Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3111 Mecánica Clásica, Primavera 2023
Tarea 1

Entrega: Miércoles 16 de agosto de 2023 a las 23:59

1. Considere el péndulo esférico visto en clase, descrito por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgl(1-\cos\theta)$$

   a) Usando la conservación del momento angular, reduzca el problema al de una partícula ficticia, descrita por $\theta(t)$ que se mueve bajo la influencia de un potencia $V(\theta)$. Elija valores para los parámetros del problema y, usando su software favorito, grafique $V(\theta)$.

   b) Muestre que $\theta(t) = \theta_0$, una constante, es una solución posible. Considere trayectorias con $\theta(t) = \theta_0 + \epsilon(t), \epsilon \ll \theta_0$. Muestre que se trata de un movimiento armónico simple y encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones. Las trayectorias correspondientes: ¿Son órbitas cerradas?

2. Considere una escalera de largo L y masa M que tiene la base apoyada contra un suelo liso (sin roce) y la punta apoyada contra una pared vertical, con la cual tampoco tiene roce. Inicialmente está en reposo, formando un ángulo θ_0 con el suelo. Interesa el movimiento posterior, así como las fuerza de ligazón.

   a) Use las coordenadas del centro de masa (x, z) de la escalera, así como el ángulo θ que forma con el suelo. Se pide el Lagrangiano del sistema, así como las ecuaciones para las ligazones que pueda haber.

   b) Derive las ecuaciones de movimiento usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

   c) Para la evolución del ángulo $\theta(t)$, encuentre una fórmula para $t = t(\theta)$, que puede involucrar integrales que no es necesario evaluar.

   d) ¿Cuál es el valor del ángulo θ cuando la escalera se despega de la muralla. ¿A qué altura está el extremo superior cuando esto ocurre?

   e) Cuáles son las ecuaciones de movimiento después que la escalera pierde contacto con la muralla.

   f) Muestre que la escalera nunca pierde contacto con el suelo. (Suponga que no hay rebote cuando $\theta = 0$).

Tarea 1

P1

a) Debido a isotropía (el Lagrangiano no depende de ϕ) se tiene que

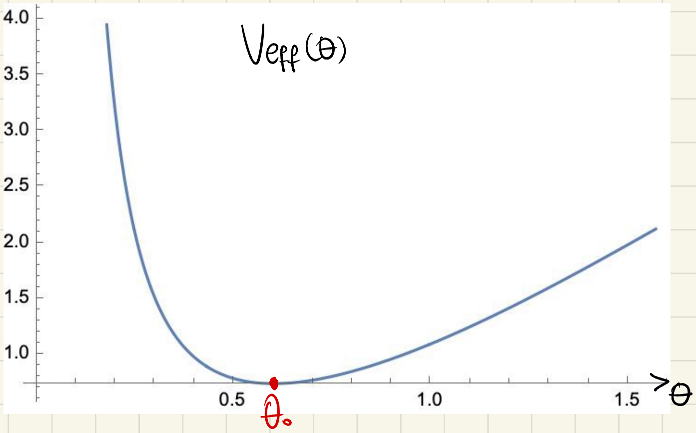
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m\ell^2 \sin^2\theta\,\dot\phi \quad \text{constante}$$

Del lagrangiano identificamos la energía cinética y potencial, por lo que la energía mecánica (que se conserva, ya que L no depende explícitamente del tiempo) es

$$E = \frac{1}{2} m\ell^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2) + mgl(1-\cos\theta) \text{, reemplazando con } p_\phi$$

$$= \frac{1}{2} m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} + mgl(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2} m\ell^2\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta)$$



b) Ahora calculemos la EoM asociada a θ

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2 - mgl\sin\theta$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m\ell^2\dot\theta \Rightarrow m\ell^2\ddot\theta - m\ell^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2 + mgl\cos\theta$

