MECÁNICA (FI 2001-2) **TAREA 4** Fecha: 01 mayo 2022

Prof. Patricio Aceituno

Profesores auxiliares: Edgardo Rosas, Javier Huenupi; Ayudantes: Felipe Cubillos, Álvaro Flores

Plazo de entrega: domingo 08 mayo, 23:59 h.

1.- Una partícula de masa **m** puede moverse por el interior de un tubo que forma un círculo de radio **R** solo bajo la acción de un campo de fuerza de atracción hacia un punto fijo O cuya magnitud es proporcional a la distancia de la partícula a dicho punto. Asuma que no hay fuerza de gravedad. El punto de atracción se encuentra a una distancia 2 R del centro del círculo.

$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$$

a) Determine los puntos de equilibrio de la partícula en el interior del tubo, identificando los que son inestables y estables.

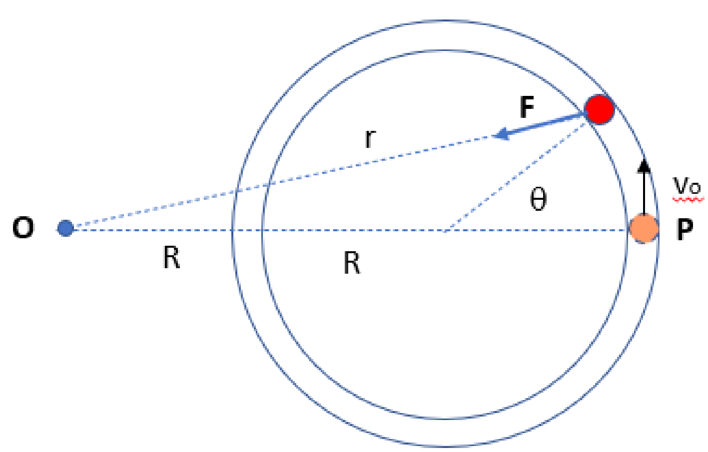
b) Calcule el periodo de pequeñas oscilaciones alrededor del o de los puntos de equilibro estable.

Estando la partícula en reposo en el punto más alejado del centro de atracción (punto P) se le imprime una rapidez $\mathbf{v}_o$.

c) Determine la rapidez de la partícula en función del ángulo θ (ver figura)

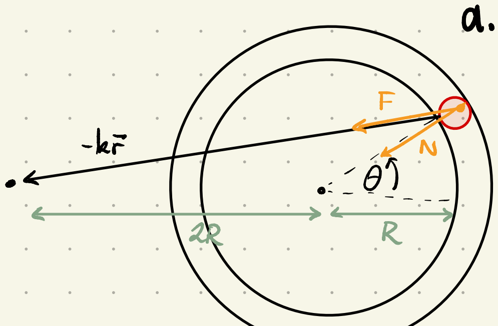
d) Para el ángulo $\theta = \pi/2$ determine la magnitud de la fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula

NOTA: Utilice en sus respuestas conceptos de potencial asociado a una fuerza conservativa y de conservación de energía mecánica total.

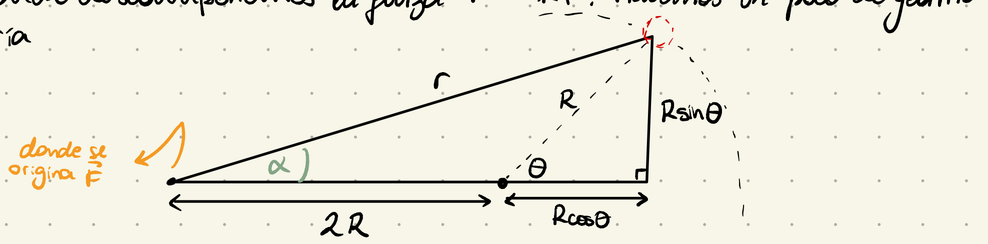


Tarea 4

P1



a. Usamos un sist. de coord. polares con centro en el centro del círculo, donde descomponemos la fuerza $\vec{F} = -k\vec{r}$. Hacemos un poco de geometría



