Tarea 7

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Pedro J. Aguilera Rojas

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el jueves 5 de octubre a las 23:59

Pregunta 1

Un campo magnético uniforme dependiente del tiempo $\vec{B} = B(t)\hat{k}$ actúa sobre una partícula de masa m y carga eléctrica q.

a) Encuentre el campo eléctrico inducido y muestre que la fuerza de Lorentz sobre la partícula permanece en el plano perpendicular a $\hat{k}$.

b) Bajo una transformación de rotación apropiada, muestre que el sistema anterior es equivalente a un oscilador paramétrico.

c) Grafique y caracterice numéricamente las trayectorias en el espacio físico y de fase del problema para $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$.

Pregunta 2

Considerando la ecuación de Mathieu dada por:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2(1 + h\cos(2\omega t))q = 0 \tag{1}$$

En el caso $h \ll 1$, $2\omega = 2\omega_0 + \epsilon$ con $\epsilon \ll 1$ y $\lambda = 0$ ya se ha visto una solución para aproximaciones de primer orden, del tipo $q = a\cos(\omega_0 t + \theta)$, con a y θ las variables a determinar, la cual tiene soluciones estables e inestables, con el límite entre unas y otras (límite de estabilidad) dado por $|\epsilon| = h\omega_0/2$.

a) Utilizando la ecuación de Mathieu, estime el valor de los parámetros para caracterizar la dinámica de una persona balanceándose en un columpio de plaza pública (no olvidar verificar la consistencia de las unidades). Resuelva la ecuación numéricamente, es decir, encontrar $q(t)$ con condiciones iniciales físicamente aceptables para valores de ϵ y h levemente menores y levemente mayores que el límite de estabilidad. Comente su resultado.

b) Realice una aproximación de segundo orden de la forma:

$$q = a\cos(\omega_0 t + \theta) - \frac{ah\omega}{8(\omega + \omega_0)}\cos(3\omega_0 t + \theta)$$

Deduzca las ecuaciones para a y θ. Realice un cambio de variable que le permita expresar el sistema de ecuaciones como una ecuación diferencial vectorial. Determinar la condición y el límite de estabilidad que debe cumplir ϵ para este sistema.

c) Encuentre numéricamente las regiones de estabilidad en el plano $\epsilon - h$, tanto para la la aproximación en primer y segundo orden. Comente sobre sus resultados.

Pregunta 3

El oscilador de Van der Pol es un oscilador con amortiguamiento no lineal de la forma:

$$\ddot{x} + \Gamma(x)\dot{x} + f(x) = 0$$

Con $\Gamma(x)$ es una función par y $f(x)$ una función impar. El circuito de la Figura 1, muestra un sistema físico que puede ser descrito por la formula anterior. Una representación esquemática del circuito se muestra en la Figura 1.

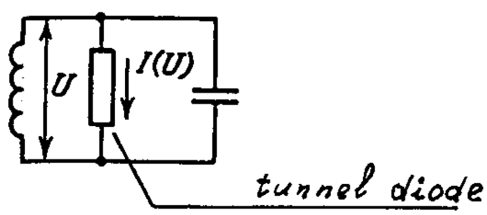

Figura 1: Circuito de Van der Pol

En donde U es la diferencia de potencial e $I(U) = I_0 - g(U - U_0) + \alpha(U - U_0)^3$ es la corriente eléctrica debido al diodo, con $g = 3\alpha {U_0}^2$. El circuito tiene capacitancia C e inductancia L.

a) Encuentre la ecuación para el potencial en función del tiempo. Muestre que bajo un cambio de variable conveniente y $LC = 1$ la ecuación se puede escribir como:

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

y encuentre el valor de β en función de los parámetros del circuito.

b) Defina la energía $E = (x^2 + \dot{x}^2)/2$ y calcule la variación en el tiempo. ¿Existe una posición en el que la energía se conserva?. ¿Es posible ajustar el parámetro β para que la energía se conserve en todo el espacio?.

c) Grafique numéricamente el espacio de fases y la solución $x(t)$ (con las mismas condiciones iniciales) para distintos valores de β; uno mucho más pequeño que 1, uno cercano a 1 y uno mucho más grande que 1. Compare sus resultados con el oscilador armónico simple y comente al respecto de la forma de las curvas en los casos anteriores.

d) Considere la ecuación:

$$m\ddot{y} + (A\dot{y}^2 - B)\dot{y} + ky = 0$$

Analice la ecuación bajo un cambio de variable conveniente demuestre que la ecuación anterior es un oscilador de Van der Pol y repita las partes a) y b) para valores que usted considere relevantes de A, B, m y k (en al menos 1 conjunto de valores).