reemplazando $\dot\phi$

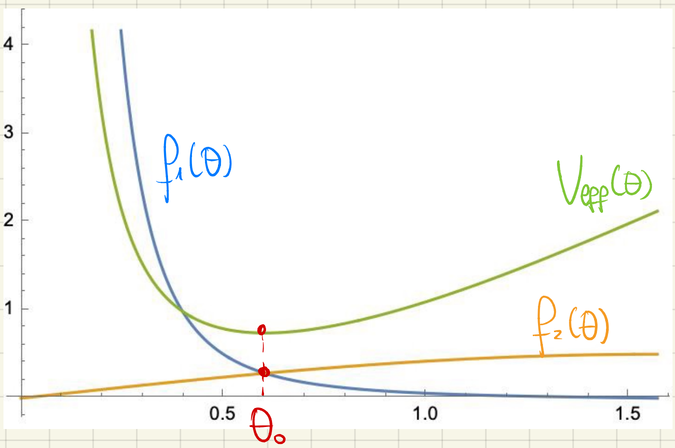
$$\boxed{\ddot\theta - \frac{p_\phi^2}{m^2\ell^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0} \quad (1)$$

Reemplacemos con $\theta = \theta_0$ constante ($\ddot\theta_0 = 0$)

$$\Rightarrow \frac{p_\phi^2}{m^2\ell^4}\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} = \frac{g}{\ell}\sin\theta_0 \quad (2)$$

donde no es obvio que $\exists\,\theta_0$ t.q. se cumpla (2), definamos

$$f_1(\theta_0) \equiv \frac{p_\phi^2}{m^2\ell^4}\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} \quad \wedge \quad f_2(\theta_0) \equiv \frac{g}{\ell}\sin\theta_0$$



graficando notamos que si $\exists$ tal θ_0 y que además es el mínimo global de $V_{eff}(\theta)$

Ahora perturbaremos el sistema en torno a su equilibrio estable haciendo

$$\theta(t) = \theta_\circ + \epsilon(t) \;, \quad \text{donde } |\epsilon(t)| \ll \theta_\circ \;\; \forall t$$

reemplazamos en (1)

$$\ddot{\epsilon} - \frac{p_\phi^2}{m^2 \ell^4} \frac{\cos(\theta_\circ + \epsilon)}{\sin^3(\theta_\circ + \epsilon)} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta_\circ + \epsilon) = 0 \quad (3)$$

donde por (2) tenemos que $p_\phi^2 / m^2 \ell^4 = g \sin^4\theta_\circ / \ell \cos\theta_\circ$, expandimos en Taylor (3)

▷ $$\frac{\cos(\theta_\circ + \epsilon)}{\sin^3(\theta_\circ + \epsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\cos(\theta_\circ + \epsilon)}{\sin^3(\theta_\circ + \epsilon)} \right]^{(n)}_{\epsilon = 0} \epsilon^n \approx \frac{\cos\theta_\circ}{\sin^3\theta_\circ} + \left(\frac{2\sin^2\theta_\circ - 3}{\sin^4\theta_\circ} \right) \epsilon$$

▷ $$\sin(\theta_\circ + \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin^{(n)}(\theta_\circ + \epsilon) \Big|_{\epsilon = 0} \epsilon^n \approx \sin\theta_\circ + \cos\theta_\circ \cdot \epsilon$$

$$\Rightarrow \ddot{\epsilon} - \frac{g}{\ell} \frac{\sin^4\theta_\circ}{\cos\theta_\circ} \left[\frac{\cos\theta_\circ}{\sin^3\theta_\circ} + \left(\frac{2\sin^2\theta_\circ - 3}{\sin^4\theta_\circ} \right) \epsilon \right] + \frac{g}{\ell} \left(\sin\theta_\circ + \cos\theta_\circ \epsilon \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\epsilon} - \cancel{\frac{g}{\ell} \sin\theta_\circ} + \frac{g}{\ell} \frac{(3 - 2\sin^2\theta_\circ)}{\cos\theta_\circ} + \cancel{\frac{g}{\ell} \sin\theta_\circ} + \frac{g}{\ell} \cos\theta_\circ \epsilon = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\epsilon} + \frac{g}{\ell} \frac{(4 - 3\sin^2\theta_\circ)}{\cos\theta_\circ} \epsilon = 0$$

donde identificamos la forma del M.A.S. con frecuencia angular de oscilación

$$\boxed{\omega_\circ^2 = \frac{g}{\ell} \frac{(4 - 3\sin^2\theta_\circ)}{\cos\theta_\circ}}$$

