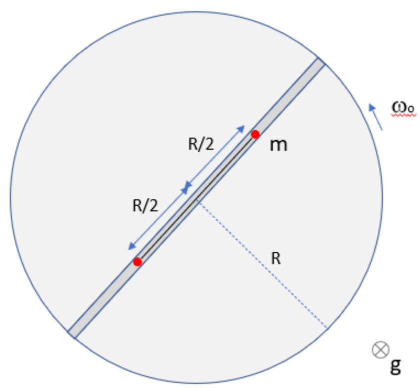
Mecánica (FI2001) **TAREA 2** Semestre: Primavera 2021

Prof.: Patricio Aceituno

Plazo máximo de entrega: domingo 04/10/2021 a las 12:00 h.

Considere una plataforma horizontal de forma circular (radio R) que gira con velocidad angular constante ω_o respecto de un eje vertical que pasa por su centro. En un canal, que cruza diametralmente la plataforma, se encuentran dos partículas de masa m, en equilibrio inestable relativo a la plataforma, unidas entre sí por una cuerda de largo L = R, de modo que cada partícula está a una distancia R/2 del centro de la plataforma. Considere que el roce entre las dos partículas con la base y las paredes del canal es nulo.

a) Determine la tensión de la cuerda en esa condición.



En un cierto instante, y debido a una pequeña perturbación, una de las partículas comienza a alejarse del centro de la plataforma, arrastrando a la otra en su movimiento. Determine:

b) Rapidez absoluta de las dos partículas una vez que la partícula que se aleja del centro de la plataforma llega al borde de ella.

c) Fuerza que la pared del canal ejerce sobre la partícula que se aleja del centro de la plataforma en función de su distancia ρ al centro de ella.

d) Tensión de la cuerda en el instante en que la partícula que se aleja del centro de la plataforma llega al borde de ella.

Pauta Tarea 2

Disco giratorio

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

$\boxed{\textbf{a.-}}$ (1.5 pts)

Definimos dos sistemas de coordenadas cilíndricas con origen en el centro del disco (con el vector $\hat{k}$ apuntando saliendo de la página) y cada vector $\hat{\rho}_i$ apuntando a cada masa,

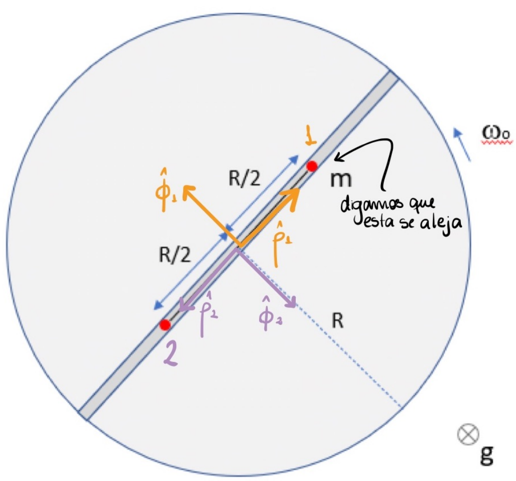


Figura 1: Caption

por lo que las ecuaciones de movimiento serían:

$$m((\ddot{\rho}_1 - \rho_1\dot{\phi}_1^2)\hat{\rho}_1 + (2\dot{\rho}_1\dot{\phi}_1 + \rho_1\ddot{\phi}_1)\hat{\phi}_1 + \ddot{z}_1\hat{k}) = -T\hat{\rho}_1 + N_{1\phi}\hat{\phi}_1 - mg\hat{k} + N_{1z}\hat{k}; \tag{1}$$
$$m((\ddot{\rho}_2 - \rho_2\dot{\phi}_2^2)\hat{\rho}_2 + (2\dot{\rho}_2\dot{\phi}_2 + \rho_2\ddot{\phi}_2)\hat{\phi}_2 + \ddot{z}_2\hat{k}) = -T\hat{\rho}_2 + N_{2\phi}\hat{\phi}_2 - mg\hat{k} + N_{2z}\hat{k}, \tag{2}$$

donde $\hat{\rho}_1 = -\hat{\rho}_2$, $\hat{\phi}_1 = -\hat{\phi}_2$, $\dot{\phi}_i = \omega_0$ y $mg = N_{1z} = N_{2z}$.

