Mecánica (FI2001), semestre: Primavera 2021

Prof.: Patricio Aceituno

TAREA 1

Considere una partícula que se mueve en un espacio bidimensional (x – y) definido por los vectores unitarios **i** (según x) y **j** (según y) de acuerdo a la siguiente función itinerario:

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (t - 5t^2)\,\mathbf{j}$$

Determine:

a) Ecuación de trayectoria de la partícula

b) Determine el tiempo t_o que transcurre desde el instante inicial t = 0 hasta el instante cuando el vector velocidad forma un ángulo $\pi/2$ con el vector aceleración.

Para ese tiempo t_o determine:

c) Radio de curvatura de la trayectoria

d) Distancia recorrida hasta ese momento a lo largo de la trayectoria

e) Ángulo que forma el vector posición de la partícula con el vector velocidad

Para el tiempo 2 t_o determine lo siguiente:

f) Componente de la aceleración a lo largo de la trayectoria

g) Componente de la aceleración perpendicular a la trayectoria

h) A partir de la información obtenida en g) y calculando la rapidez de la partícula en ese instante, determine el radio de curvatura de la trayectoria en ese momento

Tarea 1

Cinemática

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

Considere una partícula que se mueve en un espacio bidimensional (x-y) definido por los vectores unitarios **i** (según x) y **j** (según y) de acuerdo a la siguiente función itinerario:

$$\vec{r}(t) = t\hat{i} + (t - 5t^2)\hat{j}. \tag{1}$$

Determine:

a.- Ecuación de trayectoria de la partícula

Notamos que la ecuación (1) tiene una parte para el eje x y una para el eje y:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{t}_{\text{Eje x}}\hat{i} + \underbrace{(t - 5t^2)}_{\text{Eje y}}\hat{j}, \tag{2}$$

con lo que podemos separar las ecuaciones como $x(t) = t$ e $y(t) = t - 5t^2$, por lo que podemos reemplazar esta expresión de $x(t)$ en la expresión de $y(t)$ para dejarla definida según la posición en x, que es lo que nos piden.

$$\Leftrightarrow y(x) = x - 5x^2$$

Que sería una parábola que se muestra en la Figura 1.

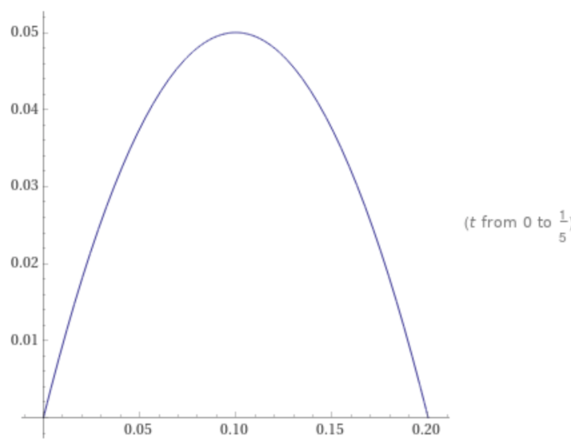

Figura 1: Posición en el eje y versus la posición en el eje x.

b.- Determine el tiempo t_0 que transcurre desde el instante inicial $t = 0$ hasta el instante cuando el vector velocidad forma un ángulo $\pi/2$ con el vector aceleración

Derivamos (1) para conseguir la velocidad y la aceleración de la partícula:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath} + (1 - 10t)\hat{\jmath} = \vec{v} \tag{3}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -10\hat{\jmath} = \vec{a} \tag{4}$$

Este ítem se puede hacer de dos formas: Notando que la aceleración siempre es en $\hat{\jmath}$, por lo que habría que calcular el tiempo en el que la velocidad solo tiene un componente no nulo en $\hat{\imath}$; la otra forma es tomando el producto punto e imponer que el ángulo que sale de este producto sea $\pi/2$, o sea, que el producto punto sea 0.

