Mecánica (FI2001) **TAREA 4** Semestre: Primavera 2021

Prof.: Patricio Aceituno Fecha: 21 noviembre 2021

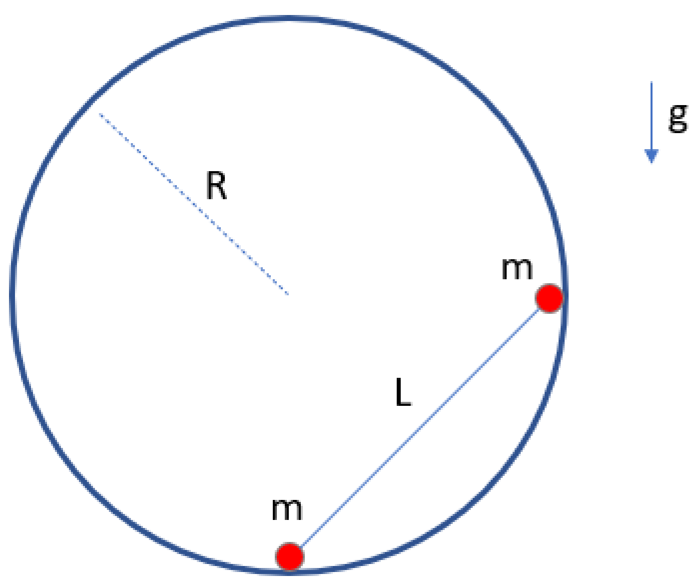
Plazo máximo de entrega: domingo 5 de diciembre a las 23:59 h.

Considere un cilindro hueco de radio **R**, colocado en posición horizontal. En el interior del cilindro se encuentran dos partículas de masa **m** cada una, unidas por una barra de largo $L = 2^{1/2} R$, colocadas en un plano perpendicular al eje del cilindro, con una de las dos partículas ubicada en el punto más bajo del cilindro (ver figura adjunta). En algún momento la barra se suelta desde el reposo, en esa posición. Determine:

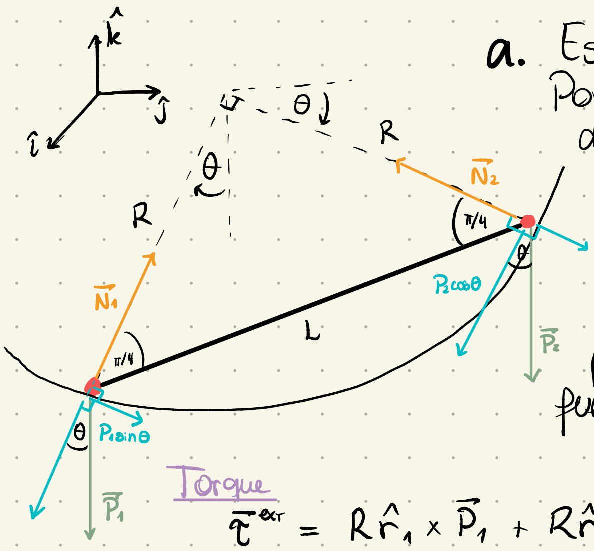
a) Rapidez de las partículas cuando la barra pasa por la posición horizontal

b) Magnitud de la aceleración de las partículas cuando la barra pasa por la posición horizontal

c) Calcule el periodo de pequeñas oscilaciones que ocurren si estando la barra en reposo en posición horizontal se la perturba ligeramente, sacándola desde esa posición,



Tarea 4



a. Este problema lo hacemos con torque y momentum angular. Por la geometría del problema consideramos que el sist. de dos partículas rota en conjunto en torno al centro del cilindro así que haremos los cálculos del torque y momentum con $\vec{r}$ medido desde el centro del cilindro a cada partícula.

Notamos que $\vec{N}_i \parallel \vec{r}_i$, por lo que las normales no producen torque y la fuerza que ejerce las barras es una fuerza interna, así que no la consideramos (+0.2 pts)

Torque

$$\vec{\tau}^{ext} = R\hat{r}_1 \times \vec{P}_1 + R\hat{r}_2 \times \vec{P}_2 = R P_1 \sin\theta\,\hat{\imath} - R P_2 \cos\theta\,\hat{\imath} = mgR\sin\theta\,\hat{\imath} - mgR\cos\theta\,\hat{\imath}$$
(+0.4 pts)

Momentum angular

$$\vec{L} = mR\hat{r}_1 \times \vec{v}_1 + mR\hat{r}_2 \times \vec{v}_2 = -mR(R\dot{\theta})\hat{\imath} - mR(R\dot{\theta})\hat{\imath} = -2mR^2\dot{\theta}\,\hat{\imath} \quad (+0.4\text{ pts})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -2mR^2\ddot{\theta}\,\hat{\imath}$$

Hacemos $\vec{\tau}^{ext} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow -2mR^2\ddot{\theta}\,\hat{\imath} = mgR\sin\theta\,\hat{\imath} - mgR\cos\theta\,\hat{\imath}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2R}(\cos\theta - \sin\theta) \quad (1) \quad (+0.3\text{ pts})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g}{2R}\int_0^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(\sin\theta + \cos\theta - 1) \quad (2) \quad (+0.2\text{ pts})$$

La velocidad angular cuando la barra está horizontal $(\theta = \pi/4)$ es

$$\dot{\theta}(\theta = \pi/4) = \sqrt{\frac{g}{R}(\sqrt{2} - 1)}$$

Por lo que la rapidez de cada partícula es $|\vec{v}_i| = |R\dot{\theta}\hat{\phi}_i| = \sqrt{gR(\sqrt{2}-1)}$ (+0.5 pts)

b. La aceleración angular en $\theta = \pi/4$ es $\ddot{\theta}(\theta = \pi/4) = 0$ (+1.0 pts)

$$\Rightarrow |\vec{a}_i| = |-R\dot{\theta}^2\hat{\rho}_i + \cancel{R\ddot{\theta}}\hat{\phi}_i| = g(\sqrt{2} - 1) \quad (+1.0\text{ pts})$$

c. Usamos que $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{V''(\theta_{eq})}{\alpha}}$, con α de $E = \dfrac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2 + V(\theta)$

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}2mR^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \alpha = 2mR^2 \quad (+0.5\text{ pts})$$

Y la energía potencial

$$V(\theta) = mgz_1 + mgz_2 = -mgR\cos\theta - mgR\sin\theta \quad (+0.5\text{ pts})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = mgR\cos\theta + mgR\sin\theta \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_{\theta_{eq} = \pi/4} = \sqrt{2}\,mgR \quad (+0.3\text{ pts})$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\, mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{R}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{R}{g}}$$ (+0.2 pts)

(+0.5 pts)

Segunda forma: Energía

Las fuerzas normales son perpendiculares a la trayectoria de las partículas, por lo que no hacen trabajo y la barra solo es una restricción que nos permite asegurar que tienen la misma velocidad angular $\dot{\theta}$, por lo que se conserva la energía mecánica

$$K + V = E$$

energía inicial

$$\Leftrightarrow mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta - mgR\sin\theta = -mgR \quad (3)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(\cos\theta + \sin\theta - 1)$$

derivando (3) $\longrightarrow 2mR^2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + mgR\sin\theta\,\cancel{\dot{\theta}} - mgR\cos\theta\,\cancel{\dot{\theta}} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2R}(\cos\theta - \sin\theta)$$

Con lo que conseguimos los mismas expresiones que antes y luego el desarrollo es el mismo