simetría común de los dos cilindros, el campo magnético en el espacio entre los dos cascarones está dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (1)$$

La energía magnética está dada por

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dv \quad (2)$$

en que la integral se extiende a todo el volumen contenido entre  $r = a$  y  $r = b$ , y entre  $z = 0$  y  $z = z$ . De (1) y (2) obtenemos

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^z \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\theta dz \quad (3)$$

y, efectuando las integrales que aparecen en (3), finalmente obtenemos

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 z \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4)$$

Ahora podemos calcular la autoinductancia directamente a partir de (4), puesto que  $U_m = LI^2/2$ . Así obtenemos

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} z \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

## 9. Medios Magnéticos

1. Un solenoide de radio 2 cm y largo 100 cm está enrollado con un alambre fino a razón de 60 vueltas por centímetro, transportando una corriente de 4 A. El interior del solenoide está lleno de un material paramagnético cuya susceptibilidad es de  $2,9 \times 10^{-4}$ .

a) ¿Cuál es la magnitud de  $\vec{H}$  dentro de la sustancia?

b) ¿Cuál es la magnetización  $\vec{M}$  dentro de la sustancia?

c) ¿Cuál es la magnitud de la inducción magnética  $\vec{B}$ , en el interior de la sustancia? ¿Cuál sería la magnitud de  $\vec{B}$  si el solenoide estuviera vacío?

d) ¿Cuál sería la magnitud de  $\vec{B}$  si en el interior del solenoide se sustituyera el material paramagnético por hierro dulce de  $\kappa_m = 500$  ?

### Solución:

a) Si despreciamos los efectos de borde (i.e., si aproximamos el campo magnético dentro de la bobina por el de un solenoide infinito), el campo magnético  $\vec{H}$  en el interior es:

$$\vec{H} = nI\hat{k} \quad (1)$$

en que  $\hat{k}$  es un vector unitario a lo largo del eje del solenoide y  $n$  es el número de vueltas del enrollado por unidad de longitud. La magnitud del campo es  $nI = 60 \times 100 \times 4 = 2,4 \times 10^4$  A/m.

b) La magnetización  $\vec{M}$  está dada por

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m n I \hat{k} \quad (2)$$

La magnitud de la magnetización es  $2,4 \times 2,9 = 6,96$  A/m.

c) La magnitud de  $\vec{B}$  es  $\kappa_m \mu_0$  veces la magnitud de  $\vec{H}$ . Aquí,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  y  $\kappa_m = 1 + \chi_m = 1,00029$ . Utilizando el resultado de a), obtenemos

$|\vec{B}| = 3,0168 \times 10^{-2} \text{ T}$  (i.e.,  $|\vec{B}| = 301,68 \text{ Gauss}$ ). Si el solenoide estuviese vacío,  $|\vec{B}| = \mu_0 |\vec{H}| = 3,0159 \times 10^{-2} \text{ T}$ .

d) En este caso  $|\vec{B}| = 4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 2,4 \times 10^4 = 15 \text{ T}$ .

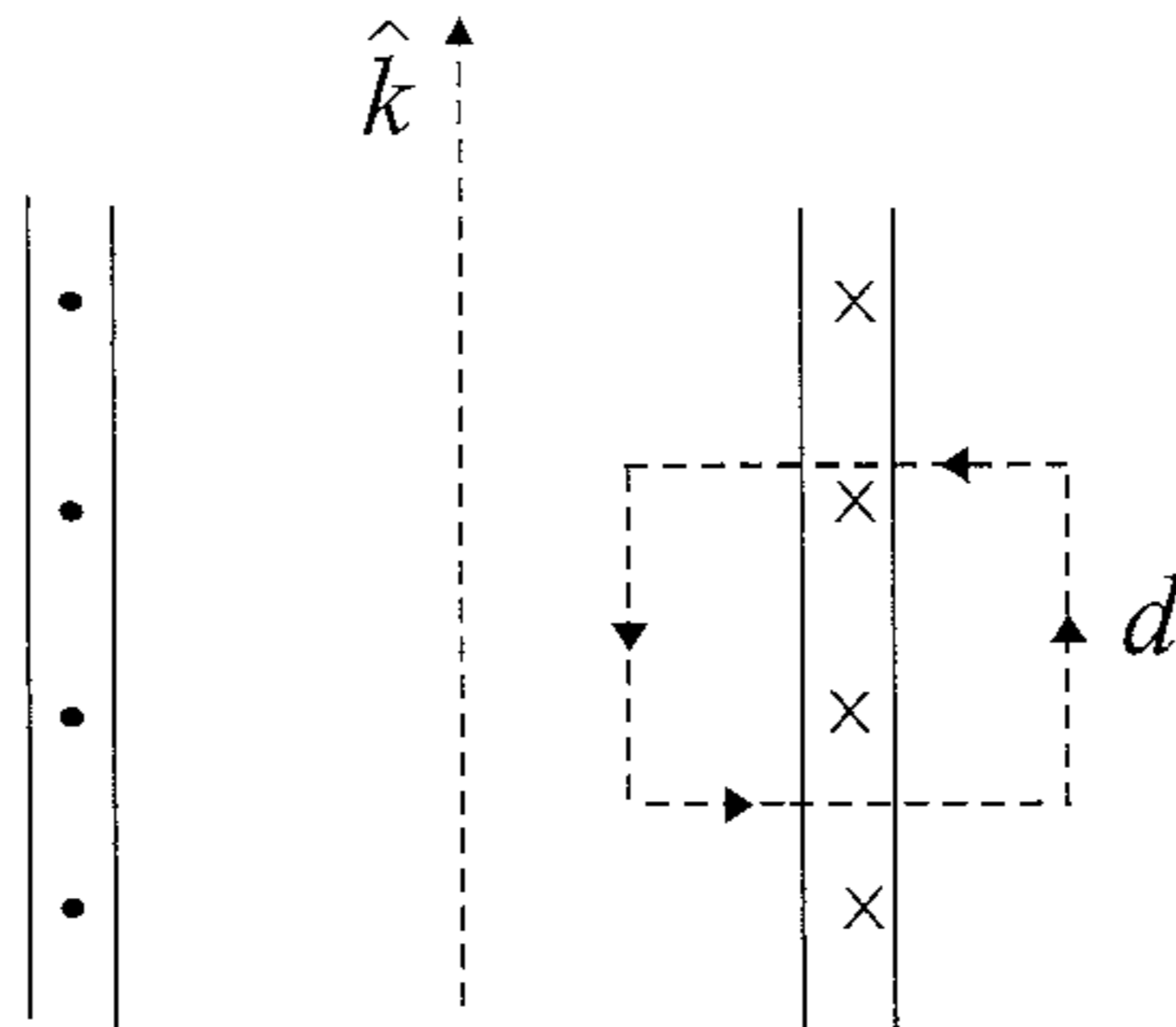
**2.** Un solenoide largo con núcleo de hierro dulce que posee 2000 vueltas/m transporta una corriente de 20 mA. Con esta corriente, la permeabilidad relativa del núcleo de hierro es 1200.

a) ¿Cuál es el campo de inducción magnética dentro del solenoide?

b) Cuando se extrae el núcleo de hierro, determine la corriente necesaria para producir el mismo campo dentro del solenoide.

**Solución:**

Llamemos  $\hat{k}$  a la dirección paralela al eje del solenoide. Tal como ocurre con el solenoide en vacío (i.e., sin núcleo de hierro), el campo magnético es uniforme en el interior del solenoide y su dirección es a lo largo de  $\hat{k}$ . Fuera del solenoide el campo es nulo. Utilizando la ley circuital de Ampère  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enc}}$  y tomando como curva de Ampère el camino de la figura,



obtenemos de inmediato,

$$\vec{H} \cdot \hat{k} d = N d I$$

en que  $N d$  es el número de vueltas de la bobina encerradas por el circuito de Ampère  $C$  de la figura. Así, en el interior del solenoide

$$\vec{H} = N I \hat{k} \quad (1)$$

en que  $I$  es la corriente que circula por el solenoide y  $N$  es el número de vueltas por unidad de longitud del enrollado. Como en el interior del

solenoide se ha puesto un núcleo de hierro dulce, la magnetización del núcleo es:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2)$$

en que  $\chi_m$  es la susceptibilidad magnética del hierro dulce. (*Nota:* como la curva de histéresis del hierro dulce es muy delgada, se suele asumir un comportamiento lineal entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  para este tipo de material ferromagnético). Finalmente, el campo de inducción está dado por

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H}) = \mu_0 \kappa_m \vec{H} \quad (3)$$

en que  $\kappa_m = 1 + \chi_m$  es la permeabilidad relativa del núcleo de hierro. Ahora, de (1) y (3) tenemos,

$$\vec{B} = \mu_0 \kappa_m N I \hat{k}$$

Para los datos numéricos del problema, la magnitud del campo de inducción magnética es:

$$B = \mu_0 1200 \times 2000 \times 20 \times 10^{-3} \approx 0,06 \text{T}$$

Aquí hemos usado que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$

b) Para un solenoide en vacío

$$\vec{B} = \mu_0 N I \hat{k}$$

Para producir 0,06 T se necesita entonces una corriente de

$$I = \frac{0,06}{\mu_0 N} = \frac{0,06}{4\pi \times 10^{-7} 2000} = 23,9 \text{A.}$$

**3.** Una esfera de material magnético de radio  $R$  se coloca en el origen de coordenadas. La magnetización está dada por

$$\vec{M} = (a x^2 + b) \hat{i},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Determine todas las corrientes polares y las corrientes de magnetización.

**Solución:**

Con el objeto de calcular el potencial magnético vector (y, en consecuencia el campo de inducción magnética) producido por la esfera magnetizada, uno puede reemplazar la esfera magnetizada por dos distribuciones de corriente, una en superficie y una en el volumen de la esfera. Estas distribuciones de corriente se conocen como corrientes de magnetización. La corriente de magnetización en volumen está dada en términos de la magnetización por

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (1)$$

en tanto que la corriente de magnetización en superficie está dada por

$$\vec{j}_m = \vec{M} \times \hat{n} \quad (2)$$

en que  $\hat{n}$  es la normal a la superficie. En el ejemplo en cuestión  $\vec{M} = (ax^2 + b)\hat{i}$ , de modo que  $\nabla \times \vec{M} = 0$  en todo el volumen de la esfera. Así,  $\vec{J}_m = 0$ . Por otra parte, sobre la superficie de la esfera, usando coordenadas esféricas,  $\hat{n} = \hat{r}$ , y,  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ . Además  $\hat{r} = \cos \theta \hat{k} + \sin \theta (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j})$ , de modo que  $\hat{i} \times \hat{r} = -\cos \theta \hat{j} + \sin \theta \sin \varphi \hat{k}$ . Entonces,

$$\vec{j}_m = (aR^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + b) [\sin \theta \hat{k} - \cos \theta \hat{j}]$$

(o, en cartesianas,  $\vec{j}_m = (ax^2 + b)(y\hat{k} - z\hat{j})/R$ ).

Uno puede hacer algo similar si desea calcular el potencial magnético escalar producido por la esfera magnetizada. Para tal efecto se puede reemplazar la esfera magnetizada por dos densidades polares de carga, que (al igual que en medios materiales dieléctricos) están dadas por

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}$$

(densidad polar en volumen) y,

$$\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}$$

(densidad polar en superficie). En el ejemplo en cuestión:

$$\rho_m = -\frac{\partial M_x}{\partial x} = -2ax$$



en tanto que

$$\sigma_m = (ax^2 + b)\hat{i} \cdot \hat{r} = (ax^2 + b)\frac{x}{R}$$

en que  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ , sobre la superficie de la esfera.

4. Un anillo de hierro templado de longitud media 15 cm se enrolla con una bobina toroidal de 100 vueltas. Determine la inducción magnética en el anillo cuando la corriente en el devanado es: a) 0,1 A; b) 0,2 A; y, c) 1,0 A.

**Solución:**

Si usamos coordenadas cilíndricas con el eje  $z$  coincidiendo con el eje de simetría de la bobina toroidal, el campo magnético en el interior de la bobina es de la forma:

$$\vec{H} = H(r, z)\hat{\theta} \quad (1)$$

Podemos utilizar la ley circuital de Ampère para calcular  $H(r, z)$ . Tomemos como curva de Ampère un círculo de radio  $r$  perpendicular al eje  $z$ , centrado en este eje, y totalmente contenido en el interior de la bobina. Por la ley circuital de Ampère

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = IN \quad (2)$$

en que  $N$  es el número de vueltas del enrollado alrededor de la bobina toroidal. Como  $d\vec{r} = r d\theta \hat{\theta}$ , de (1) y (2), obtenemos,

$$2\pi r H(r, z) = IN$$

es decir,

$$H(r, z) = H(r) = \frac{NI}{2\pi r}$$

y, finalmente

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r}\hat{\theta} \quad (3)$$

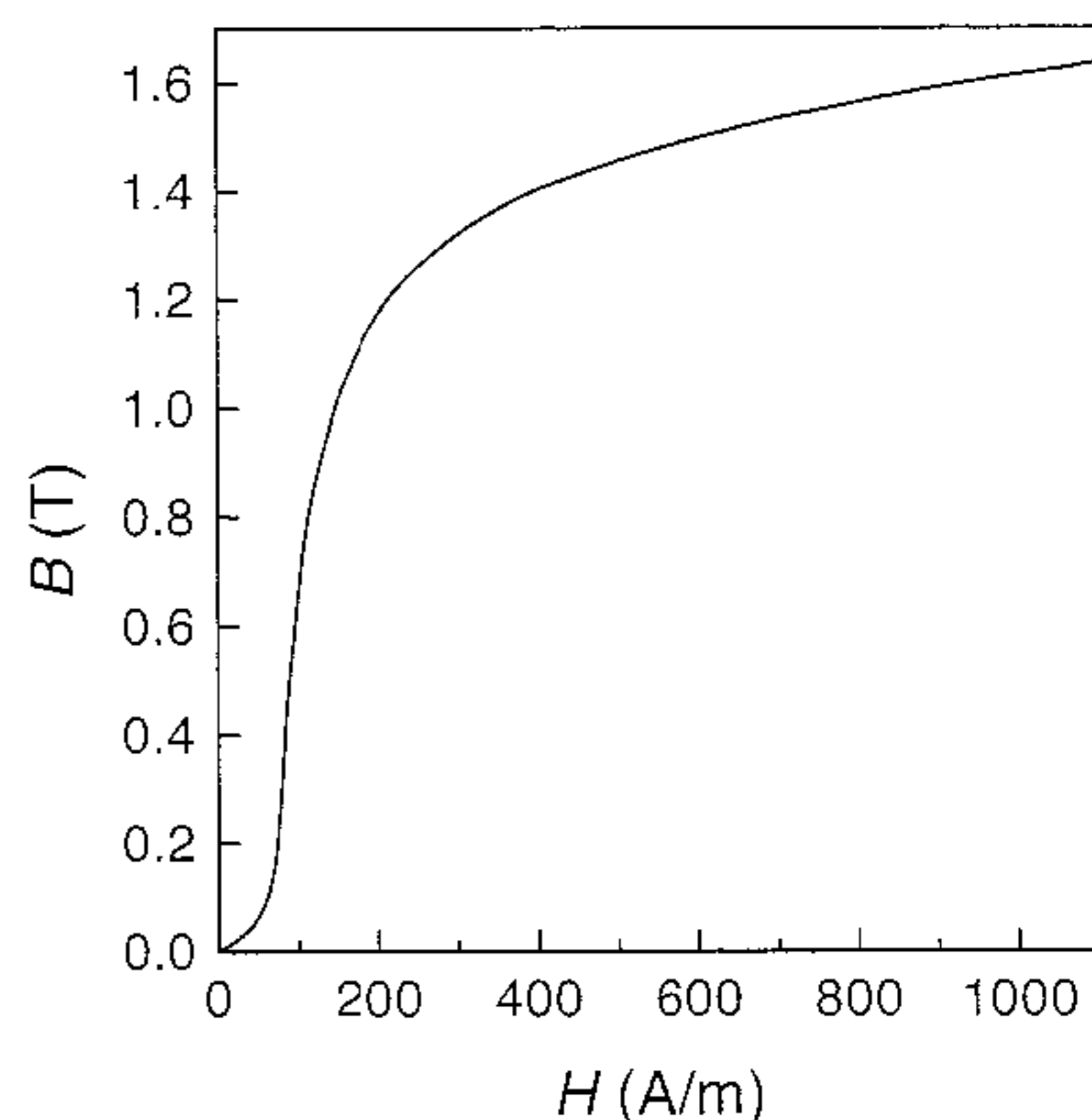
Como la longitud media del núcleo de hierro templado es  $\ell$ , el radio medio de la bobina toroidal es  $r = \ell/2\pi$ , de modo que el campo magnético en el interior del núcleo es, aproximadamente:

$$\vec{H} = \frac{NI}{\ell}\hat{\theta} \quad (4)$$

Para los datos numéricos del problema, i.e.,  $N = 100$  y  $\ell = 0,15$  m, de (4) tenemos,

$$H = |\vec{H}| = 666,67 \times IA/m \quad (5)$$

Como el hierro templado tiene una curva de histeresis altamente no lineal (ver figura), el campo de inducción  $\vec{B}$  para distintas corrientes lo tenemos que encontrar gráficamente.