Entonces $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$ (primero descomponemos en cartesianas y luego pasamos a polares), donde

$$F_x = -|\vec{F}|\cos\alpha \quad \wedge \quad F_y = -|\vec{F}|\sin\alpha$$

donde por dibujo podemos escribir el cos y sin

$$\Rightarrow F_x = -|\vec{F}|\,\frac{(R\cos\theta + 2R)}{r} \quad \wedge \quad F_y = -|\vec{F}|\,\frac{R\sin\theta}{r}$$

y la distancia r se calcula por pitágoras $\Rightarrow$ $r = \sqrt{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + 4R^2\cos\theta + 4R^2}$
$= \sqrt{5R^2 + 4R^2\cos\theta}$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = |-k\vec{r}| = kR\sqrt{5+4\cos\theta}$$

$$\Rightarrow F_x = -kR\cancel{\sqrt{5+4\cos\theta}}\,\frac{(R\cos\theta + 2R)}{R\cancel{\sqrt{5+4\cos\theta}}} = -kR(2+\cos\theta) \quad \wedge \quad F_y = -kR\sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -kR(2+\cos\theta)\,\hat{\imath} - kR\sin\theta\,\hat{\jmath} = -kR(2+\cos\theta)(\cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{\theta}) - kR\sin\theta(\sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta})$$

$$= (-kR\cos\theta(2+\cos\theta) - kR\sin^2\theta)\,\hat{\rho} + (kR\sin\theta(2+\cos\theta) - kR\cos\theta\sin\theta)\,\hat{\theta}$$

Además tenemos la fuerza del tubo $N\hat{\rho}$ que cambia de signo para $\theta = \pi/2,\ 3\pi/2$.
Las ecs. de mov. serían

$$\hat{\rho})\quad -mR\dot{\theta}^2 = -2kR\cos\theta - kR + N \qquad (1)$$

$$\hat{\theta})\quad mR\ddot{\theta} = kR\sin\theta(2+\cos\theta) - kR\cos\theta\sin\theta \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{2k}{m}\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

Donde hay puntos de equilibrio si $\ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{2\cancel{k}}{\cancel{m}}\sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \theta_0 \in \{0, \pi\}$$

Para analizar si son estables o inestables calculamos la derivada de la aceleración $d\ddot{\theta}/d\theta = f(\theta)$

$$\Rightarrow f(\theta) = -\frac{2k}{m}\cos\theta$$

$$\Rightarrow f(0) = -\frac{2k}{m} < 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \text{ es inestable}$$

$$\Rightarrow f(\pi) = \frac{2k}{m} > 0 \Rightarrow \theta_0 = \pi \text{ es estable}$$ } Solo este puede tener pequeñas oscilaciones

b. Para calcular la frecuenc. de pequeñas oscilaciones debemos perturbar θ en torno a π donde γ es pequeño $(\theta \to \pi + \gamma)$

- $\sin(\pi+\gamma) = \cancel{\sin(\pi)}\cos(\gamma) + \underbrace{\cancel{\cos(\pi)}}_{-1}\underbrace{\cancel{\sin(\gamma)}}_{\approx\gamma} \approx -\gamma$

- $\cos(\pi+\gamma) = \underbrace{\cancel{\cos(\pi)}}_{-1}\underbrace{\cancel{\cos(\gamma)}}_{\approx 1} - \underbrace{\cancel{\sin(\pi)}}_{0}\sin(\gamma) \approx -1$

Por lo que la ec. de mov. queda $(\ddot{\theta} = (\ddot{\pi+\gamma}) = \ddot{\gamma})$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} + \frac{2k}{m}\gamma = 0$$

$$\ddot{\gamma} + \frac{2k}{m}\gamma = \ddot{\gamma} + \omega_0^2\gamma = 0$$ } mov. armónico simple

Así que la frecuencia de pequeñas oscilaciones es $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$

c. Integramos (3) con truco de mecánica

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \tilde{k}\int_0^{\theta} \cos\theta \sin\theta\, d\theta + 2\tilde{k}\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta \quad , \text{ con } \tilde{k} = k/m$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \tilde{k}\sin\theta\Big|_0^{\theta} - 2\tilde{k}\cos\theta\Big|_0^{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{v_0^2}{2R^2} = \frac{\tilde{k}\sin^2\theta}{2} - 2\tilde{k}(\cos\theta - 1) \quad , \text{ donde } v_0 = R\dot{\theta}_0$$

