Mecánica (FI2001) **TAREA 3** Semestre: Primavera 2021

Prof.: Patricio Aceituno

Plazo máximo de entrega: domingo 31/10/2021 a las 23:59 h.

Considere una partícula de masa m que se mueve en un campo de fuerza de atracción de magnitud constante ($F_o$) hacia un cierto punto O.

a) En base a un diagrama del potencial efectivo $V^*(\rho)$ asociado a este campo de fuerza de atracción argumente por qué bajo ninguna condición la partícula se puede escapar de él.

b) Suponga que la partícula se mueve en una órbita circular de radio R. Determine cuál es su rapidez.

c) Si estando la partícula en la condición indicada en el punto b) experimenta una pequeña perturbación en dirección radial, determine el periodo de las pequeñas oscilaciones resultantes en la distancia radial alrededor de la distancia R correspondiente a la órbita circular.

d) Si estando la partícula en la condición indicada en el punto b) su rapidez aumenta abruptamente al doble, determine la máxima distancia que la partícula se aleja del punto de atracción.

e) Utilizando el principio de conservación del momentum angular determine cual es la rapidez de la partícula en el punto de máximo alejamiento.

# Pauta Tarea 3

## Fuerza constante

**Profesor: Patricio Aceituno**
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

**a.-** (1.0 pts)

La fuerza del problema es una fuerza central, por la que la podemos expresar como el gradiente de un potencial,

$$\vec{F} = -\nabla V \Leftrightarrow -F_0\hat{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$
$$\Rightarrow V = \int F_0 d\rho = F_0\rho + c,$$

con $c$ una constante y como tratamos con un potencial la podemos definir como 0, por lo tanto, el potencial efectivo está dado por:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{l^2}{2m\rho^2} = F_0\rho + \frac{l^2}{2m\rho^2}, \quad (+0.5 \text{ pts})$$

con $l$ el momentum angular que es constante al ser una fuerza central. El gráfico de este potencial se ve como:

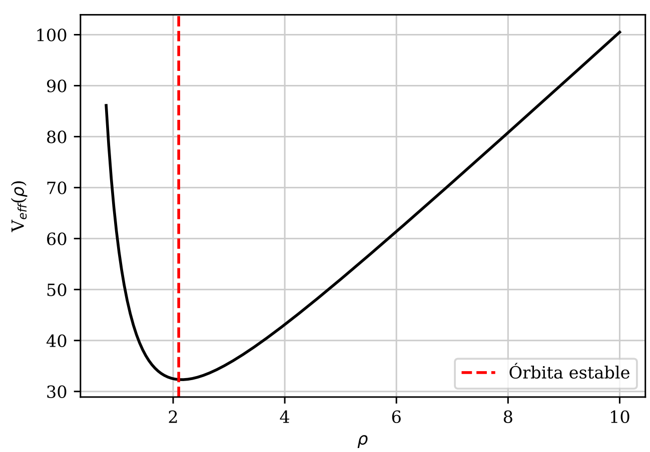


Figura 1: Potencial efectivo considerando $m = 1$ y $l = F_0 = 10$.

Como se observa, el potencial no está acotado superiormente (incluso explota para $\rho = 0$), por lo que no importa la velocidad inicial que le demos a la masa, nunca podrá escapar del potencial (no hay energía mecánica que sea mayor a cualquier valor de la energía potencial) (+0.5 pts), esto matemáticamente se tiene calculando la primera derivada de este potencial,

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \rho} = F_0 - \frac{l^2}{m\rho^3},$$

que es siempre positivo para $\rho$ grande (específicamente mayor al radio de la órbita estable), por lo que es monotónicamente creciente.

$\boxed{\textbf{b.-}}$ (1.0 pts)

Escribimos la ecuación de movimiento vectorial,

$$m\left((\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\phi)\hat{\phi}\right) = -F_0\hat{\rho},$$

donde comprobamos que se conserva el momentum angular, ya que no hay fuerzas en $\hat{\phi}$. La ecuación escalar de $\hat{\rho}$ es:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -F_0, \tag{1}$$

sabemos que para la órbita circular $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0$ (+0.5 pts), entonces,

$$-mR\dot{\phi}_0^2 = -\frac{m{v_0}^2}{R} = -F_0$$
$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{RF_0}{m}}, \quad \text{(+0.5 pts)}$$

donde usamos que $\rho\dot{\phi} = v$.

$\boxed{\textbf{c.-}}$ (1.0 pts)

Sabemos por clases que la frecuencia angular para pequeñas oscilaciones se calcula como:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(R)}{m}} = \frac{l\sqrt{3}}{mR^2},$$

para calcular el momentum angular usamos que en esta órbita circular el potencial efectivo es mínimo,

$$\Rightarrow \frac{\partial V_{\text{eff}}(R)}{\partial \rho} = F_0 - \frac{l^2}{mR^3} = 0$$
$$\Rightarrow l^2 = mF_0R^2 \quad \text{(+0.5 pts)}$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3F_0}{mR}}, \quad \text{(+0.3 pts)}$$

y el periodo se calcula como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{3F_0}} \quad \text{(+0.2 pts)}$$

**d.-** (2.0 pts)

Luego del cambio de velocidad, el nuevo momentum angular se sigue conservando, ya que sigue sin haber fuerzas en $\hat{\phi}$,

$$m\rho^2\dot{\phi} = mR \cdot 2v_0 \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{4F_0R^3}{m\rho^4}, \quad (+0.5 \text{ pts})$$

reemplazando en la ecuación escalar de $\hat{\rho}$, ecuación (1), y ocupando trucazo de mecánica para integrar con respecto a la posición,

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - \frac{4F_0R^3}{\rho^3} &= -F_0 \\ \Rightarrow m\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}_f} \dot{\rho}d\dot{\rho} &= 4F_0R^3\int_{\rho_0}^{\rho_f}\frac{d\rho}{\rho^3} - F_0\int_{\rho_0}^{\rho_f} d\rho, \quad (+0.5 \text{ pts}) \end{aligned}$$

para los límites de integración consideramos que parte con velocidad radial nula, ya que se duplica la velocidad **tangencial**, y termina con velocidad radial también nula, debido a que alcanza la máxima distancia. Con respecto a las posiciones: la partícula parte en $R$ y termina en la distancia que queremos calcular $\rho_f$ (+0.5 pts), con esto integramos y despejamos $\rho_f$:

$$\begin{aligned} 0 &= -2F_0R^3\left(\frac{1}{{\rho_f}^2} - \frac{1}{R^2}\right) - F_0\rho_f + F_0R \\ \rho_f - R &= 2R\left(\frac{{\rho_f}^2 - R^2}{{\rho_f}^2}\right) \\ {\rho_f}^2 - 2R\rho_f - 2R^2 &= 0 \\ \Rightarrow \rho_f = R \pm R\sqrt{3} &\Rightarrow \rho_f = R(1+\sqrt{3}). \quad (+0.5 \text{ pts}) \end{aligned}$$

**e.-** (1.0 pts)

Usamos que se conserva el momentum angular, que se expresa como $l = m\rho^2\dot{\phi}$,

$$\begin{aligned} {\rho_0}^2\dot{\phi}_0 &= {\rho_f}^2\dot{\phi}_f \quad (+0.5 \text{ pts}) \\ R2v_0 &= R(1+\sqrt{3})v_f \\ v_f = \frac{2v_0}{1+\sqrt{3}} &= \frac{2}{1+\sqrt{3}}\sqrt{\frac{RF_0}{m}} \quad (+0.5 \text{ pts}) \end{aligned}$$