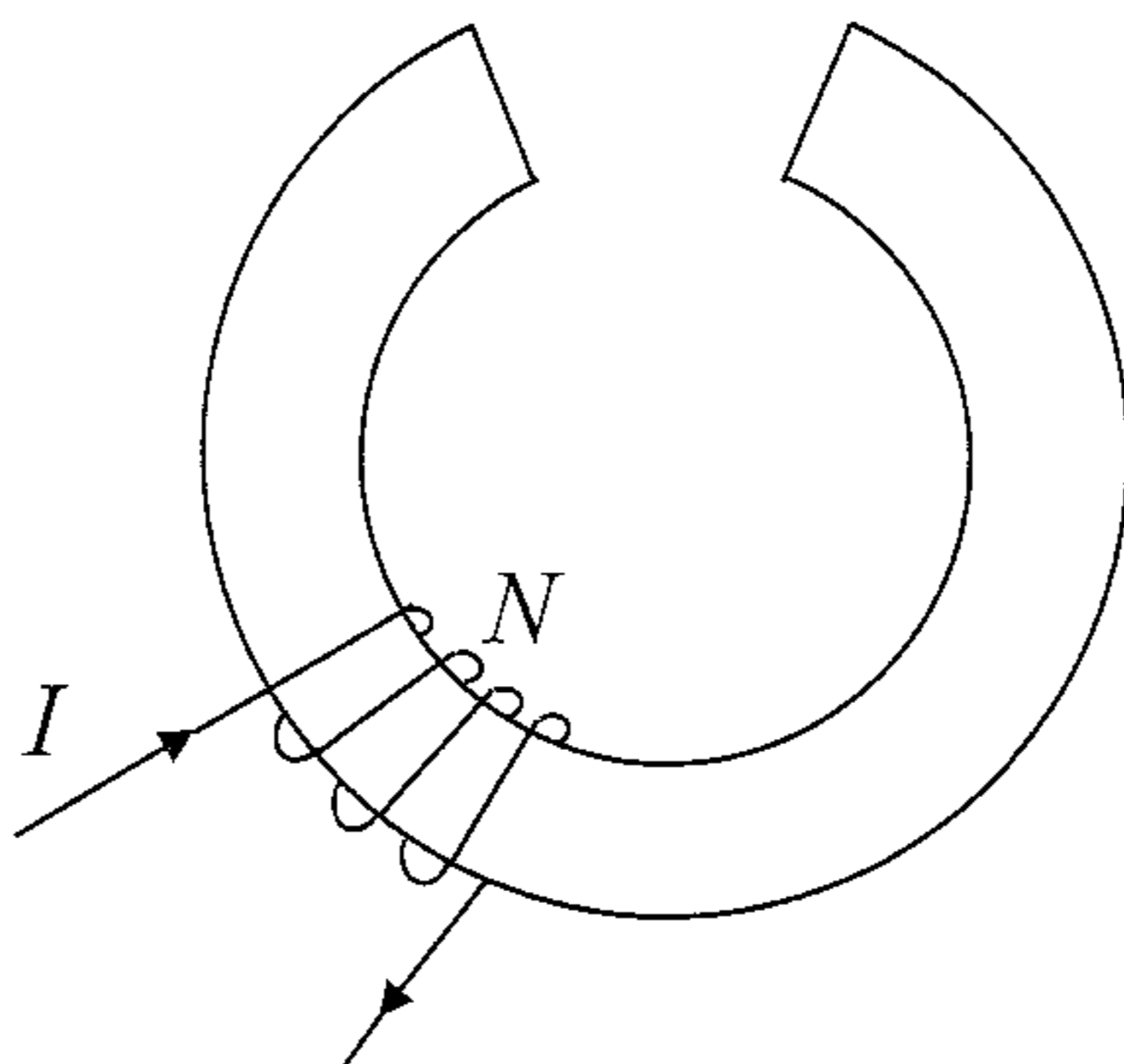


Así, si  $I = 0,1$  A, de (5) tenemos  $H = 66,7$  A/m y leyendo del gráfico tenemos  $B \approx 0,2$  T. Si  $I = 0,2$  A, de (5) tenemos  $H = 133,3$  A/m y leyendo de la figura,  $B \approx 0,9$  T. Finalmente, si  $I = 1$  A, de (5) tenemos  $H = 667$  A/m, y del gráfico leemos  $B \approx 1,5$  T.

**5.** Un anillo de hierro dulce con un hueco lleno de aire de 1,0 cm se enrolla en forma toroidal como ilustra la figura. La longitud media del anillo de hierro es de 20 cm, su sección transversal es  $4 \text{ cm}^2$  y su permeabilidad, que se supone constante,  $3000 \mu_0$ . El enrollado de 200 vueltas lleva una corriente de 10 A. Encuentre  $B$  y  $H$  dentro del anillo y en el hueco de aire.

### Solución:

Si suponemos que no hay fugas de las líneas del campo  $\vec{B}$ , y que todas las líneas que van a lo largo del hierro atraviesan también el hueco de aire, podemos analizar el sistema como si fuera un circuito magnético.



En este caso tenemos dos reluctancias en serie (i.e., las correspondientes al núcleo de hierro dulce y al hueco de aire) y una fuerza magnetomotriz, asociada al enrollado. Si llamamos  $\phi$  al flujo del campo  $\vec{B}$  que atraviesa el núcleo y el hueco de aire, la ecuación que describe al circuito es:

$$\mathcal{E}_{mm} = NI = \phi(\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_a) \quad (1)$$

en que  $\mathcal{R}_h$  y  $\mathcal{R}_a$  denotan las reluctancias del hierro y del aire respectivamente. Si llamamos  $A$  a la sección transversal común del hierro y del aire, y  $d$  al largo medio del hueco y  $\ell$  al largo medio del núcleo de hierro, las reluctancias de ambos elementos están dadas aproximadamente por

$$\mathcal{R}_h = \frac{\ell}{\mu_0 \kappa_m A} \quad (2)$$

y,

$$\mathcal{R}_a = \frac{d}{\mu_0 A} \quad (3)$$

En (2),  $\kappa_m = 3000$  denota la permeabilidad magnética relativa del núcleo de hierro. Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos,

$$\phi = \frac{NI\mu_0\kappa_m A}{d\kappa_m + \ell} \quad (4)$$

De (4) podemos obtener de inmediato el módulo de la inducción magnética

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{NI\mu_0\kappa_m}{d\kappa_m + \ell} \quad (5)$$

Para los valores numéricos del problema,  $B = 0,25$  T. Finalmente las magnitudes del campo magnético en el hueco de aire y en el núcleo de hierro son:

$$H_a = \frac{B}{\mu_0} = 1,98 \times 10^5 \text{ A/m}$$

y

$$H_h = \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = 66 \text{ A/m}$$

**6.** Un electroimán que tiene forma de  $U$ , de longitud  $\ell$ , separación entre los polos  $d$  y permeabilidad  $\mu$ , tiene una sección transversal cuadrada de área  $A$ . Se enrolla con  $N$  vueltas de alambre por las cuales pasa una corriente  $I$ . Calcule la fuerza con la cual el imán sostiene contra sus polos una barra del mismo material y de la misma sección transversal. Suponga que el núcleo del electroimán es de hierro dulce.

### Solución:

Para calcular la fuerza que ejerce el electroimán sobre la barra usaremos el principio de los trabajos virtuales. Para ello separamos la barra a una distancia  $x$  del electroimán. Calculamos la energía magnética  $W$  del sistema como función de  $x$ ; entonces, la fuerza que el electroimán ejerce sobre la placa está dada por

$$\vec{F} = - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \hat{i} \quad (1)$$

en que la derivada está calculada manteniendo el flujo de inducción magnética  $\phi$  constante.

Si suponemos que no hay fuga de líneas de campo  $\vec{B}$ , y como la sección del hierro dulce es constante, e igual a  $A$ , el flujo de las líneas de campo es:

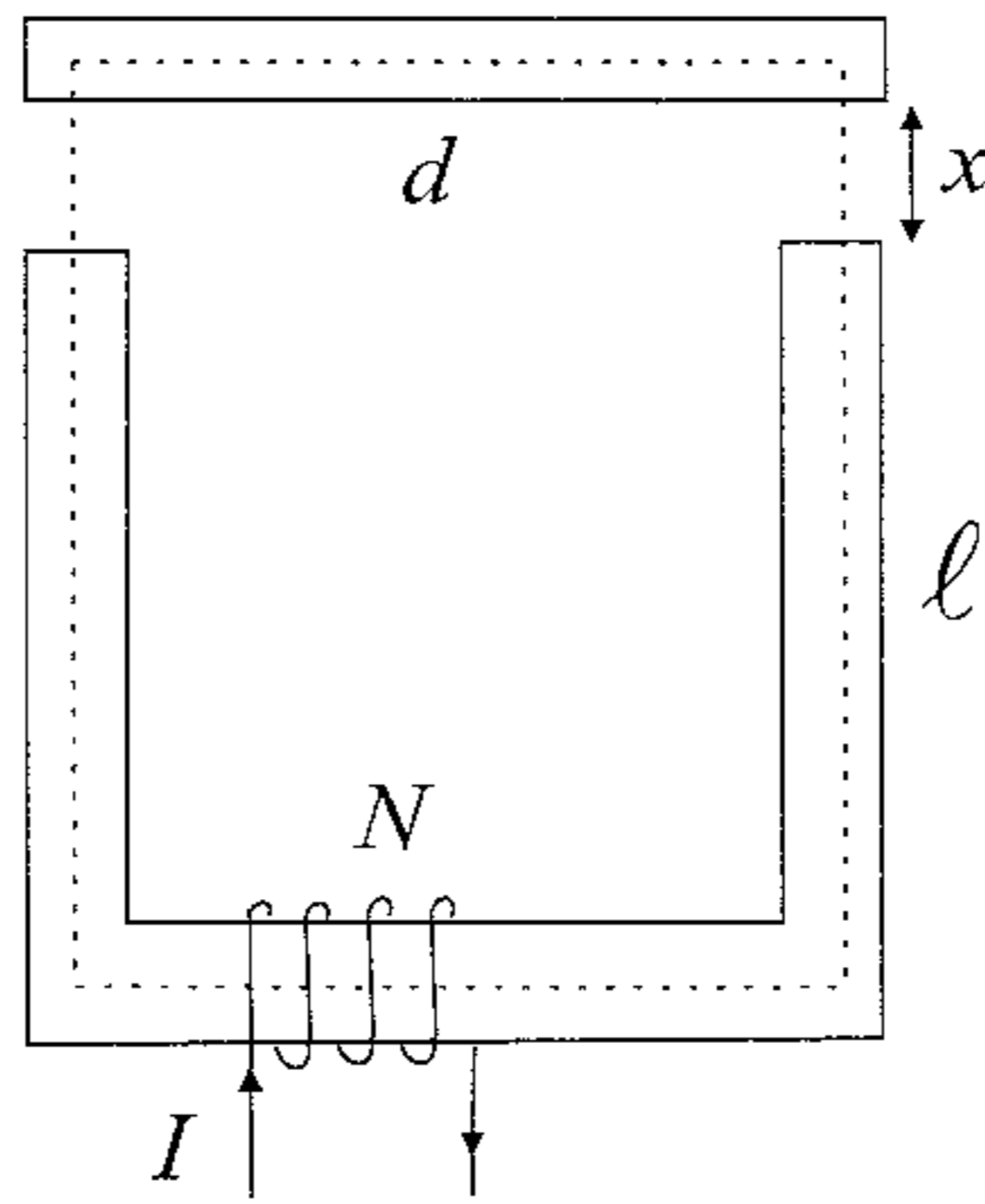
$$\phi = B A \quad (2)$$

Aunque el hierro dulce es ferromagnético, aproximadamente se puede utilizar el regimen lineal, i.e.,  $\vec{B} = \mu_0 \kappa_m \vec{H}$  en que la permeabilidad relativa  $\kappa_m$  es aproximadamente constante. De este modo, en el nucleo de hierro se tiene,

$$H_h = \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = \frac{\phi}{\mu_0 \kappa_m A} \quad (3)$$

en tanto que en el aire

$$H_a = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\phi}{\mu_0 A} \quad (4)$$



Utilizando la ley circuital de Ampère a lo largo del circuito cerrado (ver línea punteada en la figura) tenemos,

$$NI = \varepsilon_{m.m.} = H_h(\ell + d) + H_a 2x \quad (5)$$

De (3), (4) y (5) obtenemos,

$$\phi = \frac{NI\mu_0\kappa_m A}{2x\kappa_m + (\ell + d)} \quad (6)$$

Por otra parte, despreciando las fugas, la energía magnética almacenada en este sistema está dada por

$$W = \frac{1}{2}H_h \cdot B A (\ell + d) + \frac{1}{2}H_a \cdot B A 2x \quad (7)$$

y utilizando (3) y (4) para reemplazar  $H_h$  y  $H_a$  en términos de  $\phi$  obtenemos,

$$W = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\mu_0\kappa_m} \frac{1}{A} (\ell + d) + \frac{1}{2} \frac{\phi^2 2x}{\mu_0 A} \quad (8)$$

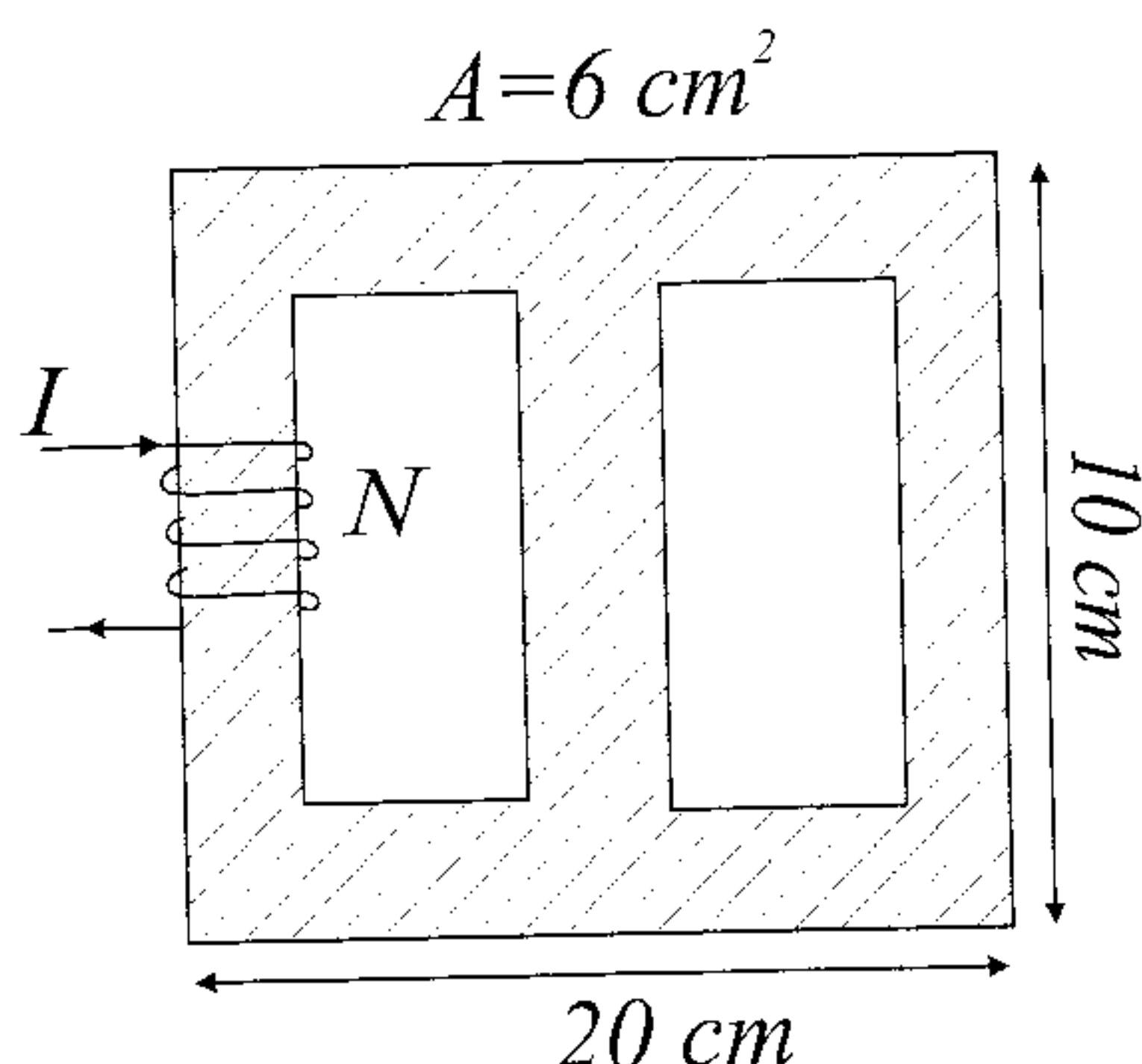
De (8),

$$-\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{\phi} = -\frac{\phi^2}{\mu_0 A}$$

y la fuerza resulta ser atractiva:

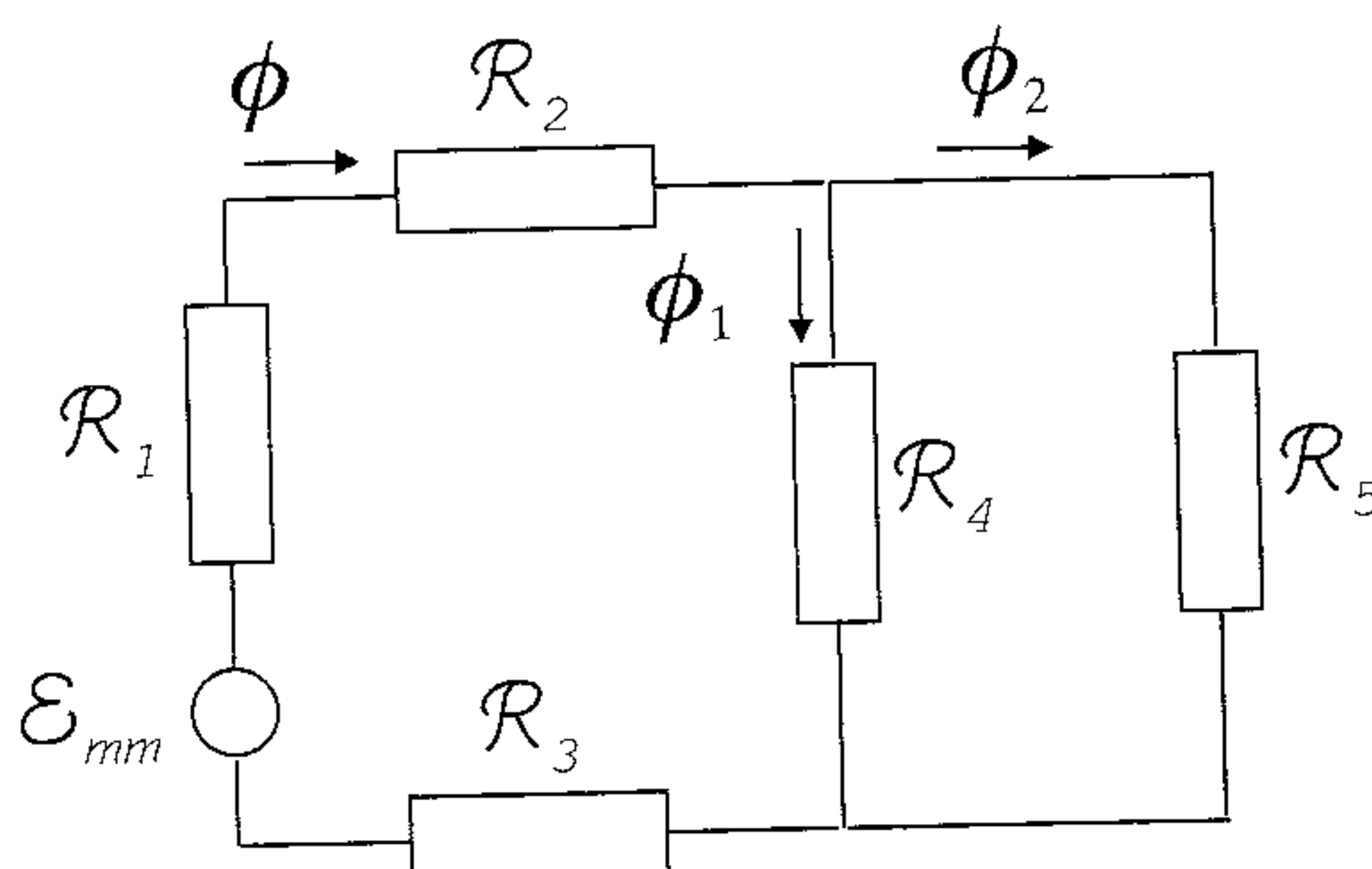
$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{\phi} \hat{i} = -\frac{\phi^2}{\mu_0 A} \Big|_{x=0} \hat{i} = -\frac{N^2 I^2 \mu_0 \kappa_m^2 A}{(\ell + d)^2} \hat{i}$$

7. Un circuito magnético que tiene la forma de la figura se enrolla con 100 vueltas de alambre que conduce una corriente de 1 A. El devanado se localiza en el extremo izquierdo del circuito. La altura del circuito es de 10 cm, su longitud es de 20 cm, la sección transversal de cada extremidad es de  $6 \text{ cm}^2$  y su permeabilidad, que se considera constante, es  $5000 \mu_0$ . Despreciando la fuga, calcule el flujo magnético por la extremidad central y también por el extremo derecho del circuito.



