MECÁNICA (FI 2001-2) **TAREA 3** Fecha: 18 abril 2022

Prof. Patricio Aceituno

Profesores auxiliares: Edgardo Rosas, Javier Huenupi; Ayudantes: Felipe Cubillos, Álvaro Flores

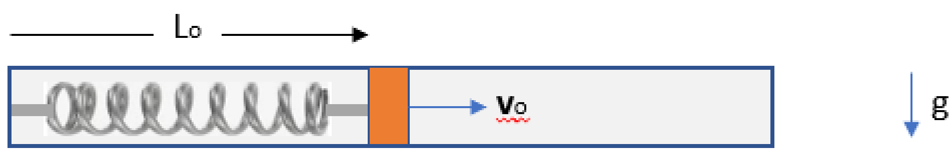
Plazo de entrega: domingo 24 abril, 23:59 h.

1.- Considere un bloque de masa **m** que se mueve dentro de un cilindro lleno de aceite bajo la acción de la fuerza elástica de un resorte de largo natural L_o y constante elástica **k** y del roce viscoso con el aceite. Si estando el resorte en su largo natural, se le da una velocidad $\mathbf{v}_o$, encuentre una expresión para la posición x del bloque en función del tiempo. Grafique x(t)

Considere que la fuerza de roce viscoso es $\mathbf{F}_{rv} = - m\, c\, dx/dt$

Resuelva considerando los siguientes valores para los parámetros del problema

m = 1 kg; k = 10 kg s^{-2} ; c = 2 s^{-1}

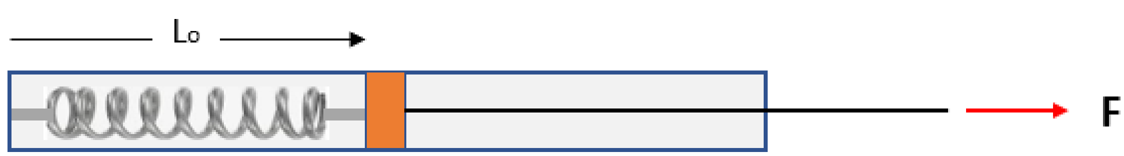


2.- Suponga que mediante una barra rígida y de masa despreciable el bloque es además forzado por una fuerza externa sinusoidal:

$$\mathbf{F} = F_o \cos \omega_2 t$$

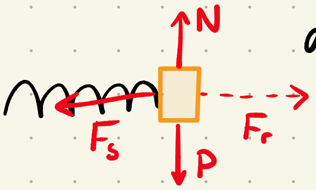
con F_o = mg

Determine para que valor de la frecuencia ω_2 se genera resonancia y evalúe la amplitud del movimiento del bloque cuando la fuerza **F** tiene esa frecuencia



Tarea 3

P1



a) Un movimiento en solo un eje ⇒ Sist. cartesiano. Las fuerzas son: Resorte (S de spring), normal, peso y del roce

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k(x-l_0) - mc\dot{x}$$

Donde hacemos el cambio de variable $z = x - l_0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{z}$ y $\ddot{x} = \ddot{z}$

$$\Rightarrow \ddot{z} + c\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \text{ con } \omega_0^2 = k/m$$

donde usamos el ansatz $z(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow \dot{z} = \alpha z$ y $\ddot{z} = \alpha^2 z$

oscilación y/o decaimiento (depende si $\alpha \in \mathbb{R}$ o $\alpha \in \mathbb{C}$)

$$\Rightarrow \alpha^2 + c\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Así que tenemos la solución $z(t)$ como una combinación lineal de sol. independientes

$$\Rightarrow z(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

Sabemos que en $t=0$, $\dot{z}(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0$ y $z(t=0) = x(t=0) - l_0 = 0$, con lo que obtenemos

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \alpha_1 A + \alpha_2 B \\ \wedge\ 0 &= A + B \Rightarrow A = -B \end{aligned}\right\} B = \frac{v_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Con lo que nos quedaría: $z(t) = \frac{v_0}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(-e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t}\right) = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - 4\omega_0^2}}\left(e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t}\right)$

