Tarea 8

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Pedro J. Aguilera Rojas

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el jueves 12 de octubre a las 23:59

Pregunta 1

Considere la siguiente ecuación de movimiento para un sistema no lineal con roce:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \gamma x + \beta x^2 + \alpha x^3 = 0$$

a) Encuentre el Lagrangiano de la ecuación de movimiento.

b) Encuentre una solución por aproximaciones sucesivas, partiendo del problema lineal, hasta el primer orden de aproximación no nulo. Puede tomar las aproximaciones y limites que estime conveniente, pero deben ser debidamente justificados.

c) Considere $\lambda = \beta = 0$ y $\alpha = 0.05$. Grafique el potencial resultante $V(x)$ como una función de γ y x en el rango $-2 \geq \gamma \leq 2$ y $-10 \geq x \leq 10$. Una gráfico tridimensional muestra cómo la forma del potencial cambia con el parámetro γ de un solo pozo a un pozo doble. Encuentre el valor de γ para el que esto sucede, y caracterice la bifurcación resultante.

d) Para $\lambda = \beta = 0$ y $\gamma = -1, 0\ y\ 1$. Grafique la energía en tres dimensiones en función de x y α. Grafique el espacio de fase y caracterice la dinámica del sistema. Comente sus resultados.

Pregunta 2

Considere una cinta transportadora horizontal la cual se mueve a velocidad constante v_0. Esta cinta es empujada por dos poleas, como se ilustra en la Figura 1. En la sección horizontal superior se pone una masa m, la cual esta conectada con un resorte ideal de largo natural nulo y constante elástica k. Debido a que la cinta se mueve rápido aparece una fuerza de arrastre producto de la fricción, la cual depende la velocidad relativa entre la masa y la cinta, de la siguiente forma:

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} -\beta(v_0 - \dot{x})^2 & \dot{x} \geq 0 \\ \\ \beta(v_0 - \dot{x})^2 & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

donde β es a parámetro con unidades de $kg\ m^{-1}$, v_0 es un parámetro con unidades de velocidad que caracteriza la fricción.

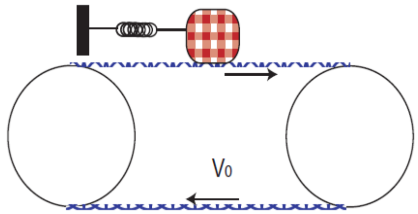

Figura 1: Cinta transportadora

a) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento. ¿Se conserva alguna cantidad de movimiento?.

b) Grafique las trayectorias del espacio de fase del sistema, muestre para que rango de valores de los parámetros cambia cualitativamente el comportamiento del sistema. Comente sus resultados.

c) Muestre que este sistema exhibe una bifurcación para un valor crítico de la velocidad de la cinta. O sea, que al ir cambiando la velocidad v_0 existe un valor tal que se produce de forma abrupta un cambio en el comportamiento del sistema. Para valores mayores o menores de esta velocidad ¿qué movimiento realizara la masa?.

Pregunta 3

Considere la ecuación oscilador de Duffing con variables adimensionales

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} + y + \lambda y^3 = 0$$

Exploraremos el comportamiento de la solución correspondiente a $y = 1,\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau = 0$ en $\tau = 0$.

a) Resuelva **numéricamente** la ecuación diferencial, considerando valores de τ que lleguen hasta $4 - 5$ períodos de oscilación, para $\lambda = 0.1;\ 0.3;\ 0.6;\ 0.8$. Grafique su resultado

b) Tome ahora la solución obtenida hasta el primer orden en aproximaciones sucesivas, en que no se modifica la frecuencia de oscilación del oscilador (o sea, la solución que tiene un término que crece linealmente con el tiempo) y grafíquela para los mismos valores de λ, comparando con lo obtenido en a)

c) Finalmente tome la solución a primer orden en aproximaciones sucesivas, considerando el cambio de frecuencia que impide la aparición de términos seculares y grafíquela para los mismos valores de λ, comparando con lo obtenido en a) y b)