### Solución:

El dispositivo a estudiar puede ser representado por el circuito magnético de la figura:



Los distintos valores de  $\mathcal{R}$  corresponden a cada una de las reluctancias equivalentes de las extremidades del núcleo de hierro. La fuerza magnetomotriz en este caso está dada por  $\mathcal{E}_{mm} = NI = 100 \text{ A-vuelta}$ . Como

supondremos que no hay fugas de líneas de fuerza del campo  $\vec{B}$  fuera del núcleo de hierro, podemos estudiar el circuito en cuestión como si se tratara de un circuito eléctrico. El flujo  $\phi$  juega el papel de la corriente. La ley de nodos refleja la conservación de flujo magnético (i.e., el hecho que no escapan las líneas de fuerza fuera del núcleo), en tanto que la ley de mallas es una consecuencia de la ley circuital de Ampère. En general, la reluctancia de cada uno de los brazos del núcleo está dada, en forma aproximada, por

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu A} \quad (1)$$

en que  $\ell$  representa el largo medio del brazo,  $A$  el área de la sección transversal y  $\mu$  la permeabilidad del material. En nuestro caso todos los brazos tienen la misma sección  $A = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  y la misma permeabilidad  $\mu = 5000\mu_0$ . Así, de (1) vemos que la reluctancia en cada uno de los brazos del circuito está dada por

$$\mathcal{R} = \frac{1}{3\mu_0} d \quad (2)$$

Entonces, en el circuito en cuestión

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_4 = \frac{1}{30\mu_0} \quad (3)$$

en tanto que

$$\mathcal{R}_5 = 3\mathcal{R}_1 = \frac{1}{10\mu_0} \quad (4)$$

Todas estas reluctancias están expresadas en A/Weber. Las leyes de composición de reluctancias son las mismas que las leyes de composición de resistencias en los circuitos eléctricos. Así pues, en el circuito magnético de la figura, la reluctancia equivalente, vista desde la *fente* queda dada por

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \frac{\mathcal{R}_4 \mathcal{R}_5}{\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5} \quad (5)$$

Reemplazando los valores de cada una de las reluctancias en (5) finalmente obtenemos,

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{8} \quad (6)$$

Ahora, utilizando la *ley de mallas* (que es una consecuencia inmediata de la ley de Ampère) para el circuito magnético en cuestión, obtenemos

el flujo magnético  $\phi$  que sale de la fuente:

$$\phi = \frac{\mathcal{E}_{mm}}{\mathcal{R}_{eq}} = 1,0 \times 10^{-3} \quad \text{Weber} \quad (7)$$

Para obtener el valor numérico de  $\phi$  en (7), hemos utilizado  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Weber/(A-m). Como hemos dicho, el valor de  $\phi$  obtenido en (7) representa el flujo magnético que sale de la fuente. Este se divide luego en dos,  $\phi_1$ , el flujo que atraviesa el brazo central y  $\phi_2$  que atraviesa el brazo derecho del circuito. Utilizando la ley de nodos y de mallas tenemos respectivamente,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (8)$$

y,

$$\mathcal{R}_4\phi_1 = \mathcal{R}_5\phi_2 \quad (9)$$

Resolviendo estas ecuaciones, finalmente encontramos

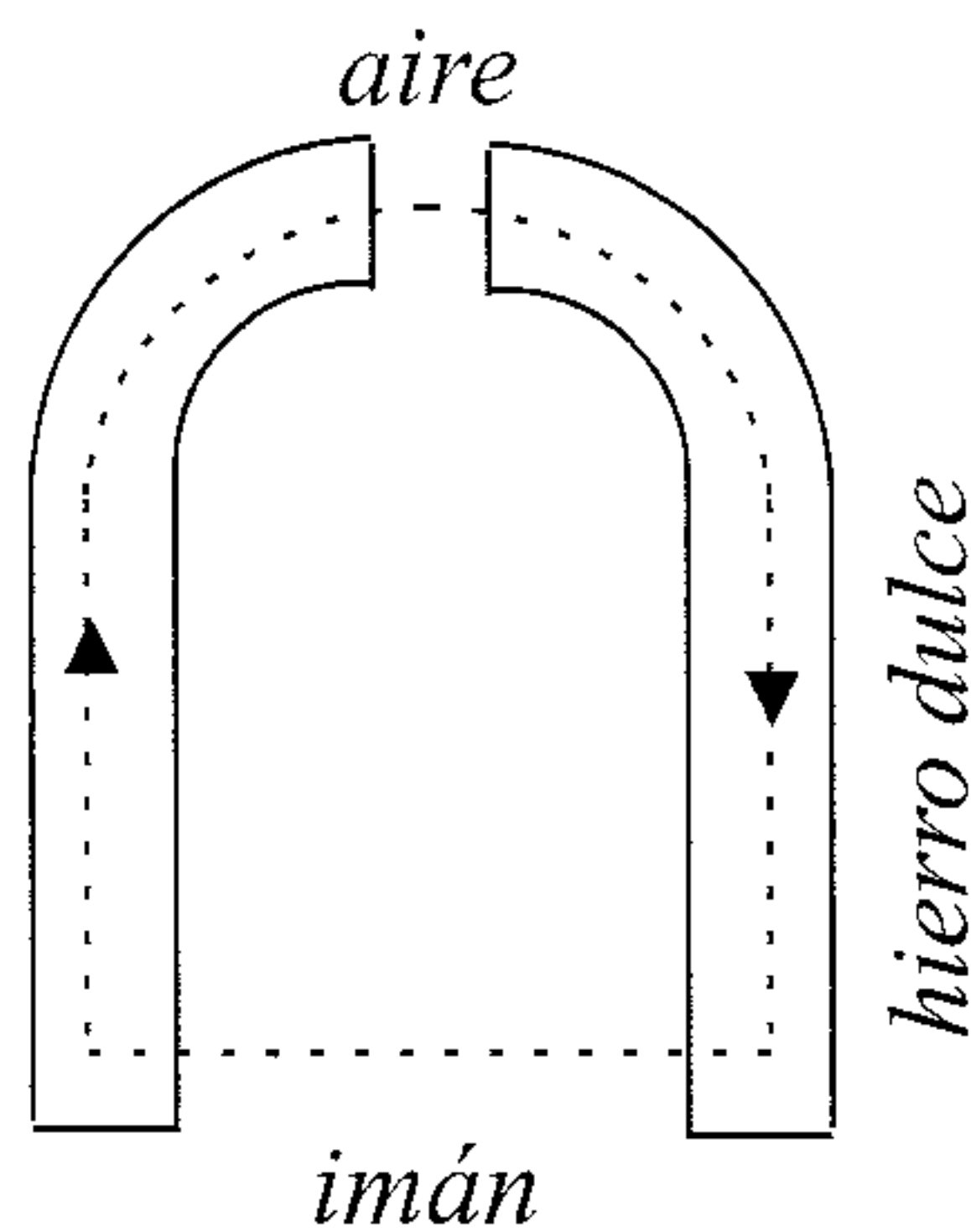
$$\phi_1 = \frac{\mathcal{R}_5}{\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5}\phi = \frac{3}{4}\phi = 0,75 \times 10^{-3} \quad \text{Weber,}$$

y,

$$\phi_2 = \frac{\mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5}\phi = \frac{1}{4}\phi = 0,25 \times 10^{-3} \quad \text{Weber.}$$

**8.** Un circuito magnético de la forma que ilustra la figura tiene un imán de ALNICO 5 de 10 cm de longitud, una trayectoria de hierro dulce de 16 cm y un hueco lleno de aire de 1 cm. También está enrollado con 800 vueltas-ampère de alambre (en un sentido tal que fortalece el flujo producido por el imán). Encuentre la densidad de flujo magnético en el hueco lleno de aire. Desprecie la fuga, considere  $\kappa_m = 5000$  para el hierro dulce y suponga que las secciones transversales del imán, del hierro dulce y del hueco lleno de aire son iguales.



**Solución:**

Llamemos  $d = 0,01$  m a la longitud del hueco de aire,  $\ell = 0,16$  m a la longitud media del hierro dulce,  $s = 0,1$  m a la longitud del imán,  $NI = 800$  A-vuelta a la fuerza magnetomotriz,  $\kappa_m = 5000$  a la permeabilidad relativa del hierro dulce y  $A$  a la sección transversal común de todos estos elementos. Si utilizamos la ley circuital de Ampère a lo largo de un circuito cerrado que atraviesa imán, hierro dulce y hueco de aire, obtenemos la siguiente ecuación (que representa la *ecuación de mallas* para el circuito magnético equivalente del presente sistema):

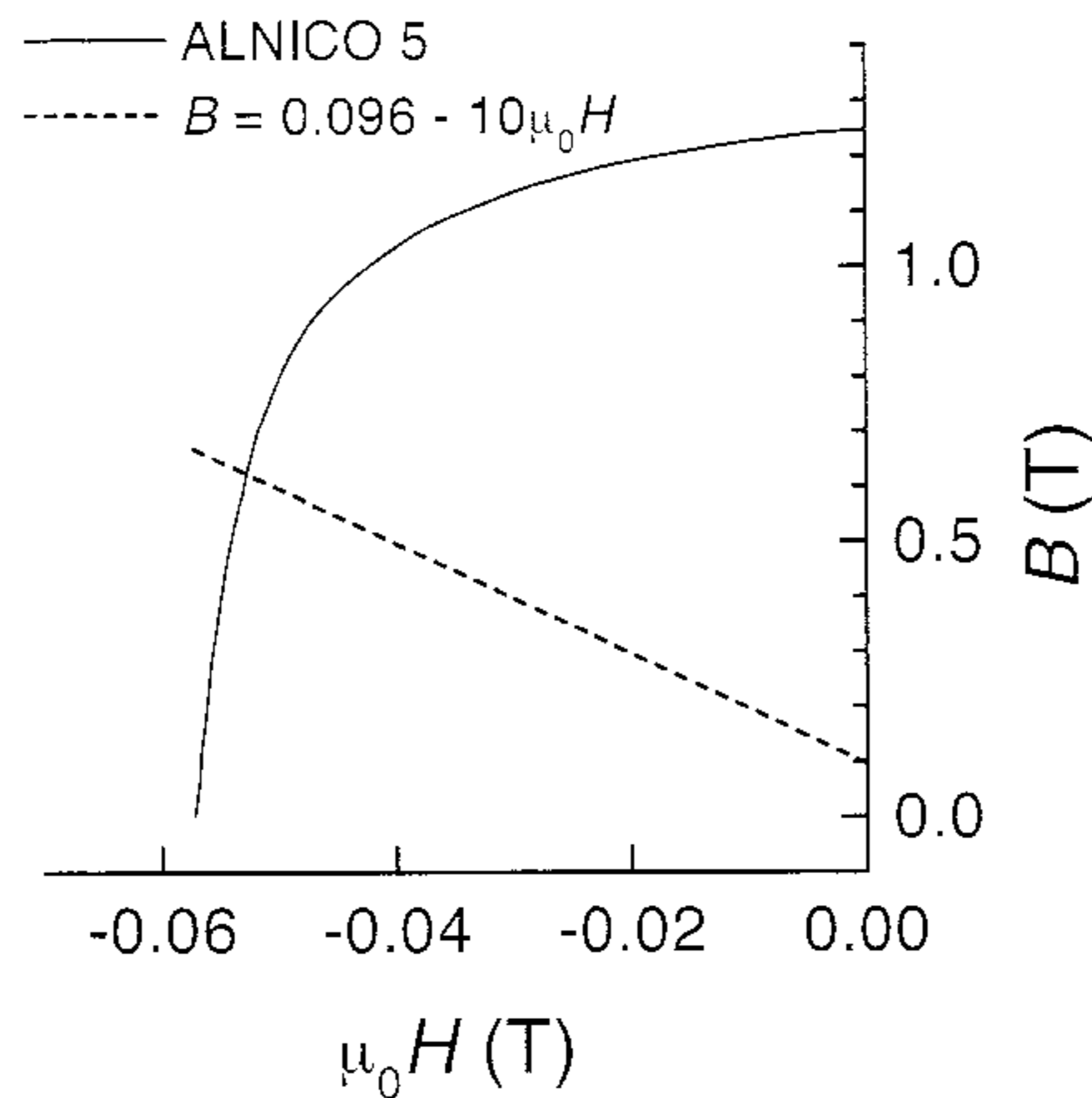
$$NI = \frac{B}{\mu_0}d + \frac{B}{\mu_0\kappa_m}\ell + H \quad (1)$$

en que  $B$  representa la inducción magnética común en los tres elementos del sistema (recordemos que las secciones transversales son las mismas y que estamos suponiendo que no hay fugas, de modo que el flujo de campo magnético es uniforme). Por otra parte en (1),  $H$  representa el valor del campo magnético en el imán. Reemplazando los valores numéricos de los diversos parámetros del problema, encontramos la siguiente relación entre  $B$  y  $H$

$$B = 0,096 - 10\mu_0H \quad (2)$$

La ecuación (2) es una relación lineal entre  $B$  y  $\mu_0H$  en el interior del imán. Por otra parte, se conoce la curva de histéresis del ALNICO 5 (ver figura siguiente). Intersectando el gráfico característico del ALNICO 5, con la recta (2) finalmente encontramos

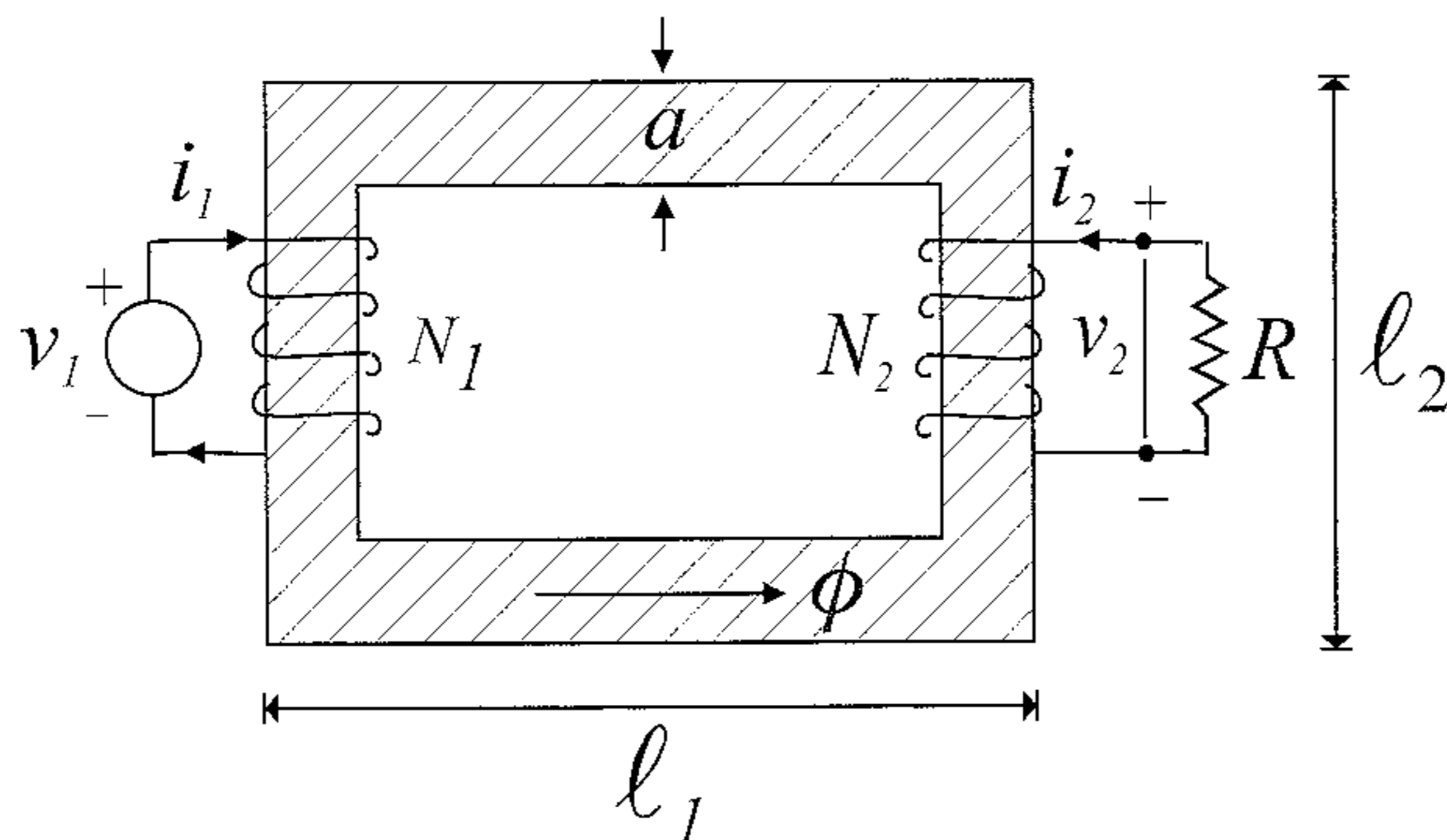
$$B \approx 0,64 \text{ T}$$



9. Considere el transformador ilustrado en la figura. La sección transversal es cuadrada y los parámetros del transformador son  $\ell = 10$  cm,  $d = 7$  cm,  $a = 3$  cm,  $N_1 = 3000$ ,  $N_2 = 100$  y  $\kappa_m = 3000$ .

a) Desprecie las fugas de flujo magnético, y determine las autoinductancias  $L_1$  y  $L_2$ . Determine  $i_1$  para el caso en que  $i_2 = 0$  y la densidad de flujo en el núcleo tiene una magnitud de  $0,3$  Weber/m<sup>2</sup>.

b) El secundario se conecta a una resistencia de un ohm y se aplica una tensión sinusoidal  $v_1 = V_m \sin 400t$  al primario del transformador. Suponga que la densidad de flujo magnético máximo en el núcleo del transformador es de  $0,3$  Weber/m<sup>2</sup>, determine  $V_m$ ,  $i_1$  e  $i_2$ .