Ahora reemplazamos con los valores dados

- $\omega_0^2 = k/m = 10\, kg\, s^{-2} / 1\, kg = 10\, s^{-2}$
- $\alpha_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2s^{-1} + \sqrt{4s^{-2} - 40s^{-2}}}{2} = [-1 + 3i]s^{-1}$
- $\alpha_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2}}{2} = [-1 - 3i]s^{-1}$

$$\Rightarrow x(t) = z(t) + l_0 = -\frac{iv_0}{6s^{-1}}\left(e^{(-1-3i)s^{-1}\cdot t} - e^{(-1+3i)s^{-1}t}\right) + l_0$$

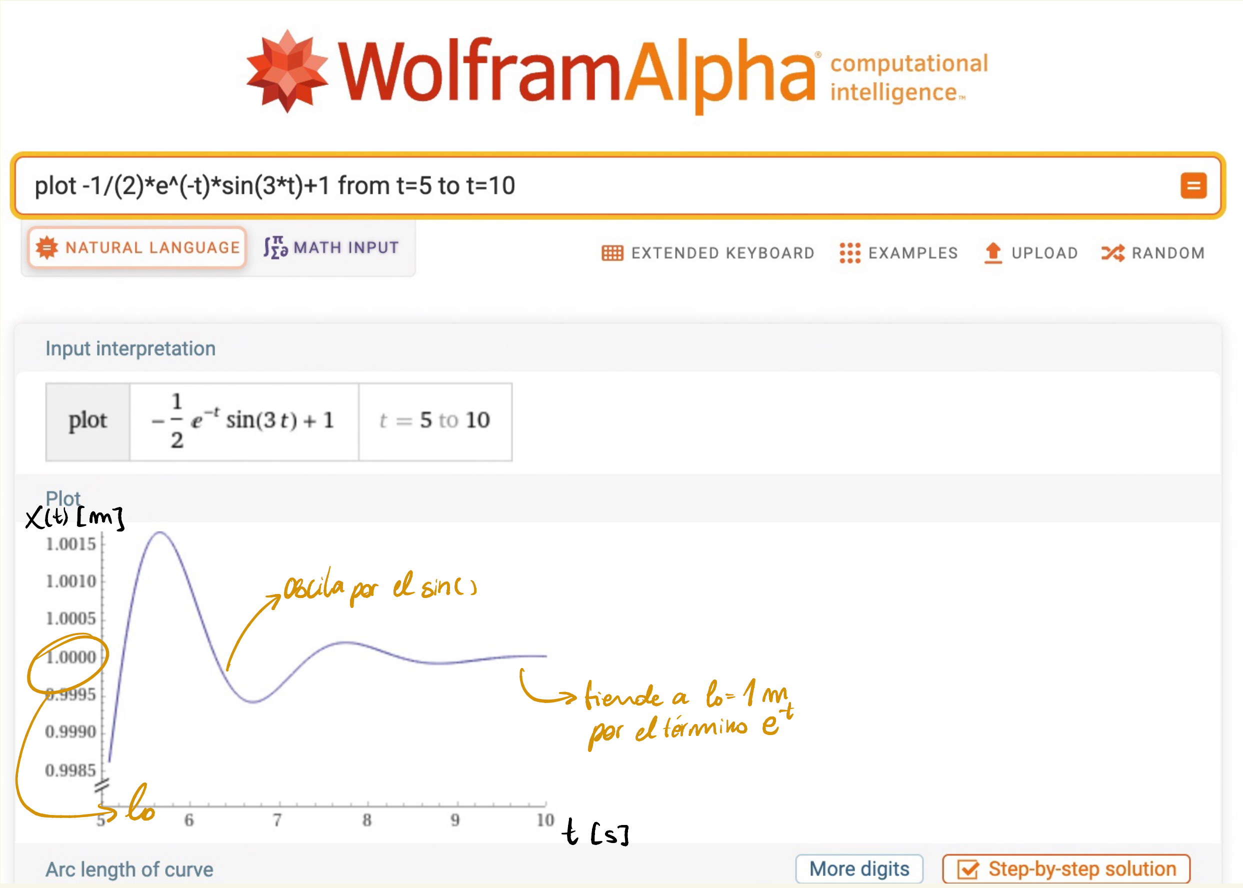
Donde tomamos únicamente la parte real

$$\Rightarrow x(t) = Re[z(t) + l_0] = Re\left[\frac{iv_0}{6s^{-1}e^t}\left(e^{3is^{-1}\cdot t} - e^{-3is^{-1}\cdot t}\right)\right] + l_0$$