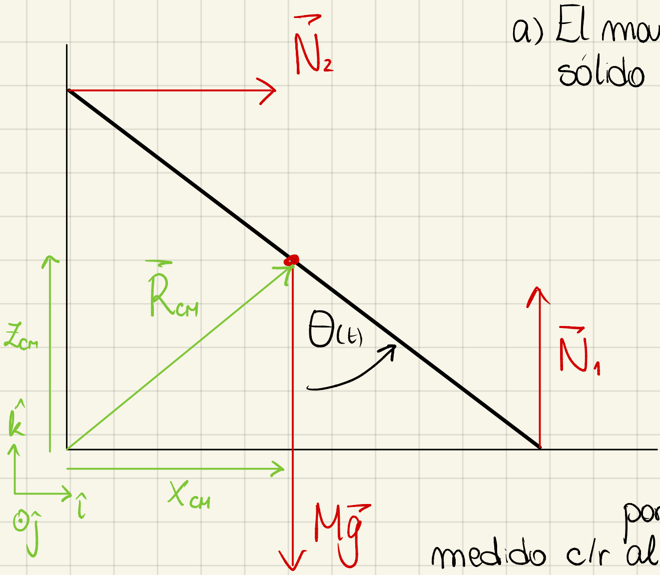
Para ver si las órbitas son cerradas debemos encontrar una razón entre la velocidad angular $\dot{\phi}$ y la frecuencia de oscilación $\omega_\circ$ (para que haya sincronización entre los movimientos)

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m \ell^2 \sin^2\theta} = \sqrt{\frac{g}{\ell} \frac{\sin^4\theta_\circ}{\cos\theta_\circ}} \frac{1}{\sin^2\theta} \approx \sqrt{\frac{g}{\ell} \frac{1}{\cos\theta_\circ}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\omega_\circ} = \sqrt{\frac{g}{\ell} \frac{1}{\cos\theta_\circ}} \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{\cos\theta_\circ}{(4 - 3\sin^2\theta_\circ)}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 3\sin^2\theta_\circ}} \overset{!}{\in} \mathbb{Q}$$

donde notamos que $\dot{\phi}/\omega_\circ$ pertenece a los racionales por ejemplo para $\theta_\circ = 0 \Rightarrow 1/2$, $\theta_\circ = \pi/2 \Rightarrow 1$.

P2



a) El movimiento se da únicamente en el plano $x-z$ y como es un sólido rígido su energía cinética tiene dos contribuciones

$$K = K_{CM} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{CM} \vec{\Omega}$$

como la escalera rota solo en $\hat{\jmath}$ y en la dirección negativa

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que solo nos importa la componente I_{yy} del tensor de inercia medido c/r al CM. Por Wikipedia sabemos que

$$I_{zz} = \frac{1}{12} M L^2$$

La contribución K_{CM} es simplemente

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 \quad , \text{ donde } \vec{R}_{CM} = x\hat{\imath} + z\hat{\jmath} \Rightarrow |\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$$

así que la energía cinética sería

$$K = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{24} M L^2 \dot{\theta}^2$$

La única contribución a la energía potencial es la gravitatoria (c/r al CM)

$$U = Mgz$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{24} M L^2 \dot{\theta}^2 - Mgz$$

La restricción es que θ está relacionado con x y z como

$$\cos\theta = \frac{z}{L/2} \quad \wedge \quad \sin\theta = \frac{L\sin\theta - x}{L/2} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2x}{L}$$

entonces definimos las funciones

$$f_1 = L\cos\theta - 2z \quad \wedge \quad f_2 = L\sin\theta - 2x$$

Las ecs. de mov. están dadas por $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_i}$

derivemos:

▷ $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$ ▷ $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2$ $\Rightarrow M\ddot{x} = -2\lambda_2$ (1)

▷ $\frac{\partial L}{\partial z} = -Mg$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}$ ▷ $\frac{\partial f_1}{\partial z} = -2$ $\Rightarrow M\ddot{z} + Mg = -2\lambda_1$ (2)