**Solución:**

a) Con el objeto de calcular la inductancia del primario hacemos circular por él una corriente  $i_1$  y calculamos el flujo  $\phi$  de campo magnético que circula por el núcleo de hierro. Como cada una de las espiras del primario enlaza el mismo flujo  $\phi$ , el flujo total enlazado por el primario será  $N_1\phi$ . La inductancia del primario está dada por  $N_1\phi/i_1$ . Calculemos pues  $\phi$ . La reluctancia del núcleo de hierro está dada por

$$\mathcal{R} = \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\mu_0\kappa_m a^2} \quad (1)$$

Aplicando la ley de Ampère, utilizando un camino cerrado totalmente contenido en el núcleo de hierro obtenemos,

$$N_1 i_1 = \phi \mathcal{R} \quad (2)$$

de modo que el flujo  $\phi$ , en términos de  $i_1$ , está dado por

$$\phi = \frac{N_1}{\mathcal{R}} i_1 \quad (3)$$

Finalmente, usando (3),

$$L_1 = \frac{N_1 \phi}{i_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} = \frac{(N_1 a)^2}{2(\ell_1 + \ell_2)} \mu_0 \kappa_m \quad (4)$$

Analogamente, la inductancia del secundario es:

$$L_2 = \frac{(N_2 a)^2}{2(\ell_1 + \ell_2)} \mu_0 \kappa_m \quad (5)$$

Para los datos numéricos del problema, de (4) y (5) obtenemos  $L_1 = 10$  H y  $L_2 = 0,1$  H. Ahora, de (2), si no hay corriente en el secundario,

$$i_1 = \frac{\phi}{N_1} \mathcal{R} = \frac{B}{N_1} \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\mu_0 \kappa_m} \quad (6)$$

Aquí hemos usado que  $\phi = Ba^2$ . Para los datos numéricos del problema, obtenemos de (6),  $i_1 = 27$  mA.

b) De acuerdo con la ley de Faraday, con las convenciones de signo para  $\phi$  y  $v_1$  como en la figura, tenemos,

$$v_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (7)$$

Análogamente, en el extremo derecho del transformador

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = -RI_2 \quad (8)$$

Además, la fuerza magnetomotriz total en el transformador,  $N_1 i_1 - N_2 i_2$  (tomando en cuenta los sentidos de los enrollados) debe ser igual a la reluctancia del núcleo por el flujo que lo atraviesa, i.e.,

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\phi \quad (9)$$

en que

$$\mathcal{R} = \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\mu_0 \kappa_m A} \quad (10)$$

Como  $v_1 = V_m \text{sen } \omega t$ , de (7) tenemos,

$$\phi = \frac{V_m}{N_1 \omega} \cos \omega t \quad (11)$$

y de (8),

$$i_2 = \frac{N_2 V_m}{R N_1} \text{sen } \omega t \quad (12)$$

y, finalmente de (9)

$$i_1 = \frac{V_m \mathcal{R}}{N_1^2 \omega} \cos \omega t + \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{V_m}{R} \text{sen } \omega t. \quad (13)$$

Ahora,  $V_m$  es determinado por la condición de máximo  $B$  en el interior del núcleo. En efecto, de (11) obtenemos,

$$V_m = N_1 \omega B_{max} a^2 \quad (14)$$

Para los datos numéricos del problema

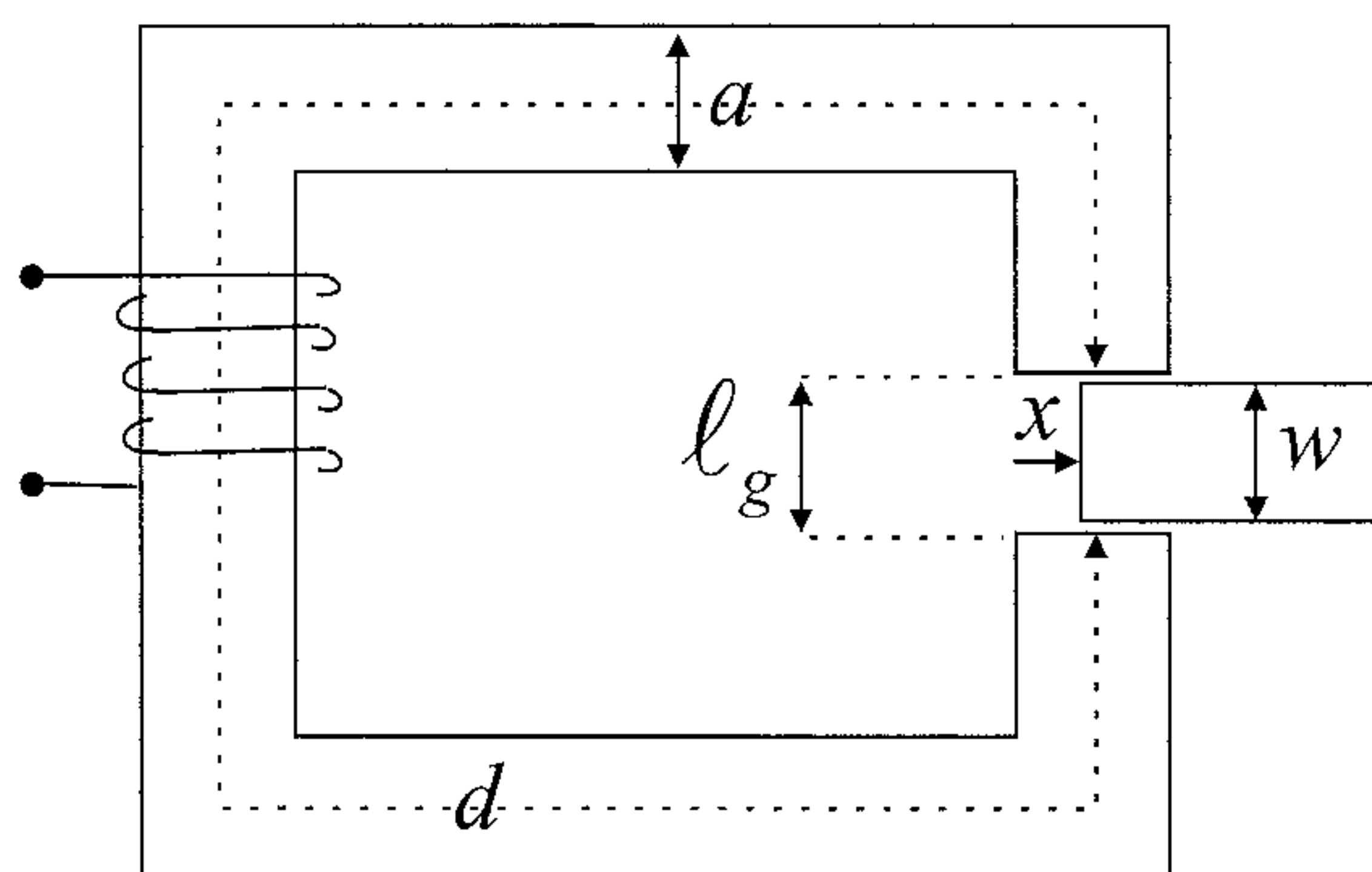
$$V_m = 108V$$

$$i_1 = 0,027 \cos \omega t + 1,08 \text{sen } \omega t$$

$$i_2 = 10,8 \text{sen } \omega t,$$

en que  $\omega = 400 \text{ rads/s}$ .

**10.** La figura ilustra un simple relé magnético. El brazo móvil del relé tiene una permeabilidad  $\mu_1$  y una sección rectangular  $w \times b$ , y está situado en el hueco de aire del electroimán. El núcleo del electroimán tiene permeabilidad  $\mu_2$  y una sección transversal  $a \times b$ . La longitud media del núcleo del electroimán es  $d$ . Calcule la fuerza  $\vec{F}$  que ejerce el electroimán sobre el brazo móvil del relé, suponiendo que por el enrollado de  $N$  vueltas circula una corriente  $i$ . Suponga que la longitud del hueco de aire es aproximadamente  $w$  (i.e.,  $\ell_g \approx w$ ).



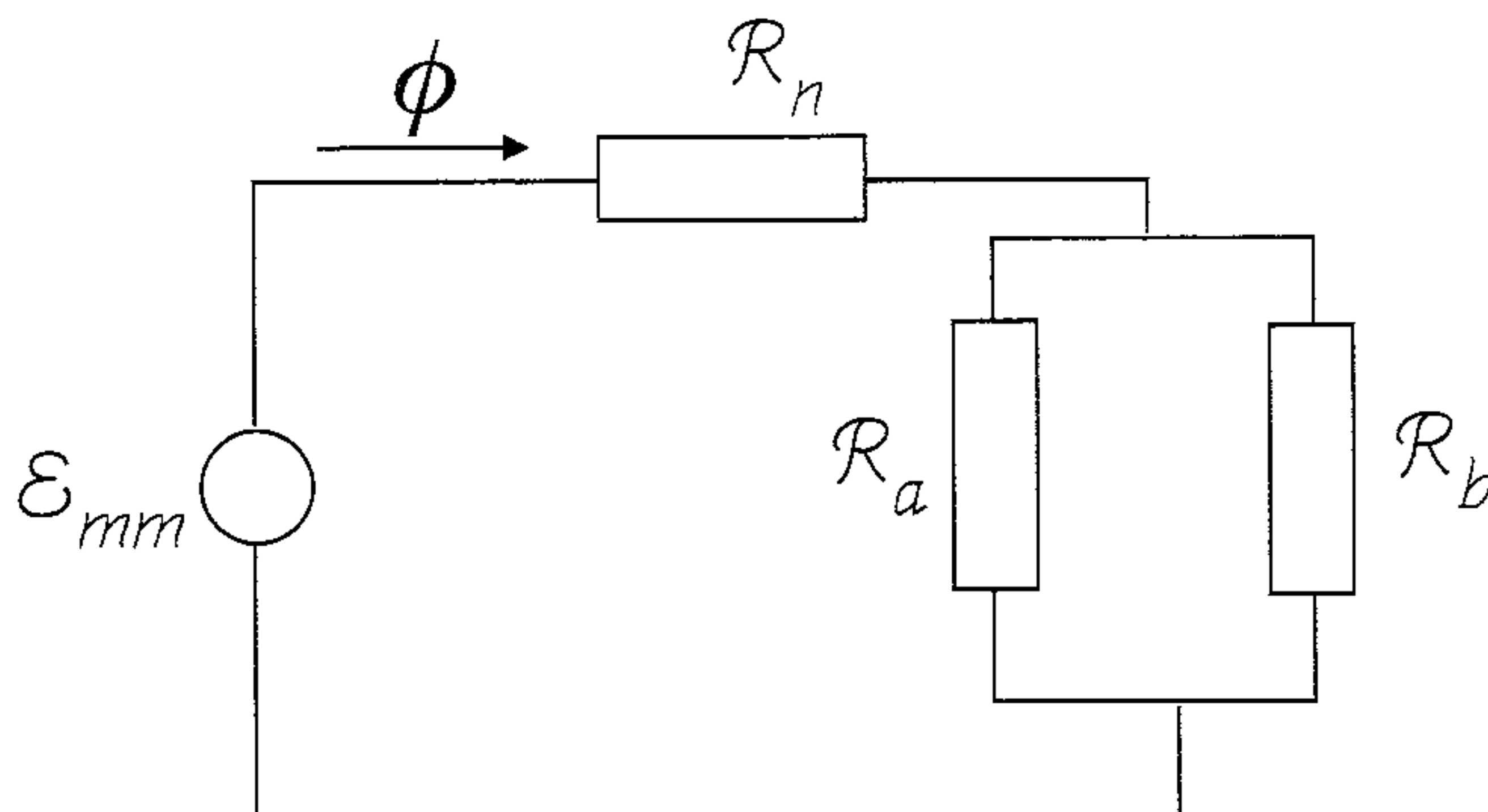
**Solución:**

Para encontrar la fuerza sobre el brazo móvil del relé utilizaremos el principio de los trabajos virtuales. Llamemos  $x$  a la posición del extremo del brazo medido como se indica en la figura. Para usar el principio de los trabajos virtuales debemos calcular la energía magnética almacenada en el sistema,  $W_m$ , como función de  $x$ . Entonces, la fuerza sobre el brazo móvil está dada por

$$\vec{F} = \frac{\partial W_m^I}{\partial x} \quad (1)$$

en que el rótulo  $I$  en la expresión anterior significa que debemos calcular la derivada manteniendo  $I$  constante.

Con el objeto de calcular la energía magnética almacenada, es conveniente representar al relé por el circuito magnético siguiente:



Las distintas reluctancias del circuito están dadas por

$$\mathcal{R}_n = \frac{d}{\mu_2 ab} \quad \mathcal{R}_a = \frac{w}{\mu_0 xb} \quad \mathcal{R}_b = \frac{d}{\mu_1 (a-x)b} \quad (2)$$

Utilizando las reglas usuales de composición de reluctancias (que son las mismas empleadas en circuitos eléctricos para componer resistencias) obtenemos de inmediato la reluctancia equivalente del circuito magnético, vista desde la fuente. Así,

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_n + \frac{\mathcal{R}_a \mathcal{R}_b}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b} \quad (3)$$

Reemplazando los valores de las distintas reluctancias dadas en (2), en la expresión (3) para  $\mathcal{R}_{eq}$ , obtenemos finalmente,

$$\mathcal{R}_{eq}(x) = \frac{d}{\mu_2 ab} + \frac{w}{b} \frac{1}{\mu_0 x + \mu_1 (a-x)} \quad (4)$$

En términos de la fuerza magnetomotriz y de la reluctancia equivalente, la energía magnética almacenada es

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathcal{R}_{eq}(x)} \quad (5)$$

Finalmente, a partir de (5) y de (1), vemos que la fuerza es atractiva:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathcal{R}_{eq}^2} \frac{w(\mu_1 - \mu_0)}{b(\mu_0 x + \mu_1 (a-x))^2} \hat{i}$$

11. Supongamos que la aguja del problema 9 del Capítulo 7 es una barra de hierro uniformemente imantada de 8 cm de longitud y un área transversal de 3 mm<sup>2</sup>. Consideremos que el momento dipolar magnético de cada átomo de hierro es de  $2,2 m_B$  ( $m_B$  representa un magnetón de Bohr y es equivalente a  $9,27 \times 10^{-24}$  A-m<sup>2</sup>) y que todos ellos tienen sus momentos dipolares alineados. Calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de la aguja en torno a su posición de equilibrio en presencia del campo magnético de la Tierra ( $\approx 0,5$  Gauss =  $0,5 \times 10^{-4}$  T).

**Solución:**

El momento de inercia de una varilla de largo  $\ell$  y de masa  $M$  que gira en torno a un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro está dado por  $J = \frac{1}{12}M\ell^2$ . La densidad de masa del hierro es  $\rho = 7,9$  g/cm<sup>3</sup>. Entonces, la masa de la varilla es  $M = \rho A\ell$  en que  $A$  es su sección transversal.

Para los datos numéricos del problema tenemos  $M = 1,89$  g y  $J = 1,0 \times 10^{-6}$  Kg-m<sup>2</sup>.

A continuación calculemos el momento magnético de la barra. Como la densidad del hierro es de 7,9 g/cm<sup>3</sup> y su peso molecular es de 55,8 g/mol, el número de átomos de hierro por unidad de volumen está dado por

$$n = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{55,8 \text{ g/mol}} \times 7,9 \text{ g/cm}^3 = 8,5 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3 \quad (1)$$

En la ecuación (1) hemos usado el número de Avogadro  $N_0 \approx 6,02 \times 10^{23}$  átomos/mol, que representa el número de átomos por mol de una sustancia.

Como todos los átomos tienen sus momentos dipolares alineados, el momento magnético total de la barra es igual al número de átomos en la barra por el momento magnético de cada átomo, i.e.,

$$m = (nV) \times (2,2m_B) \quad (2)$$

en que  $V$  es el volumen de la barra.

Para los datos numéricos del problema

$$m = 0,416 \text{ A-m}^2 \quad (3)$$

Utilizando el resultado del problema 9 del capítulo 7, la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de la barra imantada, en presencia del campo

magnético  $B$  de la Tierra, está dada por

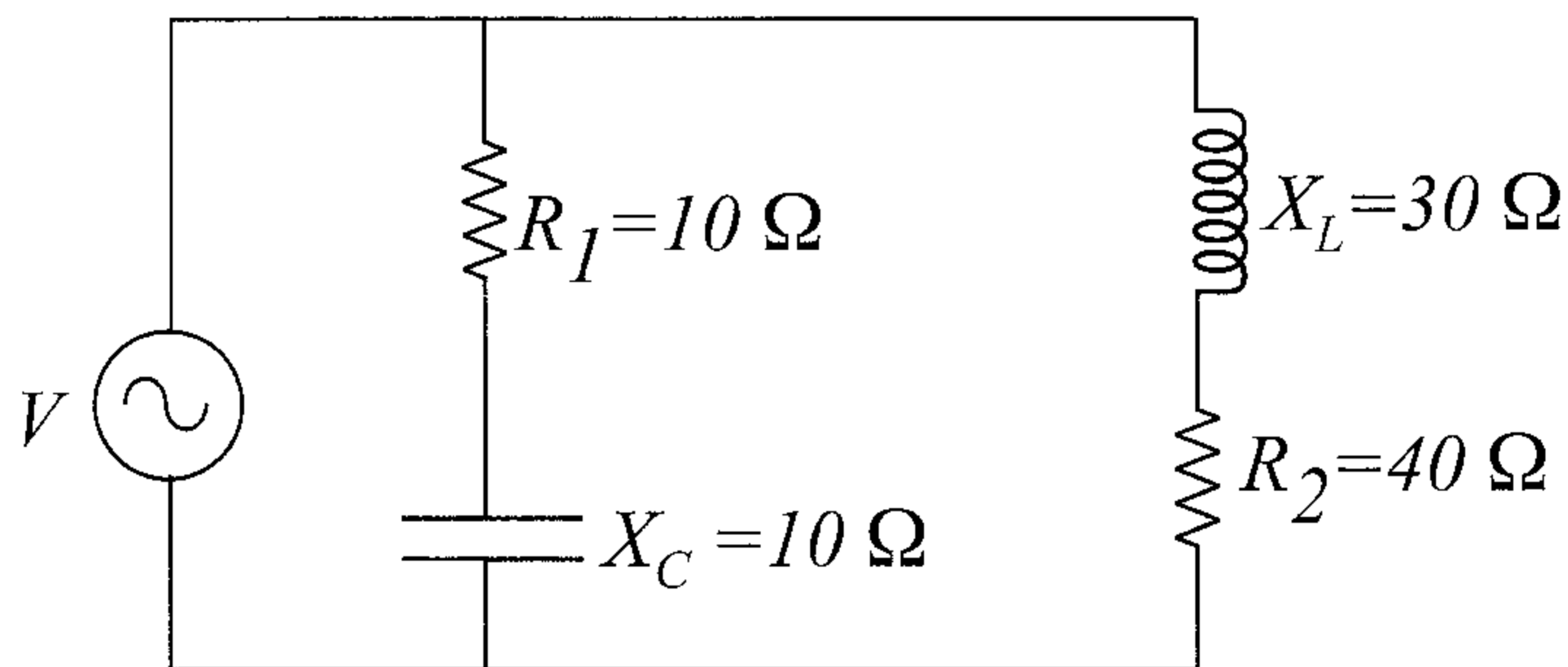
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mB}{J}} = 0,72 \text{ Hz},$$

para los datos numéricos del problema.