$$\Rightarrow v(\theta) = R\dot{\theta}(\theta) = R\sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{k}{m}\sin^2\theta - 4\frac{k}{m}(\cos\theta - 1)}$$

d. De (1) despejamos la fuerza del tubo N

$$\Rightarrow N(\theta) = 2kR\cos\theta + kR - mR\dot{\theta}^2$$
$$= 2kR\cos\theta + kR - mR\left(\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{k}{m}\sin^2\theta - 4\frac{k}{m}(\cos\theta - 1)\right)$$

evaluando en $\theta = \pi/2$

$$\Rightarrow N(\theta = \pi/2) = kR - mR\left(\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{k}{m} + \frac{4k}{m}\right)$$
$$= kR - m\frac{v_0^2}{R} + 5kR$$
$$= 6kR - m\frac{v_0^2}{R}$$

Segundo método (este se evaluará):

La normal del tubo no ejerce trabajo. Calculamos el potencial asociado a la fuerza central

$$\bar{F} = -\nabla U_{(r)}$$

$$\Rightarrow -kr\hat{r} = -\frac{\partial U_{(r)}}{\partial r}\hat{r} \quad // \int dr$$

$$\Rightarrow U - U_0 = \int_{r_0}^{r} kr\,dr$$

$$\Leftrightarrow U - U_0 = \frac{kr^2}{2} + C$$

Escogemos U_0 tq. $\longrightarrow U_{(r)} = \frac{kr^2}{2}$. Así que la energía mecánica **conservada** queda como

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2\right) + \frac{k}{2}r^2 = cte.$$

donde $\dot{\rho} = 0$ $\forall t$ y $\rho = R$ $\Rightarrow E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}r^2$

y debemos expresar r en nuestras coord. polares, anteriormente conseguimos

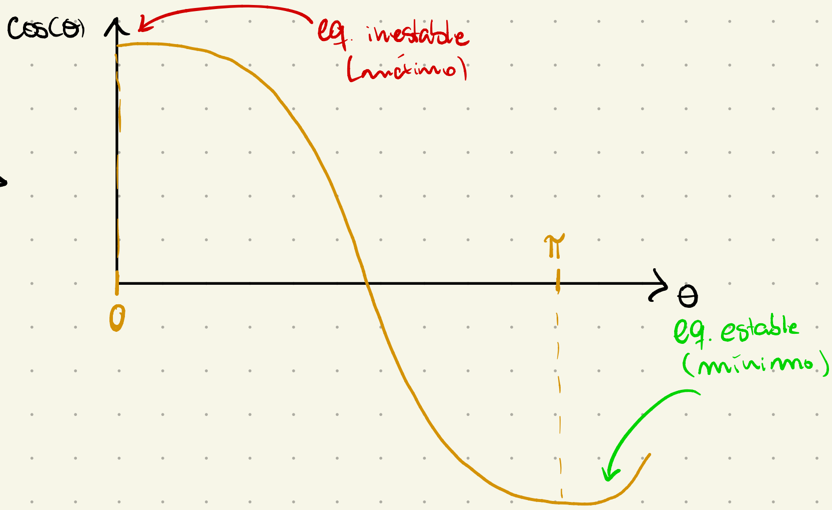
$$r = \sqrt{5R^2 + 4R^2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}R^2(5 + 4\cos\theta)$$

a. Para esta parte debemos encontrar donde el potencial es un mínimo (eq. estable) o un máximo (eq. inestable), para eso derivamos $U_{(\theta)}$ c/r al ángulo e igualamos a 0

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} \sim \sin\theta_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \theta_0 \in \{0, \pi\}$$

Analizamos si son estables o inestables



b. Tenemos que la energía es de la forma $E = \frac{\alpha}{2}\dot{\theta}^2 + U_{(\theta)}$, por lo que la freq. de pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\theta_0)}{\alpha}}, \text{ donde}$$

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_0} = -2kR^2\cos\theta_0 = 2kR^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2kR^2}{mR^2}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

c. La energía inicial es $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{9}{2}kR^2$ y la energía en θ es

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{2} R^2 (5 + 4\cos\theta)$$, igualando estas dos

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2kR^2 + 2kR^2\cos\theta} = \sqrt{v_0^2 + 2kR^2(1+\cos\theta)} = R\dot{\theta}$$

d. Como se hizo en el primer método