▷ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{12}ML^2\dot{\theta}$ ▷ $\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -L\sin\theta$ ▷ $\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = L\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} = -\lambda_1 L\sin\theta + \lambda_2 L\cos\theta \quad (3)$$

Ahora reemplazamos en todos los "EoMs" las condiciones $L\cos\theta = 2z \wedge L\sin\theta = 2x$

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}$$

$$z = \frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{z} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{L}{2}M\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}M\cos\theta\ddot{\theta} = -2\lambda_2 \Rightarrow \boxed{N_2 = \lambda_2 = \frac{LM}{4}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{LM}{4}\cos\theta\ddot{\theta}} \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{L}{2}M\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}M\sin\theta\ddot{\theta} + Mg = -2\lambda_1 \Rightarrow \boxed{N_1 = \lambda_1 = \frac{LM}{4}\cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{LM}{4}\sin\theta\ddot{\theta} - \frac{Mg}{2}} \quad (5)$$

reemplazando en (3)

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = \cancel{-\frac{ML^2}{4}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2} - \frac{ML^2}{4}\sin^2\theta\ddot{\theta} + \frac{MLg}{2}\sin\theta + \cancel{\frac{ML^2}{4}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2} - \frac{ML^2}{4}\cos^2\theta\ddot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{ML^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{MLg}{2}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$ Ecuación de movimiento

podemos integrar una vez esta EDO con trucazo de mecánica

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta \quad / \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{3g}{2L}\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta\, d\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{3g}{2L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

y podemos reemplazar estas expresiones de $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}$ en (4) y (5) y conseguimos las expresiones de las normales $\forall \theta$

$$N_1(\theta) = \frac{LM}{4}\cos\theta\left(-\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right) + \frac{LM}{4}\sin\theta\left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\right) - \frac{Mg}{2} \quad (6)$$

$$N_2(\theta) = \frac{LM}{4}\sin\theta\left(-\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right) - \frac{LM}{4}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\right) \quad (7)$$

c) Usando la EDO de $\dot{\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{-\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left(-3g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)/L\right)^{1/2}}$$

d) Necesitamos encontrar dónde (7) es 0

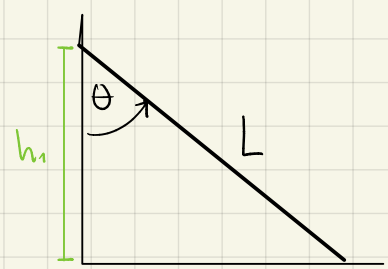
$$N_2(\theta^*) = -\frac{3Mg}{4}\cos\theta^*\sin\theta^* + \frac{3Mg}{4}\cos\theta_0\sin\theta^* - \frac{3Mg}{8}\cos\theta^*\sin\theta^*$$

$$= -\frac{9Mg}{8}\cos\theta^*\sin\theta^* + \frac{3Mg}{4}\cos\theta_0\sin\theta^* \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta^*\left(-\frac{3}{2}\cos\theta^* + \cos\theta_0\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \cos\theta^* = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$

y como tenemos la relación $\cos\theta = h_1/L$

$$\Rightarrow h_1(\theta^*) = L\cos\theta^* = \frac{2L}{3}\cos\theta_0$$



e) Cuando la escalera pierde el contacto con el muro ya no tenemos la restricción f_2

$$\Rightarrow M\ddot{x} = 0 \quad \wedge \quad M\ddot{z} + Mg = -2\lambda_1 \quad \wedge \quad \frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} = -\lambda_1 L\sin\theta$$

por lo que obtenemos lo mismo de antes pero considerando $\lambda_2 = 0$

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{ML^2}{4}\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{ML^2}{4}\sin^2\theta\,\ddot{\theta} + \frac{MLg}{2}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}\left(\frac{1}{6}+\frac{\sin^2\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta \quad (*)$$