# 10. Corriente Alterna

1. Consideremos el circuito en paralelo indicado en la figura.



- ¿Cuál es la impedancia de cada rama?
- En cada rama, ¿Cuál es la amplitud de la corriente y su fase relativa a la tensión aplicada ?

**Solución:**

a) En la rama del condensador, la impedancia es:

$$Z_1 = R_1 - jX_c = 10(1 - j) = 10\sqrt{2} \exp(\phi_1 j) \quad (1)$$

en que la fase  $\phi_1 = -45^\circ$ . En tanto que en la rama de la inductancia, la impedancia es:

$$Z_2 = R_2 + jX_L = 10(4 + 3j) = 50 \exp(\phi_2 j) \quad (2)$$

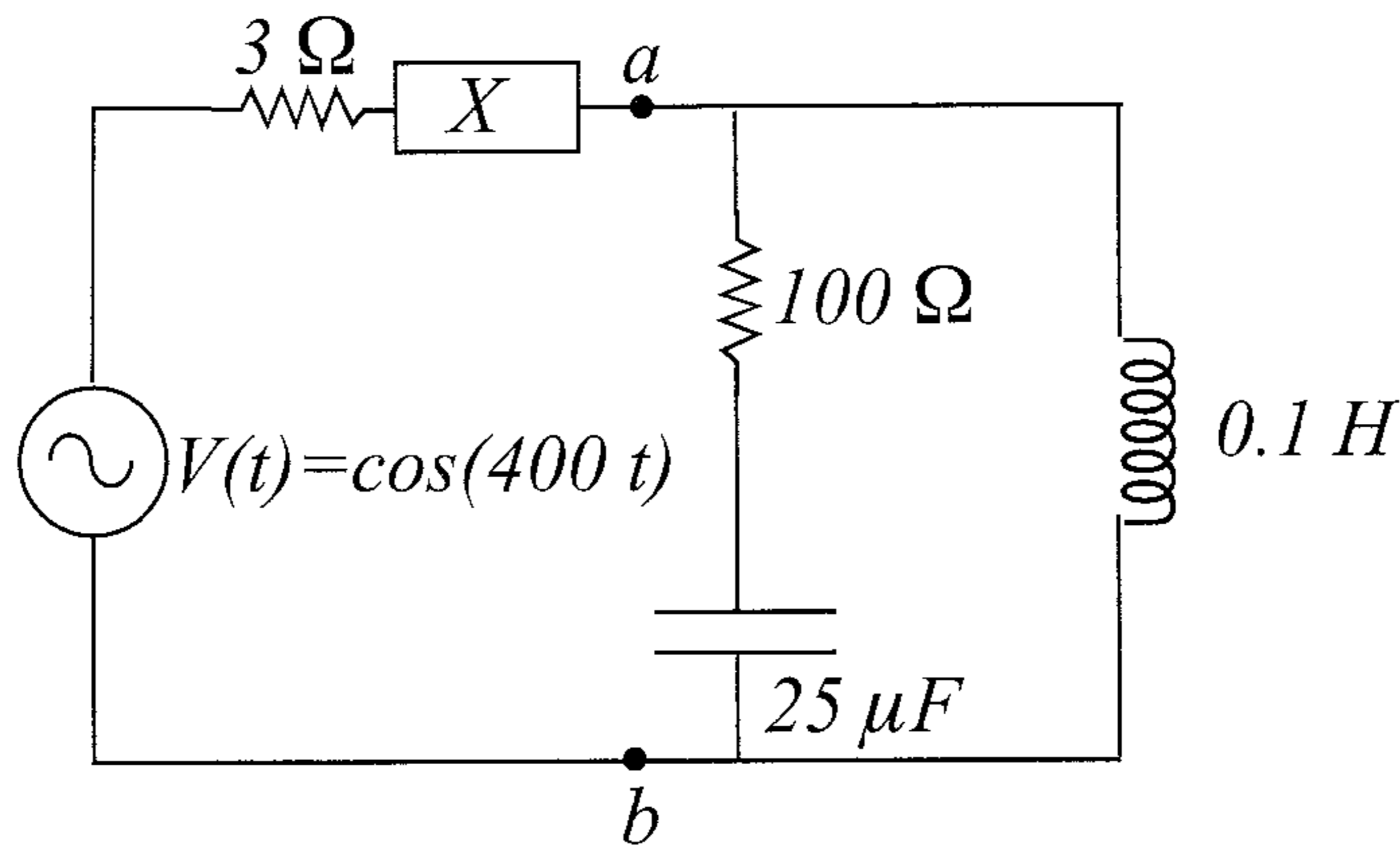
y la fase  $\phi_2 = 36,9^\circ$ .

b) La amplitud de la corriente por la rama del condensador es  $V/|Z_1| = V/(10\sqrt{2}) = 0,0707 \times V$  [A]. En tanto que la amplitud de la corriente

por la rama de la inductancia es  $V/|Z_2| = V/(50) = 0,02 \times V$  [A]. Las fases relativas, por otra parte, son  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respectivamente.

2. En el circuito de la figura:

- Encuentre la impedancia equivalente a la derecha de los puntos  $a$  y  $b$ .
- Determine el valor de  $X$  de modo que la fuente esté en fase con la corriente.
- ¿Cómo tiene que ser la reactancia  $X$ : inductiva o capacitiva? Determine el valor de  $L$  o de  $C$  según corresponda.
- Encuentre  $I$  para la condición b).



**Solución:**

a) La impedancia,  $Z_1$ , de la rama  $R$ - $C$  está dada por

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

Aquí  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 25 \mu\text{F}$  y  $\omega = 400$  rads/seg. Entonces,

$$Z_1 = 100 - 100j$$

La impedancia,  $Z_2$ , de la rama de la inductancia está dada por

$$Z_2 = j\omega L$$

En este caso  $\omega = 400$  rads/seg y  $L = 0,1$  H, de modo que,  $Z_2 = 40j$ . La impedancia equivalente vista desde  $a$ - $b$ ,  $Z$ , está dada por

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

i.e.,

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{100(1 - j)40j}{100 - 60j} = \frac{200}{17}(1 + 4j)$$

b) Para que  $v(t)$  esté en fase con la corriente es necesario que la impedancia total, vista desde la fuente, sea real. Ahora, la impedancia vista desde la fuente es:

$$Z' = 3 + X + Z = 3 + X + \frac{200}{17} + \frac{800j}{17}.$$

Para que  $Z'$  sea real es suficiente que  $X = -800j/17$

c) El término

$$X = -\frac{800j}{17} = \frac{800}{17j} = \frac{1}{j\omega C'}$$

corresponde a una reactancia capacitiva. El valor de la capacidad  $C'$  es tal que

$$\omega C' = \frac{17}{800}$$

y, como  $\omega = 400$  rads/seg

$$C' = \frac{17}{800 \times 400} = 53,1 \mu\text{F}$$

d) Como  $X = -800j/17$ , la impedancia vista desde la fuente es solamente resistiva y está dada por

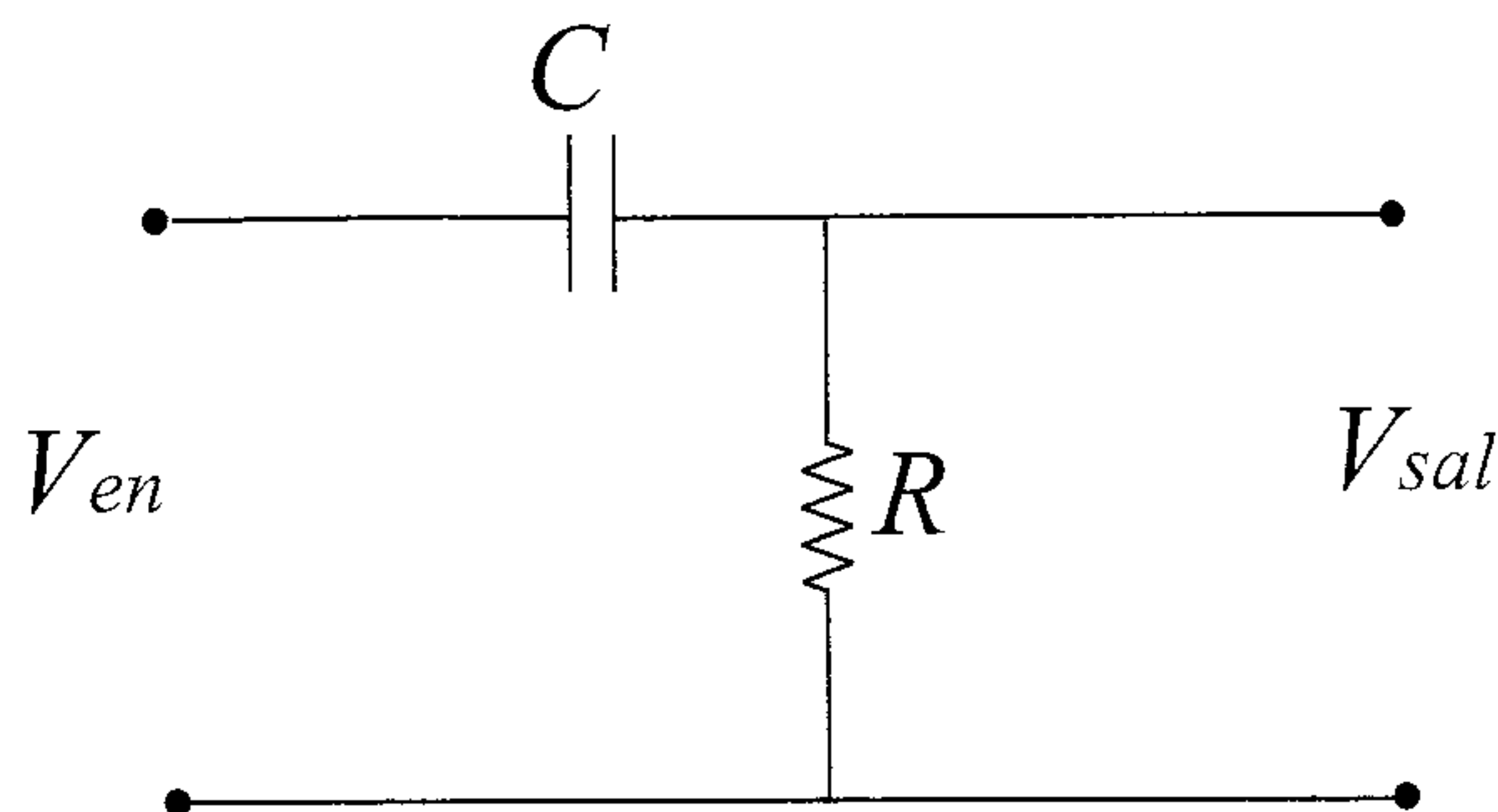
$$Z' = 3 + \frac{200}{17} = \frac{251}{17} \Omega$$

Entonces, la corriente  $i(t)$  está dada por

$$i(t) = v(t) \frac{17}{251} = \frac{1700}{251} \cos(400t) \approx 6,77 \cos(400t) \text{ volts}$$

**3.** El circuito indicado en la figura se denomina filtro pasa-alta, porque las frecuencias de entrada elevadas se transmiten con una amplitud mayor que las frecuencias bajas.

a) Si la tensión de entrada es  $V_{\text{en}} = V_0 \cos \omega t$ , encuentre la tensión de salida.



- b) ¿A qué frecuencia angular, la amplitud de la tensión de salida es la mitad de la amplitud de la tensión de entrada?
- c) Dibuje un gráfico de la razón entre las amplitudes de salida y entrada como función de  $\omega$ .

### Solución:

a) Llamemos  $I$  a la corriente (compleja) que circula por el condensador y la resistencia. Entonces, la ecuación de malla del circuito es:

$$V_0 = \left( \frac{1}{j\omega C} + R \right) I \quad (1)$$

de donde obtenemos,

$$I = \frac{j\omega C}{1 + Rj\omega C} V_0 \quad (2)$$

Ahora, el voltaje (complejo) de salida está dado por

$$V_{\text{sal}} = RI = \frac{j\omega C R}{1 + Rj\omega C} V_0 \quad (3)$$

Aquí hemos usado el valor de  $I$  dado por (2) para obtener la última igualdad. Escribiendo en forma polar el lado derecho de (3) obtenemos,

$$V_{\text{sal}} = \frac{\omega C R}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} V_0 \exp(j\theta) \quad (4)$$

en que la fase  $\theta$  es tal que

$$\tan \theta = \frac{1}{R\omega C} \quad (5)$$

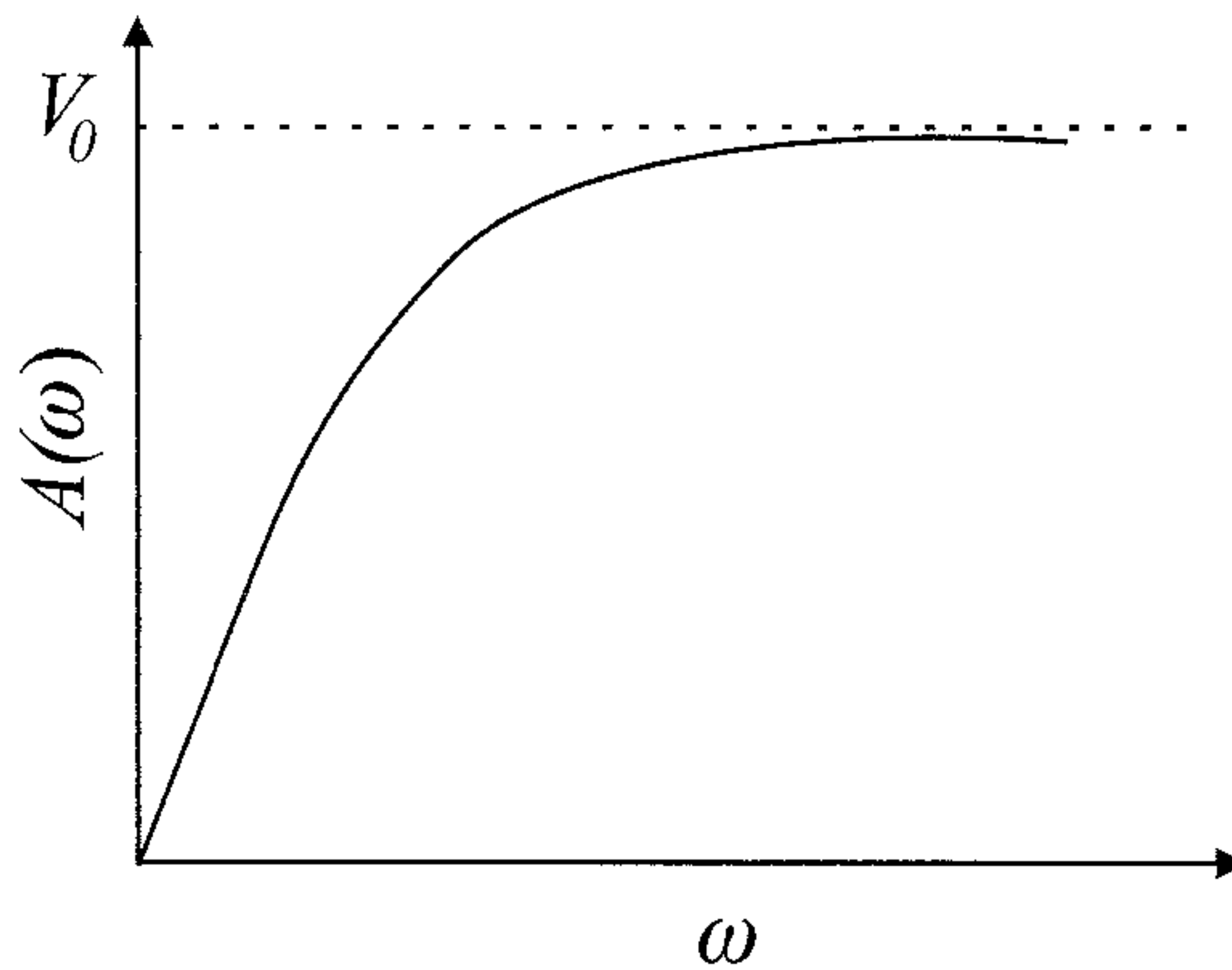
Finalmente, el voltaje de salida  $v_{\text{sal}} = \Re(V_{\text{sal}} \exp(j\omega t))$ . Entonces, de (4) finalmente obtenemos,

$$v_{\text{sal}} = A(\omega) \cos(\omega t + \theta) \quad (6)$$

en que la amplitud de la tensión de salida está dada en términos de la frecuencia por

$$A(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V_0 \quad (7)$$

y la fase  $\theta$  está dada en función de la frecuencia por (5).