$$= Re\left[\frac{iv_0}{6s^{-1}e^t}\left(\cancel{\cos(3s^{-1}t)} + i\sin(3s^{-1}t) - \cancel{\cos(3s^{-1}t)} + i\sin(3s^{-1}t)\right)\right] + l_0$$

$$= Re\left[-\frac{v_0}{3s^{-1}e^t}\sin(3s^{-1}t)\right] + l_0 = -\frac{v_0}{3s^{-1}}e^{-t}\sin(3s^{-1}t) + l_0$$

Hacemos uso de nuestro confiable Wolfram Alpha (la cato tiene la versión completa), ploteamos para $\dot{x}_0 = 1$ m/s y $l_0 = 1$ m



b) La ec. de movimiento ahora sería: $m\ddot{x} = -k(x-l_0) - mc\dot{x} + F_0\cos(\omega_2 t)$, hacemos el mismo c.v.

$$\Rightarrow \ddot{z} + c\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cos\omega_2 t = \mathrm{Re}\left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega_2 t}\right]$$

Usamos el Ansatz $z(t) = \underbrace{A}_{\text{amplitud}} \cdot \underbrace{e^{-i\varphi}}_{\text{fase}} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{oscilación}} \Rightarrow \dot{z}(t) = i\omega z \Rightarrow \ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t)$, reemplazamos

$$-\omega^2 z + i\omega c z + \omega_0^2 z = \tilde{F}_0 e^{i\omega_2 t} \quad / \tilde{F}_0 = F_0/m$$

$$\Leftrightarrow [(\omega_0^2-\omega^2) + i\omega c]\, A e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = \tilde{F}_0 e^{i\omega_2 t}$$

$$\Leftrightarrow [(\omega_0^2-\omega^2) + i\omega c]\, A = \tilde{F}_0\, e^{i(\omega_2-\omega)t} e^{i\varphi} \quad (1)$$

* Usamos como ansatz una expresión imaginaria, pero luego tomamos la parte real, believe me

Como (1) se tiene que cumplir ∀t, anulamos la componente temporal, o sea el término $e^{i(\omega_2-\omega)t}$ imponiendo $\omega \overset{!}{=} \omega_2$

con lo que encontramos que la frecuencia de oscilación de nuestra solución particular, es la frecuencia del forzamiento. Seguimos, igualamos la parte real con la imaginaria de (1)

$$A(\omega_0^2-\omega_2^2) + i\omega_2 cA = \tilde{F}_0\cos(\varphi) + i\tilde{F}_0\sin(\varphi)$$

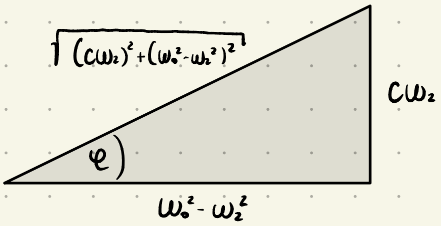
$$\Rightarrow A(\omega_0^2-\omega_2^2) = \tilde{F}_0\cos(\varphi)$$

$\wedge\ \omega_2 cA = \tilde{F}_0\sin(\varphi)$ *, dividiendo estas ecuaciones para encontrar φ

$$\Rightarrow \frac{c\omega_2}{\omega_0^2-\omega_2^2} = \tan(\varphi) \quad (2)$$

con esto tenemos otro parámetro del Ansatz

Ahora, podemos trabajar "geométricamente" (2) con pitágoras de la siguiente forma



