

Tarea 3

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: P. Joaquín

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el miércoles 30 de agosto a las 23:59

Pregunta 1

El problema de los tres cuerpos es uno de los problemas más importantes de la mecánica clásica. Isaac Newton formuló este problema en 1788, pasando muchos años sin ser resuelto. Fueron muchos los físicos y matemáticos que intentaron resolver este problema, entre los cuales se encuentran: Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange y Peter Dirichlet, entre otros. Posteriormente, en 1890 este problema fue resuelto fundamentalmente por Henry Poincaré, quien se preguntaba si el sistema solar sería estable eternamente o no. Poincaré mostró que este problema no es integrable, además de tener sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales, a lo cual denominó caos.

Esta pregunta considera una simplificación al problema de tres cuerpos, es decir, el problema de los tres cuerpos restringido o de Euler. Este consiste en que una de las tres masas es mucho más pequeña que las otras dos, similar a la interacción de un satélite artificial, la tierra y el sol.

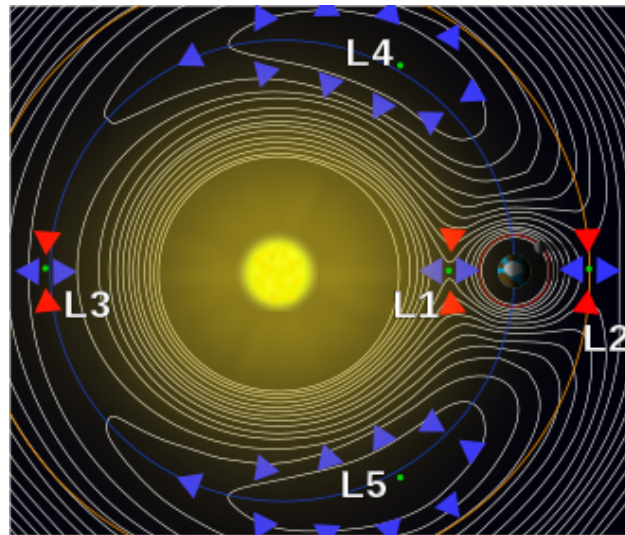


Figura 1: Representación esquemática de los puntos de Lagrange en el espacio físico. Referencia: https://es.m.wikipedia.org/wiki/Puntos_de_Lagrange

El trabajo será encontrar la estabilidad del tercer cuerpo, analizando los puntos donde este se encuentre en equilibrio relativo al movimiento de los otros dos cuerpos. A estos puntos se les llama puntos de Lagrange, en honor al matemático Joseph Lagrange, quien los estudió en su completitud.

Su importancia es tal que, hasta el día de hoy, se siguen implementados en el posicionamiento de satélites artificiales, como por ejemplo el establecimiento del satélite espacial James Webb en el punto L_2 (para más información del James Webb consultar en: <https://webb.nasa.gov/>). Para estudiar esto:

- a) Reduzca el problema de tres cuerpos a uno de dos cuerpos reales. Encuentre la velocidad angular correspondiente al giro de ambos en un sistema de referencia inercial. Suponga el movimiento del tercer cuerpo coplanar a los otros dos cuerpos y plantee un sistema de referencia no inercial. Luego, exprese las ecuaciones de movimiento.
- b) Deduzca el Lagrangiano a partir del ítem anterior. Estudie la energía que describe el movimiento y compare con expresiones conocidas de la energía. ¿Qué diferencia puede notar en sus términos?. Interprete.
- c) Encuentre los tres primeros puntos de Lagrange: L_1 , L_2 y L_3 (puntos colineales de Euler). Para esto, plantee las soluciones colineales a los dos cuerpos, dada la simetría de reflexión en el eje x de la fuerza gravitacional. Exprese la ecuación correspondiente y realice aproximaciones que estime conveniente. Evalúe, en kilómetros, la distancia de L_2 a la tierra. Compare con los datos del James Webb.
- d) Encuentre los dos últimos puntos de Lagrange: L_4 y L_5 . Equilibrando las fuerzas ficticias con las fuerzas gravitatorias de los otros dos cuerpos. Para esto considerar descomponer las fuerzas en sus componentes paralelas y perpendiculares desde el centro de masa.
- e) Grafique numéricamente los puntos de Lagrange junto con sus curvas de potencial y compare graficando los puntos en el espacio de fase. Describa cualitativamente.
- f) Analice la estabilidad de cada punto de Lagrange. Para esto, linealice las ecuaciones de movimiento y evalúe en cada punto. Encuentre los tiempos característicos de los casos inestables.