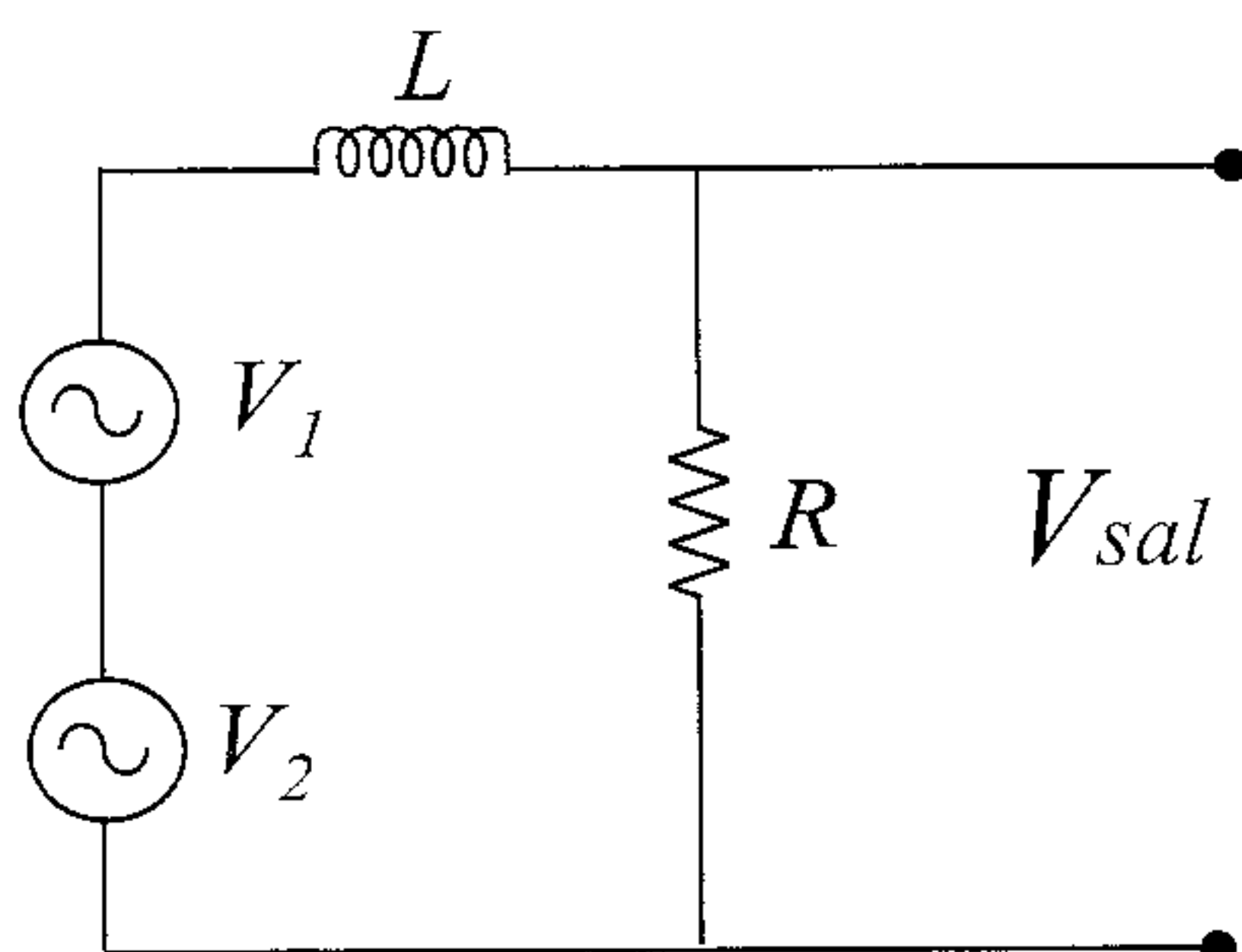
b) De (7) vemos de inmediato que si

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{RC}$$

la amplitud del voltaje de salida es justo la mitad de la amplitud del voltaje de entrada.

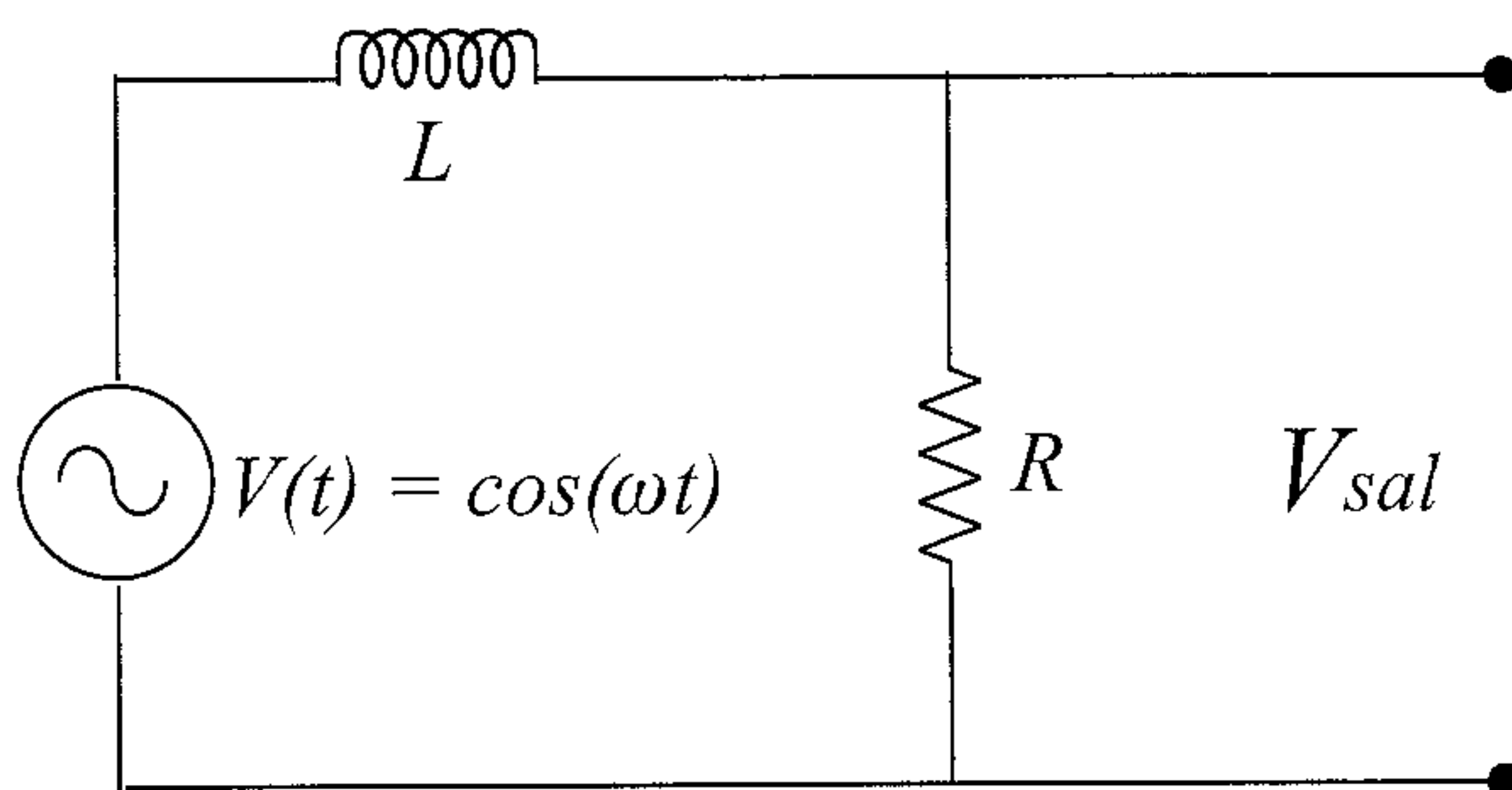
c) La razón entre los voltajes de salida y de entrada está dada precisamente por la función  $A(\omega)$  cuyo gráfico mostramos más arriba.

4. Una línea de transmisión simple transporta dos señales de tensión dadas por  $v_1(t) = V_1 \cos(\omega_1 t)$  y  $v_2(t) = V_2 \cos(\omega_2 t)$ . Se incluyen en la línea una bobina en serie,  $L$ , y una resistencia en paralelo,  $R$ , como se indica en la figura. ¿Cuál es la señal de tensión observada en el terminal de salida de la línea de transmisión?



### Solución:

Como la tensión de salida es lineal en las fuentes, basta calcular la salida correspondiente a cada una de las fuentes de entrada y sumar las respuestas (en otras palabras, utilizar el principio de superposición). Entonces, basta resolver el circuito  $R$ - $L$  de la figura siguiente:



El voltaje de salida para este circuito está dado por  $V_{sal} = Ri(t)$ . Sólo nos resta calcular la corriente  $i(t)$  que circula por la malla. La impedancia del circuito  $R$ - $L$  vista desde la fuente es:

$$Z = R + j\omega L = |Z|e^{j\theta}$$

en que  $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  y  $\theta = \arctan(\omega L/R)$ . En términos de  $|Z|$  y

de  $\theta$ , la corriente  $i(t)$  está dada por

$$i(t) = \frac{V}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)$$

Así,

$$V_{\text{sal}} = \frac{RV}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)$$

Ahora, si la fuente consiste en la superposición de  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ , el voltaje de salida estará dado por

$$V_{\text{sal}} = R \left[ \frac{V_1}{|Z_1|} \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \frac{V_2}{|Z_2|} \cos(\omega_2 t - \theta_2) \right]$$

en que  $|Z_1| = \sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}$ ,  $|Z_2| = \sqrt{R^2 + (\omega_2 L)^2}$ ,  $\theta_1 = \arctan(\omega_1 L/R)$  y  $\theta_2 = \arctan(\omega_2 L/R)$ .

**5.** Un físico experimental desea diseñar un circuito  $RLC$  (en serie) con un valor  $Q$  (factor de mérito, o factor de calidad) de 10 y una frecuencia de resonancia de 33 kHz. Posee una bobina de 45 mH y de resistencia despreciable. ¿Qué valores deberá utilizar para la resistencia  $R$  y la capacidad  $C$ ?

**Solución:**

El factor de calidad de un circuito  $RLC$  en serie está dado por

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (1)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

es la frecuencia de resonancia del circuito. Como el valor de la inductancia  $L$  es conocido, a partir de (1) y (2) obtenemos,

$$R = \frac{\omega_0 L}{Q} \quad (3)$$

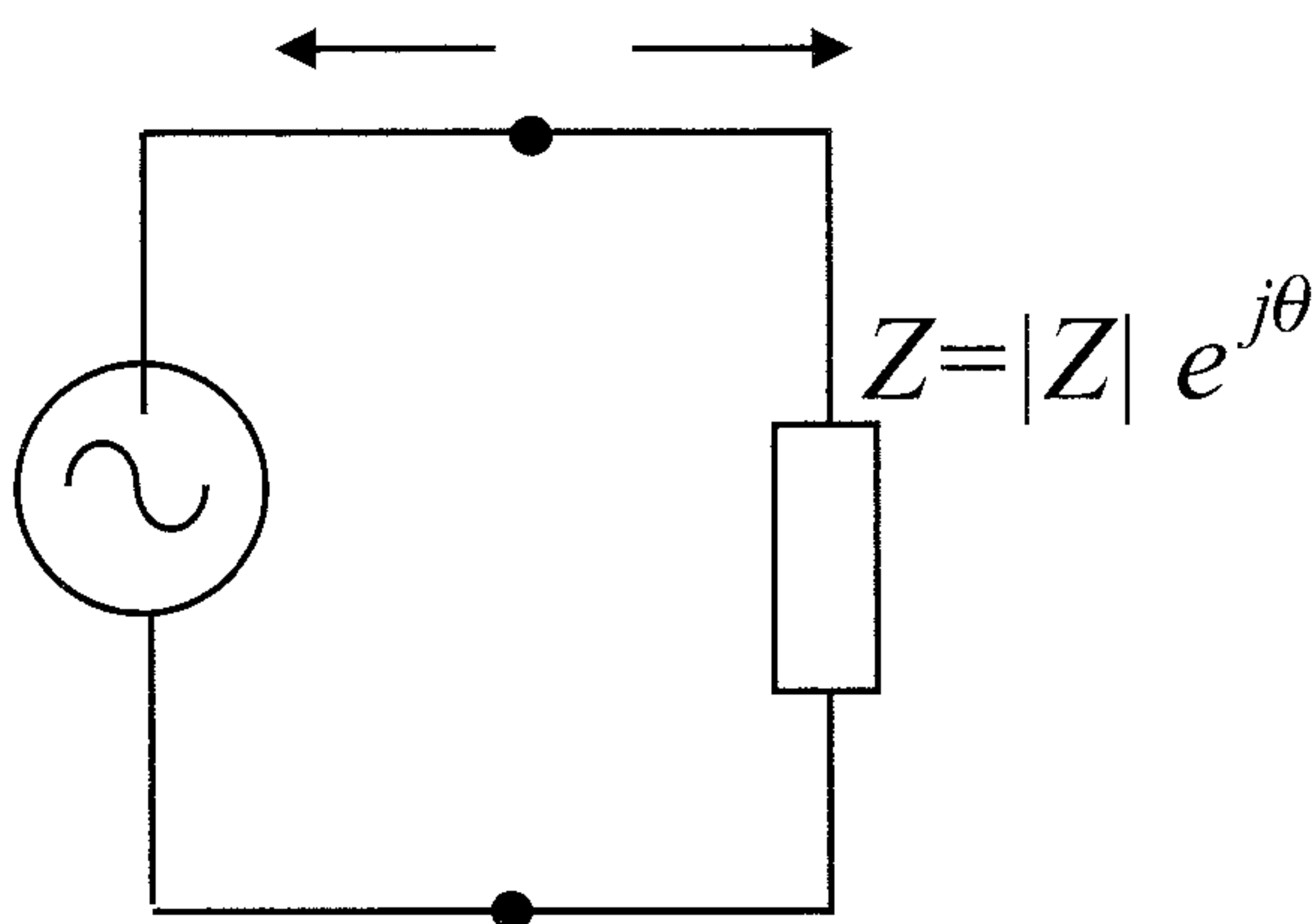
y

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \quad (4)$$

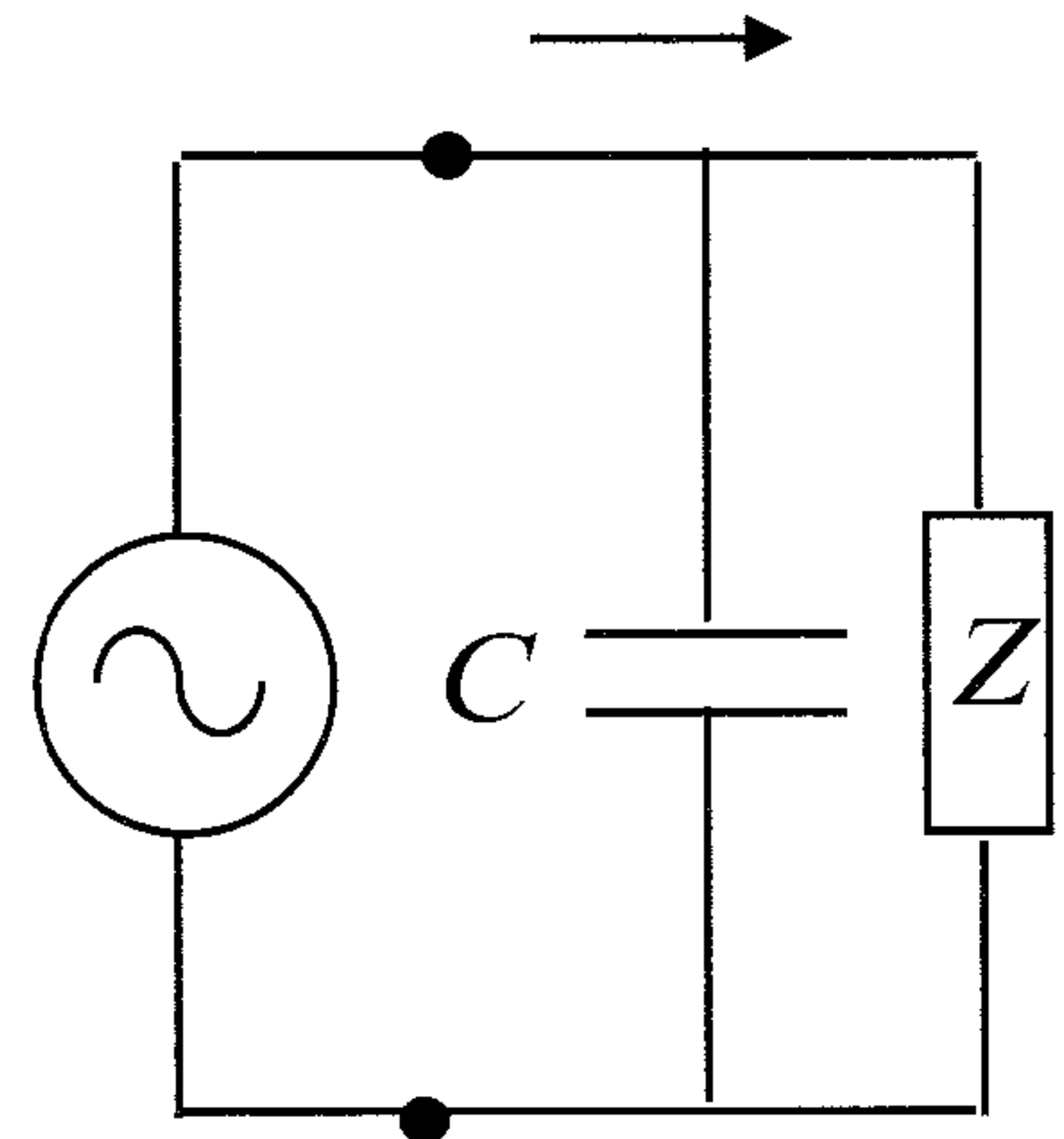
respectivamente. Para los valores numéricos del problema ( $\omega_0 = 2\pi \times 33 \times 10^3$  rads/seg,  $Q = 10$  y  $L = 45 \times 10^{-3}$  H), obtenemos  $R = 933 \Omega$  y  $C = 0,52$  nF (nanoFarad).

6. Chilectra S.A. cobra un recargo a los grandes usuarios de energía eléctrica (industrias, edificios, y en general a usuarios afectos a la tarifa BT-3) que presentan un factor de potencia ( $f = \cos \theta$ , en que  $\theta$  es el ángulo de la impedancia) menor que 0,85. Suponga que la carga de un usuario está dada por  $Z = |Z|e^{j\theta}$  con  $f = 0,72$  y  $|Z| = 0,48 \Omega$ . Con el objeto de corregir su factor de potencia el usuario debe conectar un condensador  $C$  en paralelo con la carga. ¿Cuál es el tamaño mínimo de dicho condensador que se debe instalar para que el usuario en cuestión no quede afecto al recargo de Chilectra S.A.?