ojo que la EoM cambia cuando se despega de la pared vertical

y la normal que ejerce el piso sigue siendo la misma

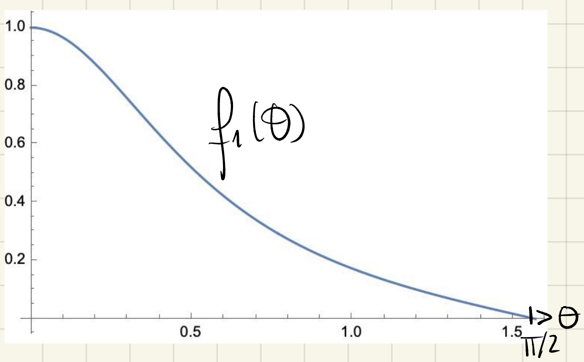
$$N_1 = \lambda_1 = \frac{LM}{4}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{LM}{4}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{Mg}{2}$$

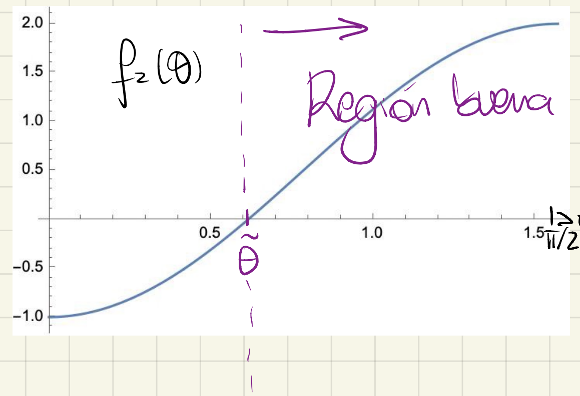
$$(*) \Rightarrow \; = \frac{LM}{4}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{LM}{4}\sin\theta\left[\frac{6}{1+3\sin^2\theta}\left[-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta\right]\right] - \frac{Mg}{2}$$

$$= \frac{LM}{4}\left[\cos\theta - \frac{3}{1+3\sin^2\theta}\cos\theta\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 + \frac{Mg}{2}\left(3\sin^2\theta - 1\right)$$

donde $\dot{\theta}^2 > 0 \;\forall t$ así que analizamos los otros componentes, definamos

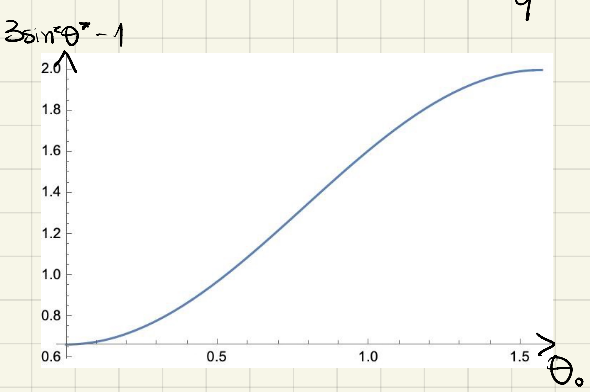
$$f_1(\theta) \equiv \cos\theta - \frac{3}{1+3\sin^2\theta}\cos\theta\sin^2\theta \qquad\qquad f_2(\theta) = 3\sin^2\theta - 1$$





donde vemos que $\forall\theta\in[0,\pi/2]$ $f_1(\theta)>0$ mientras que $f_2(\theta)>0$ a partir de un $\tilde{\theta}$, notemos que usando la condición de despegue $\cos\theta^* = 2/3\cdot\cos\theta_0$

$$\cos^2\theta^* = \frac{4}{9}\cos^2\theta_0 \Leftrightarrow 3\sin^2\theta^* - 1 = -\frac{4}{3}\cos^2\theta_0 + 2$$



donde gráficamente vemos que $\forall\theta_0\in[0,\pi/2]$ (el ángulo inicial de la escalera) $3\sin^2\theta^* - 1 > 0$

de la pared vertical

$\therefore$ Como $\theta\in[\theta^*,\pi/2]$, desde el momento de despegue ya nos encontramos en la zona buena, así que todos los términos son positivos $\Rightarrow N>0 \;\forall\theta\in[\theta^*,\pi/2]$ así que la escalera nunca se separa del suelo!