Tarea 11

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Pedro J. Aguilera Rojas

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el **jueves 16 de noviembre** a las 23:59

Pregunta 1

a) Una partícula en un campo gravitacional uniforme está restringida a la superficie de una esfera, centrada en el origen, con un radio $r(t)$ que es una función dada del tiempo. Obtenga las ecuaciones de Hamilton. ¿Que condiciones deben satisfacerse para que se conserve el Hamiltoniano?. ¿Es el hamiltoniano la energía total?.

b) Considere una partícula que se mueve en el plano bajo la influencia del potencial dependiente de la velocidad, $V = (1+\dot{r}^2)/r$, donde r es la distancia desde el origen. Escriba el Hamiltoniano en coordenadas polares. Discuta la conservación del momento angular, ¿Es H invariante bajo rotación? Reduzca el problema a una ecuación diferencial de primer orden en r.

c) Un trompo simétrico en un cambio externo $U(\theta)$ posee el siguiente Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin(\theta)^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 - U(\theta)$$

Deduzca las ecuaciones de movimiento del trompo mediante el formalismo Routhiano.

Pregunta 2

Considere un Hamiltoniano de un grado de libertad para una partícula de masa m dado por:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m}e^{-q/a}$$

a) Resuelva para $q(t)$ y $p(t)$. Demuestre que si se toma el semiplano de $p > 0$, el sistema muestra una partícula con una fuerza retardante proporcional a $\dot{q}(t)^2$. Encuentre el movimiento particular con las condiciones iniciales $q(0) = 0$, $p(0) = mv$, donde $v > 0$. Encuentre los límites de q, p y $\dot{q}(t)$ como $t \to \infty$. ¿Cuál es la relación de H con la energía cinética $T = m\dot{q}(t)^2/2$? ¿A qué tasa se disipa T?

b) ¿Qué término debe agregarse al Hamiltoniano para proporcionar una fuerza adicional constante y positiva?

Pregunta 3

Una partícula de masa m está sujeta a la fuerza $F = -kq - \alpha/q^3$

a) Demuestre que un posible Hamiltoniano para este sistema es $H = p^2/2m + kq^2/2 + Ap/q$, donde A es una constante elegida correctamente.

b) Utilice las siguientes transformaciones canónicas con $\lambda \neq 0$, para encontrar $q(t)$

$$Q = \arctan(\lambda q/p)\,,$$

$$P = \frac{p^2/\lambda + \lambda q^2}{2}$$

c) Discuta la relación de H con el Hamiltoniano H' que se hallaría simplemente encontrando un potencial $V(q)$ a partir del F dado, construyendo el Lagrangiano $L' = T - V$, y luego obteniendo el Hamiltoniano con el procedimiento habitual.