*a Chilectra*      *al usuario*



*al usuario*



### Solución:

Al conectar el condensador  $C$  en paralelo con la carga  $Z$ , el usuario presenta una nueva impedancia,  $Z'$ , que está dada por

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_c}, \quad (1)$$

en que  $Z_c = 1/(j\omega C)$  es la impedancia del condensador. De la ecuación



(1), utilizando  $Z = |Z|e^{j\theta}$  y la expresión para  $Z_c$  obtenemos,

$$Z' = \frac{ZZ_c}{Z + Z_c} = \frac{|Z|e^{j\theta}}{j\omega C|Z|e^{j\theta} + 1}. \quad (2)$$

Multiplicando numerador y denominador de (2) por el complejo conjugado del denominador (i.e., por  $1 - j\omega C|Z|e^{-j\theta}$ ), obtenemos

$$Z' = \frac{|Z|}{D} (e^{j\theta} - j\omega C|Z|) = \frac{|Z|}{D} (\cos \theta + j(\sin \theta - \omega C|Z|)). \quad (3)$$

En (3),  $D = 1 + \omega^2 C^2 |Z|^2 - 2\omega C|Z| \sin \theta$  es un número real positivo. La nueva carga del usuario,  $Z'$ , se puede expresar en forma polar como  $Z' = |Z'| \exp j\varphi$ . Aquí sólo nos interesa encontrar el ángulo  $\varphi$  (mejor dicho, el nuevo factor de potencia  $\cos \varphi$ ). De (3) tenemos que

$$\tan \varphi = \frac{\sin \theta - \omega C|Z|}{\cos \theta} \quad (4)$$

y, como  $\cos \varphi = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$ , de (4) finalmente obtenemos,

$$\cos \varphi = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + (\omega C|Z|)^2 - 2\omega C \sin \theta |Z|}}. \quad (5)$$

Para no pagar recargo es necesario que  $\cos \varphi \geq 0,85$ . Así, de (5) tenemos

$$\left(\frac{\cos \theta}{0,85}\right)^2 \geq 1 + u^2 - 2u \sin \theta \quad (6)$$

donde hemos llamado  $u \equiv \omega C|Z|$ . Llamando  $m \equiv \cos \theta/0,85$ , podemos escribir (6) como una desigualdad para  $u$  de la forma:

$$u^2 - 2u \sin \theta + (1 - m^2) \leq 0 \quad (7)$$

Las raíces de la ecuación  $u^2 - 2u \sin \theta + (1 - m^2) = 0$  son:

$$u_+ = \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta - 1 + m^2} \quad (8a)$$

y,

$$u_- = \sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta - 1 + m^2} \quad (8b)$$

ambas positivas (pues  $m \leq 1$ ). Entonces, para que (7) sea válido es necesario que  $u_- \leq u \leq u_+$ . En particular,  $C$  debe ser tal que  $u = \omega C|Z| \geq u_-$ , i.e.,

$$C_{\min} = \frac{u_-}{\omega|Z|} \quad (9)$$

Nótese de (8b) y de la definición de  $m = \cos \theta / 0,85$  que  $u_-$  se puede escribir como

$$u_- = \text{sen } \theta - \cos \theta \sqrt{(1/0,85)^2 - 1} \approx \text{sen } \theta - 0,62 \cos \theta \quad (10)$$

Así, de (9) y (10) finalmente obtenemos,

$$C_{\min} = \frac{\text{sen } \theta - 0,62 \cos \theta}{\omega|Z|} \quad (11)$$

Para los datos numéricos del problema (i.e.,  $\cos \theta = 0,722$ ,  $|Z| = 0,48 \Omega$  y suponiendo una frecuencia de 50 Hz (Chile) (i.e.,  $\omega = 100\pi$  rads/seg) de (11) obtenemos,

$$C_{\min} = 0,49\text{mF}$$

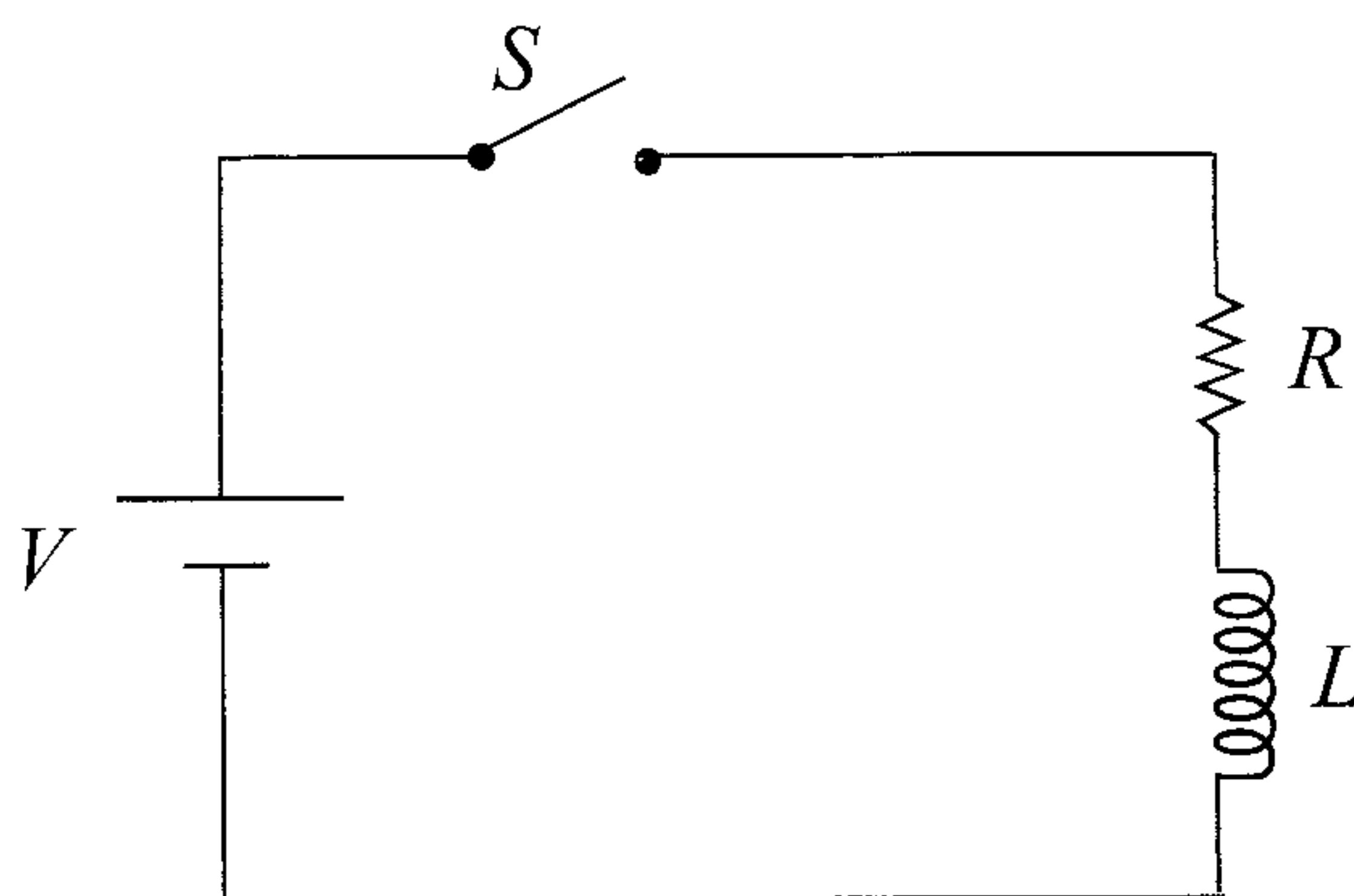
**7.** Una bobina con una resistencia de  $0,01 \Omega$  y autoinducción de  $0,5$  mH se conecta a una gran batería de  $12$  V de resistencia interna despreciable. ¿Al cabo de cuánto tiempo después de haber cerrado el circuito habrá alcanzado la corriente el noventa por ciento de su valor final? En aquel instante, ¿cuánta energía, en joules, está almacenada en el campo magnético de la bobina? ¿Qué cantidad de energía se habrá tomado de la batería hasta este instante?

**Solución:**

El circuito equivalente de la bobina conectada a la batería está dado por la figura.

Si llamamos  $i(t)$  a la corriente que circula por la bobina una vez que se ha cerrado el interruptor  $S$ , la ecuación de malla para el circuito es:

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (1)$$



La solución general de la ecuación (1) está dada por

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + \frac{V}{R} \quad (2)$$

en que la constante de integración  $A$  debe ser determinada a partir de la condición inicial. En este caso,  $i(0) = 0$ , de modo que de la ecuación (2) se obtiene

$$A = -\frac{V}{R}.$$

Así, la corriente que circula por la bobina para  $t \geq 0$  está dada por

$$i(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad (3)$$

El valor final de la corriente (i.e.,  $i_f = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$ ) es  $i_f = V/R$ .

El tiempo  $T$  para el cual la corriente ha alcanzado el noventa por ciento de su valor final es tal que

$$1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = 0,9 \quad (4)$$

es decir,

$$T = \frac{L}{R} \ln 10 \approx 0,115 \text{seg} \quad (5)$$

para los datos numéricos del problema.

La energía almacenada en ese instante en el campo magnético de la bobina es:

$$W_m = \frac{1}{2}Li(T)^2 = \frac{1}{2}L \left(0,9\frac{V}{R}\right)^2 = 0,405L\frac{V^2}{R^2} \quad (6)$$

Para los datos numéricos del problema

$$W_m \approx 291,6 \text{ joules} \quad (7)$$

La potencia instantánea entregada por la batería está dada por

$$P(t) = Vi(t) = \frac{V^2}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right),$$

de modo que la energía entregada por la batería hasta el instante  $T$  es:

$$\begin{aligned} W_{\text{bat}} &= \int_0^T P(t) dt = \frac{V^2}{R} \left( T - \frac{L}{R} + \frac{L}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right) \\ &= \frac{V^2}{R} \left( T - 0,9 \frac{L}{R} \right) \\ &= \frac{V^2}{R} (\ln 10 - 0,9). \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado  $i(T)/i_f = 0,9$  y la ecuación (5) para obtener la última igualdad. Para los datos numéricos del problema  $W_{\text{bat}} \approx 1009,9$  joules. Nótese que de (6) y (8) se tiene

$$\frac{W_m}{W_{\text{bat}}} = \frac{0,405}{\ln 10 - 0,9} \approx 0,29,$$

de modo que el 29 por ciento de la energía entregada por la batería hasta el instante  $T$  se ha almacenado en el campo magnético de la inductancia. El resto se ha disipado en la resistencia.

**8.** Un circuito  $RLC$  (en serie) se conecta a una fuente de 500 Hz. El ángulo de fase entre la tensión aplicada y la corriente se determina que vale  $\delta = 75^\circ$  mediante medida hecha con un osciloscopio. Si se sabe que la resistencia total es de  $35 \Omega$  y la inductancia vale  $0,15 \text{ H}$ , ¿Cuál es la capacidad del circuito?

**Solución:**

La impedancia del circuito vista desde la fuente está dada por

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

la cual en forma polar se escribe como  $Z = |Z| \exp(j\theta)$  en que,

$$\tan \delta = \frac{1}{R} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (1)$$

En términos de  $|Z|$ ,  $\delta$ ,  $V_0$  y  $\omega$ , la corriente  $i(t)$  que circula por la malla está dada por

$$i(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta)$$

Así pues  $\delta = \arctan((\omega L - (1/\omega C))/R)$  es, precisamente, el ángulo de desfase entre la tensión aplicada y la corriente que circula por la malla. Como  $\delta$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $R$  y  $L$  son conocidos, la capacidad del circuito la determinamos despejando  $C$  de la ecuación (1), i.e.,

$$C = \frac{1}{\omega(\omega L - R \tan \delta)} \quad (2)$$

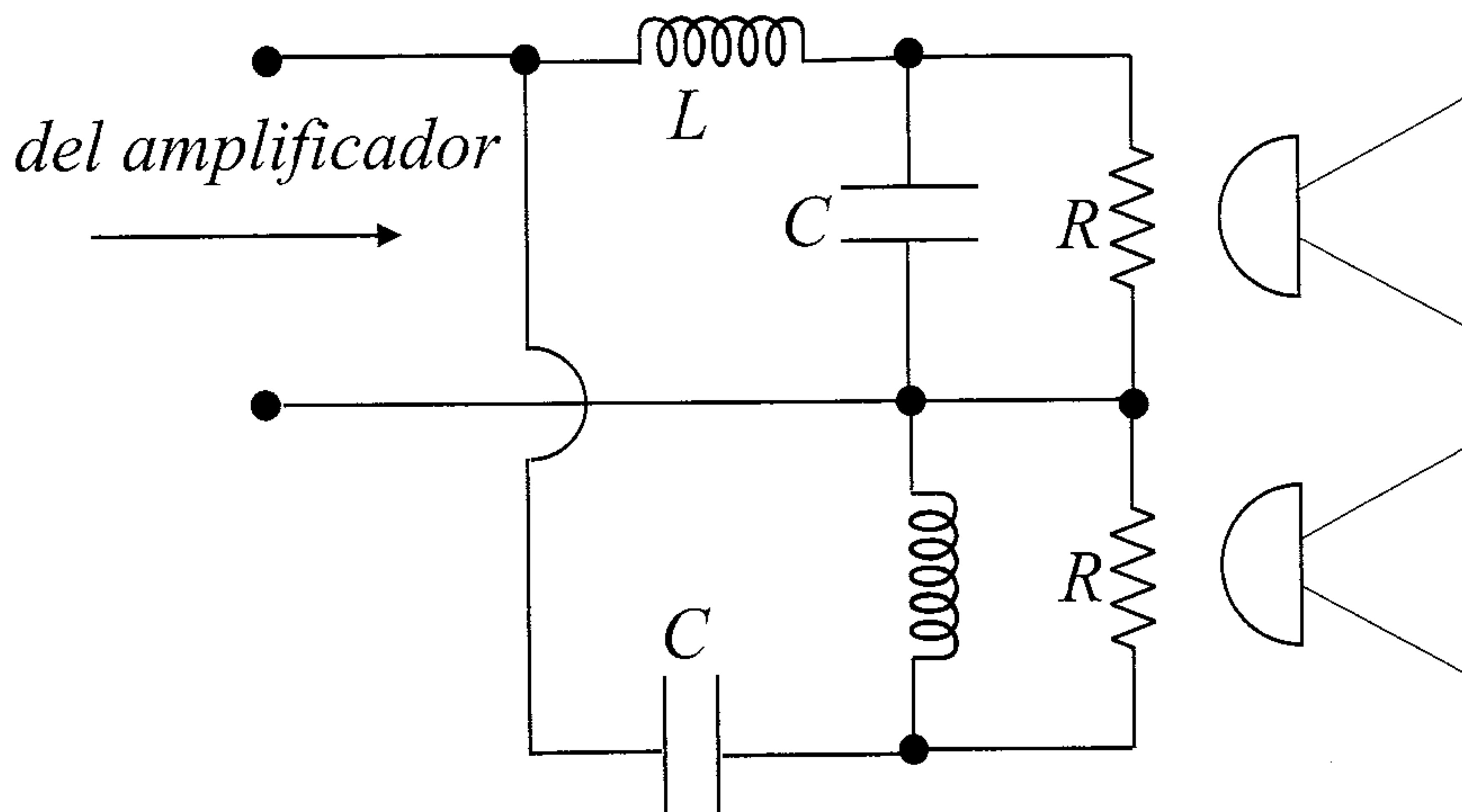
Para los valores numéricos del problema, i.e.,  $\omega = 2\pi \times 500 = 1000\pi$  rads/seg,  $L = 0,15$  H,  $R = 35 \Omega$  y  $\tan \delta = \tan 75^\circ \approx 3,73$ , a partir de (2) tenemos finalmente,

$$C = 0,93\mu\text{F}$$

**9.** Un circuito de un aparato de alta fidelidad se va a diseñar de modo que dos altavoces (cada uno de resistencia  $R$ ) se conecten por la etapa de salida de un amplificador. Un altavoz ha de recibir predominantemente frecuencias altas, el otro predominantemente frecuencias bajas. El circuito es como se indica en la figura. Los dos condensadores son iguales y de capacidad  $C$ , y ambas inductancias son iguales,  $L$ .

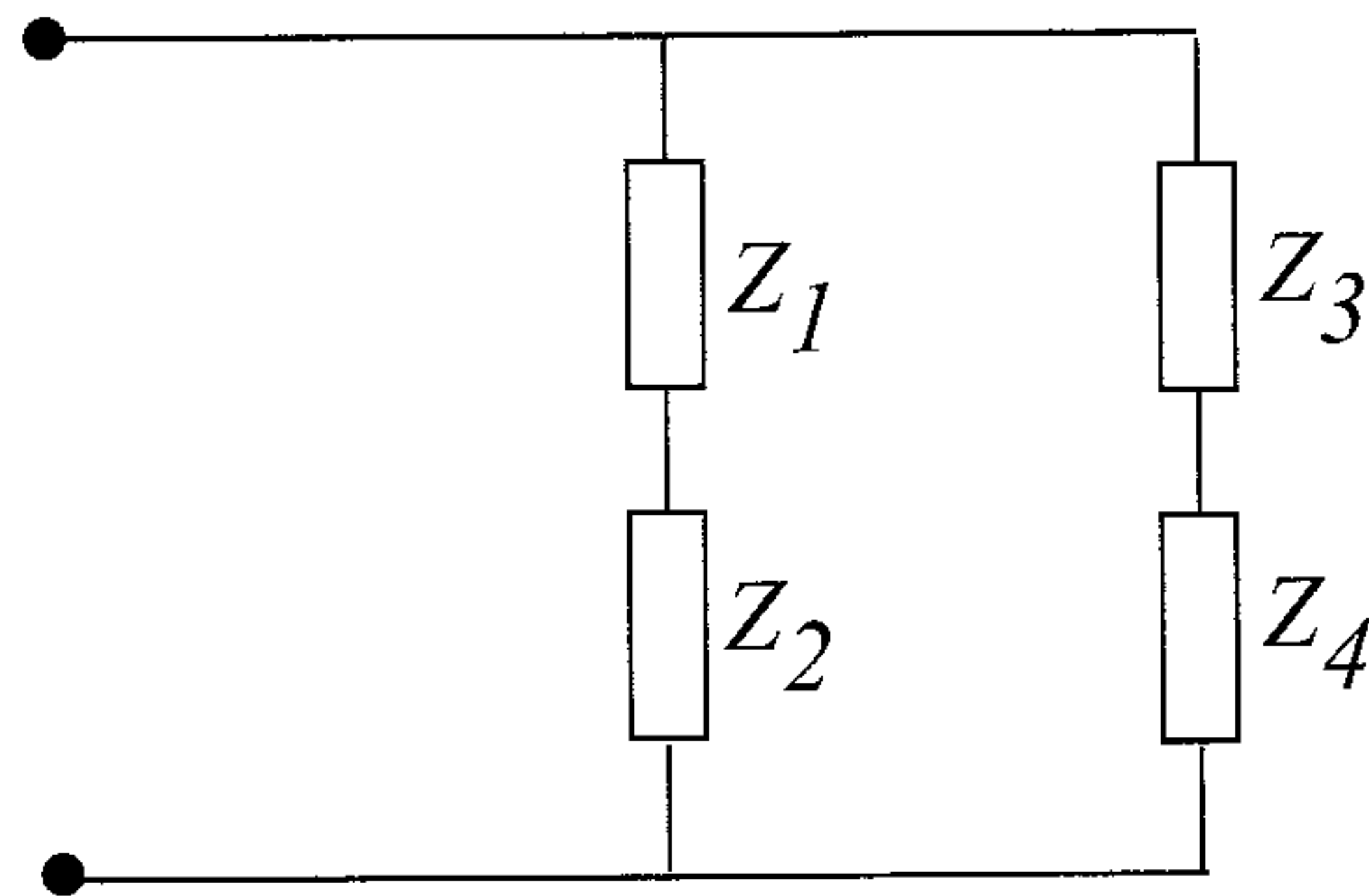
a) Encuentre la relación que deben satisfacer  $L$  y  $C$  para un valor de  $R$  dado, de modo que el circuito presente una carga puramente resistiva (e igual a  $R$ ) al amplificador a todas las frecuencias.

b) La frecuencia de transición  $\omega_c$  se define como la frecuencia a la que cada altavoz recibe la mitad de la potencia entregada por el amplificador. Para un  $R$  y una  $\omega_c$  dadas, determine  $L$  y  $C$ .



