MECÁNICA (FI 2001-2) **TAREA 1** Fecha: 13 marzo 2022

Prof. P. Aceituno

Profesores auxiliares: Edgardo Rosas, Javier Huenupi

Plazo de entrega: domingo 20 de marzo, 23.59 h

Problema 1

Considere una partícula que se mueve en un plano horizontal con respecto a un sistema de referencia cartesiano caracterizado por los vectores unitarios **i** en la dirección x y **j** en la dirección y. En todo momento la aceleración de la partícula se mantiene constante **a** = - a_o **i**, donde a_o es una constante positiva.

La partícula se lanza desde el origen del sistema de coordenadas con velocidad **v** = v_o **i** + v_o **j.** Determine:

a) El tiempo que transcurre hasta que el vector velocidad de la partícula es paralelo al eje y
b) El radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en ese instante
c) La máxima distancia que la partícula alcanza del eje y
d) La distancia de la partícula al origen del sistema de coordenadas en el momento en que cruza el eje y

Problema 2

Considere una partícula que se desplaza en un plano siguiendo una trayectoria definida por la expresión siguiente en un sistema de referencia polar:

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\theta}$$

La partícula se mueve desde el punto inicial $\rho = \rho_0$; $\theta = 0$, manteniendo una rapidez angular constante positiva ($d\theta/dt = \omega_0$). Determine:

a) Una expresión para el vector velocidad de la partícula en función del tiempo
b) Una expresión para el vector aceleración de la partícula en función del tiempo.
c) Rapidez de la partícula en la la posición cuando $\theta = \pi/2$
d) Componente de la aceleración a lo largo de la trayectoria en la posición cuando $\theta = \pi/2$
e) Componente de la aceleración en dirección perpendicular a la trayectoria en la posición cuando $\theta = \pi/2$.

Tarea 1

P1

a) Primero buscamos encontrar la posición en el plano para todo tiempo.

Tenemos que $\forall t$, $\bar{a} = -a_0 \hat{\imath} = \overset{\text{nos indica que va frenando}}{\underbrace{-a_0 \hat{\imath}}} + 0\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow a_x = -a_0 \quad / \int dt$$

$$\Rightarrow \int d\dot{x} = -a_0 \int dt$$

$$\dot{x}(t) = -a_0 t + C_1$$

Por C.I. sabemos que en $t=0$, $\dot{x}(t=0) = v_0 \Rightarrow v_0 = -a_0 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -a_0 t + v_0 \quad / \int dt$$

$$\int dx = -a_0 \int t\,dt + v_0 \int dt$$

$$x(t) = -\frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + C_2$$

También por condiciones iniciales sabemos que el movimiento parte en el origen

$$\Rightarrow x(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{a_0}{2} 0^2 + v_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t - \frac{a_0}{2} t^2$$ (les parece conocida?)

Ahora, para el eje y tenemos, $a_y = 0 \Rightarrow \ddot{y}(t) = 0 \quad / \int dt$

$$\int d\dot{y} = 0$$

$$\dot{y}(t) = C_3$$

Por C.I., $\dot{y}(t=0) = v_0 \Rightarrow C_3 = v_0 \Rightarrow \dot{y}(t) = v_0 \quad / \int dt$

$$\int dy = v_0 \int dt$$

$$y(t) = v_0 t + C_4$$

Por C.I., $y(t=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow y(t) = v_0 t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \left(v_0 t - \frac{a_0}{2} t^2\right)\hat{\imath} + v_0 t \hat{\jmath}$$

Ahora vamos a las preguntas como tal. Para que la velocidad sea paralela al eje y, no debe tener componente en el eje x

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \overbrace{(v_0 - a_0 t)}^{\text{anulemos esto}}\hat{\imath} + v_0 \hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow v_0 - a_0 t_f \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t_f = \frac{v_0}{a_0}$$

b) Usamos la fórmula $\rho = \dfrac{v^3}{\|\vec{a}\times\vec{v}\|}$

donde $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(v_0 - a_0 t)^2 + v_0^2}$ y $\vec{a} = -a_0\hat{\imath}$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{v}\| = \| -a_0\hat{\imath} \times [(v_0 - a_0 t)\hat{\imath} + v_0\hat{\jmath}]\|$$

$$= \| -a_0 v_0 \hat{k}\| = a_0 v_0$$

Así que en $t_f = v_0/a_0$; $\rho(t=t_f) = \dfrac{v_0^3}{a_0 v_0} = \dfrac{v_0^2}{a_0}$

c) La distancia máxima al eje y se da cuando la partícula no avanza más en el eje x, o sea cuando $\dot{x}=0$, que sabemos que se da en $t = v_0/a_0$

$$\Rightarrow X(t=t_f) = v_0 t_f - \frac{a_0}{2} t_f^2 = \frac{v_0^2}{a_0} - \frac{a_0}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2} = \frac{v_0^2}{2a_0}$$

d) Cruza el eje y cuando $x=0$, imponemos esto

$$v_0 t_2 - \frac{a_0}{2}t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2\left(v_0 - \frac{a_0 t_2}{2}\right) = 0$$

instante inicial $\Rightarrow t_{2,1} = 0 \ \wedge \ t_{2,2} = \dfrac{2v_0}{a_0}$ tomemos este

Evaluemos este tiempo en $y(t) \Rightarrow y(t=t_2) = \dfrac{2v_0^2}{a_0}$ y como $x=0 \Rightarrow$ la distancia al origen es $\dfrac{2v_0^2}{a_0}$

P2

a) Sabemos que $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0 \Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t + C_1$, por C.I., $C_1 = 0 \Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \vec{r}(t) = \rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\rho}$$

para la velocidad derivamos $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -\omega_0\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\rho} + \rho_0 e^{-\omega_0 t}\dfrac{d}{dt}\hat{\rho}$

$$= -\omega_0\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\rho} + \omega_0\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\theta}$$

b) Para la aceleración derivamos nuevamente

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_0^2 \cancel{\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\rho}} - \omega_0^2\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\theta} - \omega_0^2\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\theta} - \cancel{\omega_0^2\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\rho}}$$

$$= -2\omega_0^2\rho_0 e^{-\omega_0 t}\hat{\theta}$$

c) $\|\vec{v}\| = \sqrt{\omega_0^2\rho_0^2 e^{-2\omega_0 t} + \omega_0^2\rho_0^2 e^{-2\omega_0 t}} = \sqrt{2}\,\omega_0\rho_0 e^{-\omega_0 t} = \sqrt{2}\,\omega_0\rho_0 e^{-\theta}$, evaluando

$$\Rightarrow \|\vec{v}(\theta=\pi/2)\| = \sqrt{2}\,\omega_0\rho_0 e^{-\frac{\pi}{2}}$$

d) $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dot{v}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$

donde $\dot{v} = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\,\omega_0 \rho_0 e^{-\omega_0 t}\right) = -\sqrt{2}\,\omega_0^2 \rho_0 e^{-\omega_0 t} = -\sqrt{2}\,\omega_0^2 \rho_0 e^{-\theta}$, evaluando

$$\Rightarrow a_t = \sqrt{2}\,\omega_0^2 \rho_0 e^{-\pi/2}$$

e) Para calcular a_n usamos pitágoras $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$$\Leftrightarrow 4\omega_0^4 \rho_0^2 e^{-2\omega_0 t} = 2\omega_0^4 \rho_0^2 e^{-2\omega_0 t} + a_n^2$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{2}\,\omega_0^2 \rho_0 e^{-\pi/2}$$