1. Primera forma: Para que el término que acompaña a $\hat{\jmath}$ en la velocidad sea 0, hacemos $1 - 10t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 1/10$.
2. Segunda forma: Hacemos producto punto,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = (\hat{\imath} + (1 - 10t_0)\hat{\jmath}) \cdot (-10\hat{\jmath}) = 0 \\ \Rightarrow -10(1 - 10t_0) = 0 \\ \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Para este tiempo t_0 determine:

c.- Radio de curvatura de la trayectoria

Calculamos las expresiones necesarias para calcular el radio de curvatura:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(t_0)\| = \sqrt{1^2 + (1 - 10t_0)^2} = \sqrt{100t_0^2 - 20t_0 + 2}; \\ \|\vec{v}(t_0) \times \vec{a}(t_0)\| = \|(\hat{\imath} + (1 - 10t_0)\hat{\jmath}) \times -10\hat{\jmath}\| = \| - 10\hat{k}\| = 10, \end{aligned}$$

con lo que calculamos el radio de curvatura:

$$R_c(t_0) = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{(100t_0^2 - 20t_0 + 2)^{3/2}}{10} = \frac{1}{10}$$

d.- Distancia recorrida hasta ese momento a lo largo de la trayectoria

La fórmula de la distancia recorrida para una curva viene dada por:

$$d = \int_{t_i}^{t_f} \|\vec{v}\| dt,$$

reemplazando,

$$d = \int_0^{t_0} \sqrt{1 + (1 - 10t)^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{100t^2 - 20t + 2} dt,$$

utilizando WolframAlpha,

Código 1: Input para WolframAlpha

```
integrate sqrt(100t^2-20t+2) from t=0 to t=1/10
```

o usando tablas de integrales *conocidas*, obtenemos que la distancia recorrida hasta el tiempo t_0 es $d \approx 0.115$

$\boxed{\textbf{e.-}}$ Ángulo que forma el vector posición de la partícula con el vector velocidad

Para calcula ángulos entre vectores puede ser útil usar el producto punto si es que conocemos las componentes en cada eje,

$$\vec{r}(t_0) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = \left(\frac{1}{10}\hat{i} + \frac{1}{20}\hat{j} \right) \cdot 1\hat{i} = \frac{1}{10} = \|\vec{r}(t_0)\| \|\dot{\vec{r}}(t_0)\| \cos\alpha,$$

con α el ángulo entre los vectores. Calculamos la magnitud de la posición y velocidad en el tiempo t_0, reemplazamos y despejamos el coseno:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{400}} \cos\alpha = \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Para el tiempo $2t_0$ determine lo siguiente:

$\boxed{\textbf{f.-}}$ Componente de la aceleración a lo largo de la trayectoria

La aceleración de una partícula se puede expresar como:

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{R_c}\hat{n}, \tag{5}$$

donde la primera componente corresponde a la componente tangencial a la trayectoria, y la segunda a la componente perpendicular. Calculamos el primer término,

$$\dot{v} = \frac{d}{dt}\sqrt{1 + (1 - 10t)^2} = \frac{1}{2} \frac{2(1 - 10t)}{\sqrt{1 + (1 - 10t)^2}} \cdot (-10),$$

evaluando en $2t_0 = 2/10$, $\dot{v}(2t_0) = \frac{10}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{\textbf{g.-}}$ Componente de la aceleración perpendicular a la trayectoria

Ya que tenemos la componente tangencial y podemos calcular la magnitud de la aceleración, con Pitágoras podemos calcular la componente perpendicular a la trayectoria tomando como hipotenusa a la magnitud de la aceleración en todas sus componentes y un cateto como la componente en $\hat{t}$.

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}(2t_0)\|^2 &= \dot{v}^2(2t_0) + a_\perp^2(2t_0) \\
\Leftrightarrow (10)^2 &= \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + a_\perp^2(2t_0) \\
\Rightarrow a_\perp(2t_0) &= 5\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

También se pudo haber hecho ocupando la expresión de (5), pero en el siguiente ítem calcularemos el radio de curvatura.

$\boxed{\textbf{h.-}}$ A partir de la información obtenida en **g.-** y calculando la rapidez de la partícula en este instante, determine el radio de curvatura de la trayectoria en ese momento

Siguiendo las instrucciones, calculamos la rapidez (magnitud de la velocidad) en el tiempo $2t_0$:

$$v^2(2t_0) = \sqrt{1 + (1 - 10 \cdot 2t_0)^2}^2 = 1 + (1-2)^2 = 2,$$

usando que ya calculamos la componente perpendicular de la aceleración y con (5), podemos despejar el valor del radio de curvatura en $2t_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{R_c} &= a_\perp \\
\Leftrightarrow \frac{2}{R_c} &= 5\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow R_c &= \frac{\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$