### Solución:

a) El circuito equivalente, visto desde el amplificador es



en que  $Z_1 = j\omega L$ ,  $Z_3 = 1/j\omega C$ .

Aquí  $Z_2$  es la impedancia equivalente entre  $C$  y  $R$  (que se encuentran en paralelo), en tanto que  $Z_4$  es la impedancia equivalente entre  $L$  y  $R$  (que también están en paralelo). Así,

$$Z_2 = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

y,

$$Z_4 = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$$

(en ambas expresiones,  $\omega$  es la frecuencia angular de la señal que envía el amplificador).

La impedancia equivalente, vista desde el amplificador está dada por

$$Z = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4},$$

(i.e., la impedancia equivalente correspondiente a las dos ramas paralelas compuestas por las impedancias en serie  $Z_1 + Z_2$  y  $Z_3 + Z_4$  respectivamente).

Con el objeto de simplificar los cálculos, es conveniente introducir  $a \equiv L/C$  y  $b \equiv R(\omega L - (1/\omega C))$ . En términos de  $a$  y  $b$ , podemos escribir  $Z \equiv N/D$ , en que el numerador  $N$  está dado por

$$N = (a + bj)^2 = (a^2 - b^2) + 2abj,$$

en tanto que el denominador queda dado por

$$D = (2Ra - \frac{b^2}{R}) + j\frac{b}{R}(2R^2 + a).$$

De las expresiones anteriores para  $N$  y  $D$  podemos concluir que la impedancia equivalente  $Z$  será real (i.e., solamente resistiva) si el producto de la parte real de  $N$  por la parte imaginaria de  $D$  es igual al producto de la parte real de  $D$  por la parte imaginaria de  $N$ , es decir, si

$$(a^2 - b^2)\frac{b}{R}(2R^2 + a) = 2ab(2Ra - \frac{b^2}{R})$$

Esta última expresión se puede escribir como

$$(a^2 + b^2)(2R^2 - a) = 0$$

de donde finalmente obtenemos,

$$\frac{L}{C} \equiv a = 2R^2$$

Si reemplazamos este valor de  $a$  en las expresiones para  $N$  y  $D$  es directo comprobar que efectivamente en este caso  $Z = R$  (dejamos el detalle de los cálculos al lector)

b) Nótese que

$$Z_1 + Z_2 = j\omega L + \frac{R}{j\omega RC + 1}$$

y,

$$Z_3 + Z_4 = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$$

Es inmediato comprobar de las dos ecuaciones anteriores que si la frecuencia angular  $\omega$  es tal que  $\omega L = 1/\omega C$ , entonces  $Z_1 + Z_2$  es el complejo conjugado de  $Z_3 + Z_4$ .

Así pues, si  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ,  $|Z_1 + Z_2| = |Z_3 + Z_4|$  y la potencia que recibe cada altavoz es la misma.

Ahora, resolviendo las dos ecuaciones

$$\frac{L}{C} = 2R^2,$$

y,

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{\omega_c}$$

para  $L$  y  $C$  respectivamente, en términos de  $R$  y  $\omega_c$  encontramos,

$$L = \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} R$$

y,

$$C = \frac{1}{\omega_c} \frac{1}{\sqrt{2}R}$$



# 11. Ecuaciones de Maxwell

1. Un condensador de placas planas paralelas, con placas en forma de discos circulares, tiene la región entre placas llena de un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ . El dieléctrico es además un medio conductor de conductividad  $g$ . La capacidad del condensador es  $C$ . El condensador se carga a una diferencia de potencial  $V_0$  y se aísla.

- Encuentre la carga del condensador en función del tiempo.
- Encuentre la corriente de desplazamiento en el dieléctrico.
- Encuentre el campo magnético en el dieléctrico.

## Solución:

a) La carga inicial del condensador es  $Q_0 = CV_0$ . Luego se descargará a través del medio entre las placas. La ecuación de conservación de la carga es,

$$\frac{dQ}{dT} + \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1)$$

En este caso la corriente está dada por

$$\vec{j} = g\vec{E} = g\frac{Q}{A\epsilon}\hat{z}$$

donde hemos elegido el eje  $z$  en la dirección del campo eléctrico, y hemos usado la expresión para el campo entre las placas de un condensador de caras paralelas. Reemplazando el valor de  $j$  en (1), encontramos que la carga evoluciona de acuerdo a,

$$\frac{dQ}{dT} + \frac{gQ}{\epsilon} = 0 \quad (2)$$

cuya solución es:

$$Q = Q_0 e^{-gt/\epsilon}$$

b) La corriente de desplazamiento está dada por

$$\vec{j}_d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{gQ(t)}{A\epsilon} \hat{z}$$

donde hemos hecho uso del valor del campo eléctrico y de (2).

c) El campo magnético se debe a la corriente de cargas libres  $\vec{j} = g\vec{E}$  y a la corriente de desplazamiento. En este problema resulta

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \vec{j}_d = 0$$

de modo que el campo magnético entre las placas del condensador es cero.

**2.** Un alambre cilíndrico recto de conductividad  $g$  y área de sección transversal  $A$ , conduce una corriente uniforme de intensidad  $I$ . Determine la dirección y la magnitud del vector de Poynting en la superficie del alambre. Integre la componente normal del vector de Poynting sobre la superficie del alambre para un segmento de longitud  $L$  y compare el resultado con el calor de Joule producido en este segmento.

### Solución:

Suponiendo que la corriente se distribuye en forma homogénea en el interior del alambre, la densidad de corriente en su interior está dada por  $\vec{J} = (I/A)\hat{k}$  en que  $\hat{k}$  es un vector unitario a lo largo del alambre. Por la ley de Ohm,

$$\vec{E} = \frac{J}{g} = \frac{I}{gA}\hat{k}$$

Utilizando la ley circuital de Ampère, podemos deducir de inmediato el campo magnético sobre la superficie del alambre,

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

en que  $r$  es el radio del alambre y  $\hat{\theta}$  es tangente a la superficie del alambre (y es uno de los vectores base en coordenadas cilíndricas tomando como eje a  $\hat{k}$ ). Finalmente, el vector de Poynting está dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{I}{gA} \hat{k} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\theta} = -\hat{\rho} \frac{I^2}{g 2\pi r A}$$

Observe que  $\vec{S}$  apunta hacia el interior del alambre (i.e., en la dirección  $-\hat{\rho}$ ). En cuanto al flujo de energía que atraviesa un segmento de largo  $L$  del alambre, éste está dado por

$$2\pi r L |\vec{S}| = \frac{L}{gA} I^2 = RI^2$$

en que  $R$  es la resistencia del segmento de largo  $L$  del alambre. Así, el flujo de energía hacia el interior del segmento del alambre coincide exactamente con las pérdidas Joule en su interior. Nótese que usamos en nuestra derivación que el vector de Poynting en la superficie del alambre es paralelo al elemento de superficie del alambre.

**3.** Demuestre que para una onda plana en el vacío,

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

Esta resistencia se llama *impedancia de espacio libre*.

**Solución:**

Una onda plana en el vacío es tal que los vectores campo eléctrico, inducción magnética y vector de ondas son mutuamente ortogonales y obedecen la relación

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (1)$$

en que  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda y está relacionada con la magnitud del vector de ondas,  $k$ , por  $k = \omega c$  en que  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  es la velocidad de la luz en el vacío. Además, el campo magnético  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ . Entonces, el cociente entre las magnitudes del campo eléctrico y del magnético está dado por,

$$\frac{E}{H} = \frac{\mu_0 E}{B} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8,85 \times 10^{-12}}} = 377 \Omega$$

**4.** La Tierra recibe aproximadamente  $1300 \text{ W/m}^2$  de energía radiante procedente del Sol. Suponiendo que la energía está en la forma de una onda plana monocromática polarizada y que incide en forma normal,

calcule la magnitud de los vectores de campo eléctrico y magnético en la luz solar.

**Solución:**

La magnitud promedio (promedio temporal) del vector de Poynting es igual a la tasa de radiación. Así,  $S_m = 1,3 \text{ kW/m}^2$ . Por otra parte  $S_m = E_{ef}B_{ef}/\mu_0$  en que  $E_{ef}$  es la magnitud efectiva (o raíz cuadrática media) del campo eléctrico y  $B_{ef}$  es el valor efectivo del campo magnético. Además, para una onda plana monocromática polarizada, la magnitud del campo magnético es igual a la magnitud del campo eléctrico dividida por la velocidad de la luz  $c$ . Entonces,  $B_{ef} = E_{ef}/c$ . Reemplazando este valor en la expresión de  $S_m$  tenemos

$$E_{ef} = \sqrt{c\mu_0 S_m} \quad (1)$$

y por lo tanto,

$$B_{ef} = \sqrt{\frac{\mu_0 S_m}{c}} \quad (2)$$

Para los datos numéricos del problema, y usando que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$  y  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  encontramos:

$$E_{ef} = 700 \text{ V/m} \quad H_{ef} = \frac{B_{ef}}{\mu_0} = 1,86 \text{ A/m} \quad (3)$$

5. Un pulso de láser tiene una energía de 20 J y un radio de haz de 2 mm. La duración del pulso es de 10 ns y la densidad de energía es constante dentro del pulso.

- ¿Cuál es la longitud espacial del pulso?
- ¿Cuál es la densidad de energía dentro del mismo?
- Encuentre las amplitudes de los campo eléctrico y magnéticos del pulso de onda.

**Solución:**

- El pulso viaja a la velocidad de la luz, de modo que su longitud es:

$$d = cT = 3 \times 10^8 \times 10^{-8} = 3 \text{ m}$$

- Entonces, el volumen del pulso es  $d$  por la sección transversal del pulso, i.e.,

$$V = 3 \times 4\pi \times 10^{-6} = 3,77 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

La densidad de energía por tanto es la energía total dividida por el volumen, esto es:

$$U = \frac{20}{V} = 5,33 \times 10^5 \text{ Joule/m}^3$$

6. Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{i} \quad (1)$$

en que  $B_0 = 10^{-8}$  Tesla.

a) Encuentre la frecuencia angular, la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda.

b) Encuentre el campo eléctrico  $\vec{E}(z, t)$ .

c) Encuentre el vector de Poynting y la intensidad de la onda.

### Solución:

a) La frecuencia angular es  $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8$  rads/s. La longitud de onda es  $\lambda = c/f$  en que  $c$  es la velocidad de la luz, de modo que  $\lambda = 3 \times 10^8 \times 10^{-8} = 3$  [m]. La dirección de propagación es  $+z$ . El vector de ondas es  $\vec{k} = k\hat{k}$  en que  $k = 2\pi/\lambda$ .

b) Para encontrar el campo eléctrico podemos utilizar la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

De (1) tenemos de inmediato que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\hat{j} B_0 k \sin(kz - \omega t) \quad (3)$$

Reemplazando esta expresión en (2), e integrando, encontramos

$$\vec{E} = -E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{j} \quad (4)$$

en que  $E_0 = cB_0 = 3$  V/m.

c) De (1) y (4) obtenemos el vector de Poynting,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \cos^2(kz - \omega t) \hat{k} \quad (5)$$

La intensidad es el valor promedio temporal de la magnitud del vector de Poynting,

$$I = S_m = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = 1,19 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

7. Una onda electromagnética posee una intensidad igual a  $100 \text{ W/m}^2$ . Calcule la presión de radiación, y los valores efectivos del campo eléctrico y del campo magnético.

**Solución:**

La intensidad de la radiación es igual al promedio temporal del vector de Poynting. Además, la magnitud del vector de Poynting promedio, está dado en términos de los valores efectivos de los campos por

$$S_m = \frac{E_{ef} B_{ef}}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} E_{ef}^2 \quad (1)$$

puesto que las magnitudes de los campos están relacionadas por  $E = cB$ . Como  $S_m = 100 \text{ W/m}^2$ , de (1) obtenemos de inmediato

$$E_{ef} = 194 \text{ V/m} \quad B_{ef} = 0,65 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Finalmente, la presión de radiación es igual a la densidad de energía promedio, y está dada, en términos de  $E_{ef}$  y de  $B_{ef}$ , por

$$P = \frac{E_{ef} B_{ef}}{\mu_0 c} \quad (2)$$

Reemplazando los valores numéricos de  $\mu_0$ ,  $c$ , y de los valores efectivos de los campos encontrados arriba, tenemos finalmente,

$$P = 3,33 \times 10^{-7} \text{ N/m}^2$$

8. Se da la onda electromagnética

$$\vec{E} = \hat{i} \cos \omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + \hat{j} \text{sen} \omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) \quad (1)$$

donde  $E_0$  es una constante. Encuentre el correspondiente  $\vec{B}$  y el vector de Poynting.

**Solución:**

De (1) podemos obtener

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\hat{i} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -p\omega E_0 (\hat{i} \cos(\omega(pz - t)) + \hat{j} \sin(\omega(pz - t))), \quad (2)$$

en que  $p = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Utilizando la ecuación de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3)$$

la ecuación (2) e integrando en el tiempo, obtenemos finalmente el valor de  $\vec{H}$ . Así tenemos

$$\vec{H} = \frac{E_0}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \{-\hat{i} \sin[\omega(pz - t)] + \hat{j} \cos[\omega(pz - t)]\} \quad (4)$$

De (1) y (4) obtenemos de inmediato el vector de Poynting,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{k}$$

**9.** Un generador de corriente alterna que produce una *fem* dada por  $V = V_0 \cos \omega t$  se conecta a un condensador de placas paralelas circulares de radio  $a$  y separación  $d$  entre las placas.

a) Calcule la corriente de desplazamiento entre las placas del condensador.

b) Una espira cuadrada que cabe justo entre las placas del condensador se ubica justo al borde del condensador. ¿Cuánto vale la *fem* inducida en la espira?

c) La espira se ubica a una distancia  $s$  sobre el condensador y a distancia  $a$  del cable. ¿Cuánto vale la *fem* inducida en esta posición?

**Solución:**

a) La corriente de desplazamiento  $I_d$  es:

$$I_d = \int \vec{j}_d \cdot d\vec{S}$$

donde

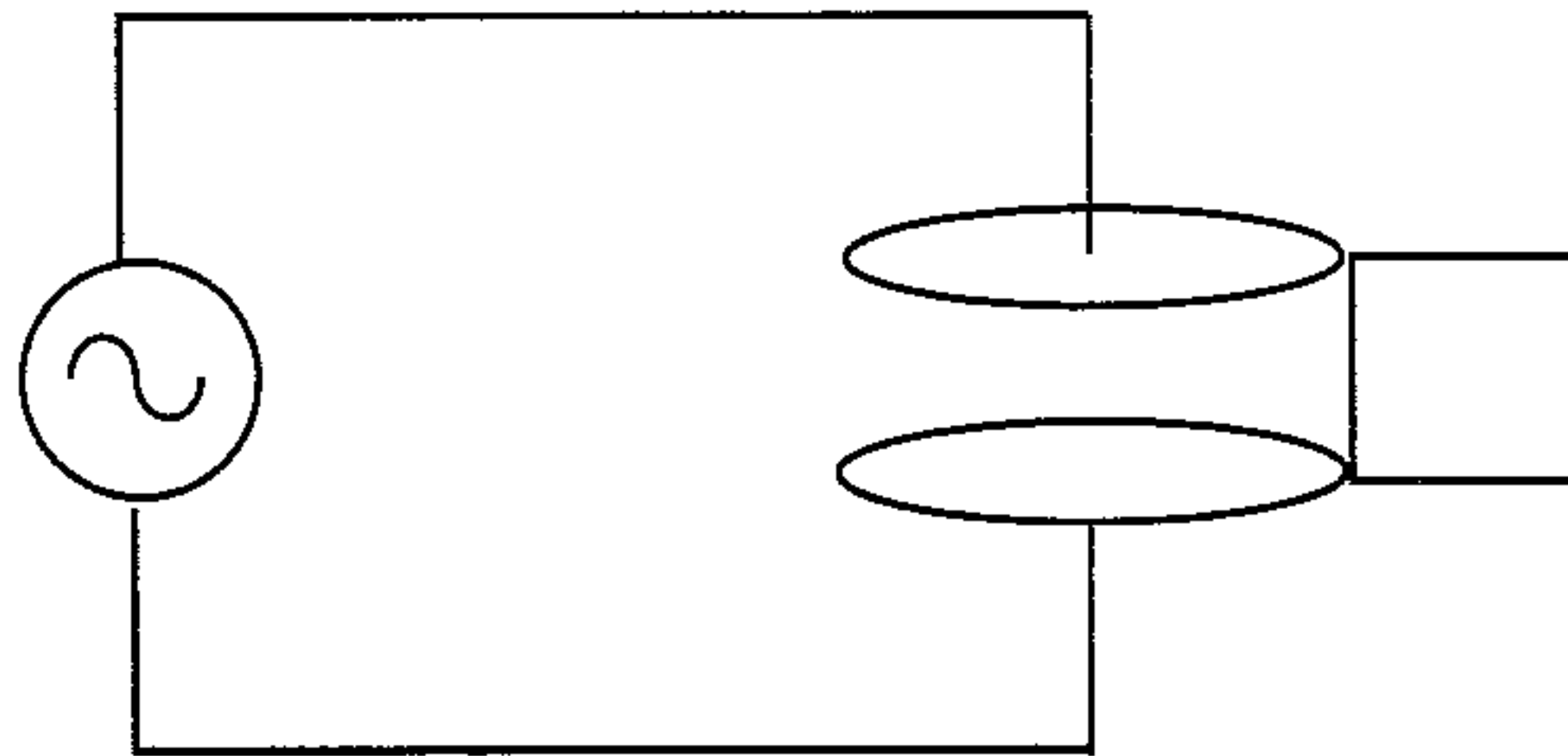
$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

El campo eléctrico entre las placas del condensador es constante ya que se trata de un condensador de caras paralelas. Por esta razón la relación entre el campo y la diferencia de potencial  $V$  entre las placas es  $E = V/d$ . Reemplazando este valor del campo en las expresiones anteriores obtenemos:

$$I_d = j_d A = \epsilon_0 A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\pi a^2 \omega V_0 \epsilon_0 \sin(\omega t)}{d}$$

b) El campo magnético creado por la corriente de desplazamiento es:

$$B = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi r}$$



El flujo magnético a través de la espira es:

$$\phi = \int_a^{a+d} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi} \ln \left[ \frac{a+d}{d} \right]$$

y la *fem* inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{a+d}{d} \right] \frac{dI_d}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{a+d}{d} \right] \frac{\pi a^2 \omega^2 V_0 \epsilon_0 \cos(\omega t)}{d}$$

c) La corriente por el cable es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del condensador por lo que induce la misma *fem*. La corriente es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = -CV_0 \omega \sin(\omega t) = I_d$$

Para llegar a este resultado usamos  $C = \epsilon_0 A/d$ , donde  $A = \pi a^2$ .