Así que el seno de φ se puede escribir como $\sin\varphi = \dfrac{c\omega_2}{\sqrt{(c\omega_2)^2+(\omega_0^2-\omega_2^2)^2}}$, reemplazamos en * y obtenemos el tercer parámetro de nuestro Anstaz

$$*\Rightarrow A = \frac{\tilde{F}_0}{\cancel{c\omega_2}}\frac{\cancel{c\omega_2}}{\sqrt{(c\omega_2)^2+(\omega_0^2-\omega_2^2)^2}} = \frac{\tilde{F}_0}{\sqrt{(c\omega_2)^2+(\omega_0^2-\omega_2^2)^2}}$$

Así que nuestra solución particular es: $z(t) = \mathrm{Re}\left[\dfrac{\tilde{F}_0}{\sqrt{(c\omega_2)^2+(\omega_0^2-\omega_2^2)^2}}\exp\left(i\cdot\arctan\left(\dfrac{c\omega_2}{\omega_0^2-\omega_2^2}\right)\right)\exp(i\omega_2 t)\right]$

$$= \frac{\tilde{F}_0}{\sqrt{(c\omega_2)^2+(\omega_0^2-\omega_2^2)^2}}\cos\left(\omega_2 t + \arctan\left(\frac{c\omega_2}{\omega_0^2-\omega_2^2}\right)\right)$$

Ahora, la resonancia la tenemos cuando la amplitud A es máxima (minimizando su denominador)

$$\frac{d}{d\omega_2}\left(c^2\omega_2^2 + (\omega_0^2-\omega_2^2)^2\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2c^2\omega_2 - 4(\omega_0^2-\omega_2^2)\omega_2 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 - 2(\omega_0^2-\omega_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2}} = \omega_{res}$$

Con esa frecuencia de forzamiento, la amplitud es:

$$A(\omega_2=\omega_{res}) = \tilde{F}_0\left(c^2\left(\omega_0^2-\frac{c^2}{2}\right) + \left(\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2}+\frac{c^2}{2}\right)^2\right)^{-1/2} = \tilde{F}_0\left(c^2\omega_0^2 - \frac{c^4}{\cancel{2}} + \frac{c^4}{\cancel{2}}\right)^{-1/2} = \frac{\tilde{F}_0}{c\omega_0} = A_{máx}$$

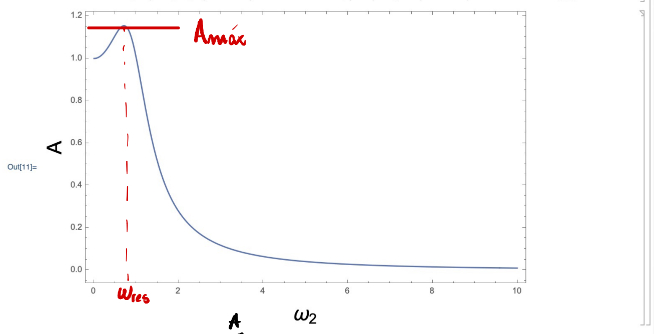
Haciendo uso de la cuenta de un amigo, ploteamos en Mathematica 🤑🤑

WOLFRAM MATHEMATICA | STUDENT EDITION — Demonstrations | MathWorld | Wolfram Community | Help

```
In[7]:= c = 1;
        ω0 = 1;
        F0 = 1;
        m = 1;

In[11]:= Plot[(F0 / m) / Sqrt[(c * x) ^ 2 + (ω0 ^ 2 - x ^ 2) ^ 2], {x, 0, 10}, ImageSize → Large,
          Frame → True,
          FrameLabel → {Style["ω2", Black, FontSize → 24], Style["A", Black, FontSize → 24]}]
```

Out[11]=




```
In[12]:= FindMaximum[(F0 / m) / Sqrt[(c * x) ^ 2 + (ω0 ^ 2 - x ^ 2) ^ 2], {x, 1}]
Out[12]= {1.1547, {x → 0.707107}}
In[13]:= Sqrt[ω0 ^ 2 - c ^ 2 / 2]
Out[13]= 1/√2
```

valor de $\omega_2 = \omega_{res}$ calculado numéricamente

que es el mismo que encontramos analíticamente

***Nota**: No es necesario todo el desarrollo presentado en esta pauta, e.g., para la segunda pregunta bastaba con ocupar la fórmula vista en clases para la amplitud.