En un inicio las partículas están girando sin movimiento en el eje $\hat{\rho}$, por lo que $\dot{\rho}_i = \ddot{\rho}_i = 0$ y $\rho_i = R/2$, así que de las componentes del eje $\hat{\rho}$ de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que,

$$m(\cancelto{0}{\ddot{\rho}_i} - \rho_i\dot{\phi}_i^2) = -T$$
$$\Leftrightarrow T = \frac{mR{\omega_0}^2}{2}$$

b.- (2.5 pts)

La posición de las masas están relacionadas una con la otra, ya que $\rho_1 + \rho_2 = R$ en todo el movimiento (la cuerda no se estira ni se contrae), por lo que derivando obtenemos:

$$\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2 \ \wedge \ \ddot{\rho}_1 = -\ddot{\rho}_2, \tag{3}$$

y por las componentes de los ejes $\hat{\rho}_i$ de (1) y (2) tenemos:

$$m(\ddot{\rho}_1 - \rho_1{\omega_0}^2) = -T \ \wedge \ m(\ddot{\rho}_2 - \rho_2{\omega_0}^2) = -T,$$

como ambas están igualadas a la misma tensión, podemos igualarlas,

$$\ddot{\rho}_1 - \rho_1{\omega_0}^2 = \ddot{\rho}_2 - \rho_2{\omega_0}^2,$$

reemplazando la expresión de ρ_2 y $\ddot{\rho}_2$ de (3),

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ddot{\rho}_1 - \rho_1{\omega_0}^2 &= -\ddot{\rho}_1 - (R - \rho_1){\omega_0}^2 \\
\Leftrightarrow \ddot{\rho}_1 &= \rho_1{\omega_0}^2 - \frac{R}{2}{\omega_0}^2 \\
\Leftrightarrow \dot{\rho}_1\frac{d\dot{\rho}_1}{d\rho_1} &= \rho_1{\omega_0}^2 - \frac{R}{2}{\omega_0}^2
\end{aligned} \tag{4}$$

donde aplicamos *trucazo de mecánica*. Integramos desde la posición inicial de la masa 1, $R/2$, hasta una posición cualquiera, considerando que comenzó a moverse con velocidad inicial 0, ya que se le da una pequeña perturbación, o sea, una velocidad inicial tan pequeña que se puede considerar como nula, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\dot{\rho}_1} \dot{\rho}_1 d\dot{\rho}_1 &= {\omega_0}^2 \int_{R/2}^{\rho_1} \rho_1 d\rho_1 - \frac{R}{2}{\omega_0}^2 \int_{R/2}^{\rho_1} d\rho_1 \\
\Rightarrow \dot{\rho}_1^2 &= {\omega_0}^2 \left({\rho_1}^2 - \frac{R^2}{4}\right) - R{\omega_0}^2\left(\rho_1 - \frac{R}{2}\right).
\end{aligned}$$

Obtuvimos la velocidad de la partícula 1 en función de su posición, así que para calcular la velocidad cuando esta masa llega al borde, $\rho_1 = R$, evaluamos,

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_1^2(\rho_1 = R) &= {\omega_0}^2\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) - R{\omega_0}^2\left(R - \frac{R}{2}\right) \\
\Leftrightarrow \dot{\rho}_1(\rho_1 = R) &= \frac{\omega_0 R}{2},
\end{aligned}$$

por lo que la velocidad radial de la otra masa es:

$$\dot{\rho}_2(\rho_1 = R) = -\frac{\omega_0 R}{2}.$$

La rapidez absoluta se calcula como la magnitud de la velocidad, en este caso nos piden esta rapidez cuando $\rho_1 = R \Rightarrow \rho_2 = 0$,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2},$$

nos queda:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_1\| &= \sqrt{\left(\frac{\omega_0 R}{2}\right)^2 + (R\omega_0)^2} \\ &= \frac{\omega_0 R}{2}\sqrt{5},\end{aligned}$$

y

$$\|\vec{v}_2\| = \frac{\omega_0 R}{2}.$$

$\boxed{\textbf{c.-}}$ (1.0 pts)

Para calcular la fuerza que ejerce la pared sobre la partícula que se aleja, usamos la ecuación (1) y la expresión de la velocidad radial de la masa 1, además considerando que la aceleración angular es 0,

$$\begin{aligned}N_{1\phi} &= m(2\dot{\rho}_1\omega_0 + \cancelto{0}{\rho_1\ddot{\phi}_1}) \\ &= 2m\dot{\rho}_1\omega_0 \\ &= 2m{\omega_0}^2\sqrt{{\rho_1}^2 - R\rho_1 + \frac{R^2}{4}}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{d.-}}$ (1.0 pts)

Tomamos la expresión de la tensión de la ecuación (1) y utilizamos la expresión de la aceleración radial de la ecuación (4),

$$\begin{aligned}T &= -m(\ddot{\rho}_1 - \rho_1{\omega_0}^2) \\ &= -m\left(\cancel{\rho_1{\omega_0}^2} - \frac{R}{2}{\omega_0}^2 - \cancel{\rho_1{\omega_0}^2}\right) \\ &= \frac{mR{\omega_0}^2}{2},\end{aligned}$$

con lo que obtenemos que la tensión es constante en todo el movimiento, en específico, vale $mR{\omega_0}^2/2$ cuando la partícula que se aleja del centro de la plataforma llega al borde.