Tarea 12

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Pedro J. Aguilera Rojas

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el **jueves 23 de noviembre** a las 23:59

Notación:

En esta Tarea y en próximas escribiremos los corchetes de Poisson con *corchetes cuadrados* y *llaves* por igual

$$[f, g] = \{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

Pregunta 1

Demuestre que el valor de cualquier función $f(q(t), p(t))$ de las coordenadas y el momentum de un sistema a un tiempo t puede ser expresado en términos de los valores de q y p a tiempo $t = 0$ como

$$f(q(t), p(t)) = f + \frac{t}{1!}[H, f] + \frac{t^2}{2!}[H, [H, f]] + \dots,$$

donde $f = f(q(0), p(0))$ y $H = H(q(0), p(0))$ es el Hamiltoniano. (Assuma que la serie converge)

Aplique esta fórmula para evaluar $q(t)$, $p(t)$, $q^2(t)$, y $p^2(t)$ para los siguientes casos:

a) una partícula moviéndose en un campo uniforma de fuerzas;

b) un oscilador armónico

Pregunta 2

Muestre que si se cumple la relación

$$[W_1(q, p), W_2(q, p)] = 0$$

el resultado de aplicar sucesivamente dos tranformaciones canónicas infinitesimales y que son producidas por las funciones generadoras

$$\Phi_i(q, P) = qP + \lambda_i W_i(q, P), \quad \lambda_i \to 0, \quad i = 1, 2,$$

es independiente del orden en el cual se hacen, hasta (e incluyendo) términos de segundo orden.

Pregunta 3

Una partícula en un campo $U(r) = -\alpha/r$ es sabido que se tiene una integral de movimiento

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{M}] - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \,.$$

a) Evalúe los corchetes de Poisson $[A_i, A_j]$, $[A_i, M_j]$,

b) Evalúe los siguientes corchetes de Poisson

$$[H, \mathbf{J}_1], \quad [H, \mathbf{J}_2], \quad [J_{1i}, J_{2j}], \quad [J_{1i}, J_{1j}], \quad [J_{2i}, J_{2j}],$$

para un movimiento finito ($E < 0$), si los vectores $\mathbf{J}_{1,2}$ son

$$\mathbf{J}_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{M} \pm \sqrt{\frac{m}{-2E}}\mathbf{A}\right) .$$

Compare estos corchetes de Poisson con los corchetes de Poisson para las componentes del momentum angular $\mathbf{M}$.