

Tarea 2

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: Fernando Lobos

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el miércoles 23 de agosto a las 23:59

Pregunta 1

Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangiano que caracteriza este sistema depende explícitamente del grado de libertad y sus primeras n derivadas temporales, es decir:

$$L = L(q, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}), \quad \text{donde } q^{(i)} \equiv \frac{d^i q}{dt^i} \quad (1)$$

y $\{\lambda\}$ un conjunto de parámetros (constantes conocidas). Obtenga la ecuación de movimiento **minimizando la acción**.

Pregunta 2

Considere el Lagrangiano asociado a una partícula moviéndose en un campo electromagnético (o sea en presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B})

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (2)$$

donde m es la masa de la partícula, \mathbf{v} su velocidad, q su carga eléctrica, $\phi(t, \mathbf{x})$ el potencial escalar y $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ el potencial vector.

a) Muestre que las ecuaciones de Euler-Lagrange son consistentes con la fuerza de Lorentz

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

b) Considere una transformación de gauge para el potencial escalar y el potencial vector de la forma

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\psi(t, \mathbf{x})}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi(t, \mathbf{x}). \quad (4)$$

Estudie qué ocurre con el Lagrangiano L' que consiste en el Lagrangiano (2) pero utilizando las transformaciones de gauge (4). ¿Cómo serían las ecuaciones de movimiento?

Pregunta 3

Considere la siguiente órbita de un cuerpo celeste:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta).$$

Utilizando la ecuación de Binet responda:

- a) Obtenga la expresión de la fuerza central a la que está expuesto el cuerpo celeste
- b) Encuentre el Lagrangiano del sistema y derive las ecuaciones de movimiento
- c) Encuentre **todas** las cantidades conservadas asociadas