FI-2001 Mecánica - Sección-2
Prof. Gonzalo A. Palma.
Auxiliares: Javier Huenupi y Eduardo Droguett
Ayudantes: Thiare González, Lukas Philippi y Claudia San Martín
FCFM, Universidad de Chile

Examen

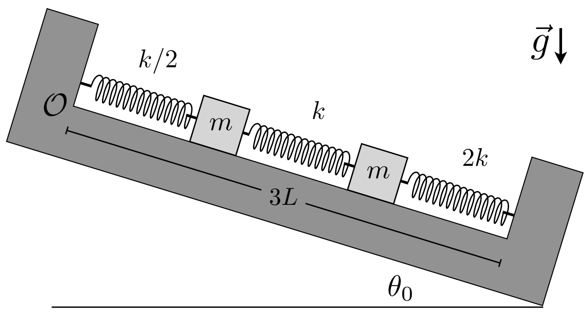
Viernes 19 de julio, 2024
Tiempo: 3horas

P1. Pequeñas oscilaciones: Una cavidad plana de largo $3L$, permanece inclinada en un ángulo fijo θ_0 con respecto a la horizontal, tal como muestra la figura (considere la presencia de gravedad). La cavidad contiene una configuración de dos masas idénticas m y tres resortes de largo natural L. Los coeficientes de elasticidad de los resortes son $k/2$, k y $2k$ en el orden mostrado por la figura.

(a) 2pts. Encuentre la configuración de equilibrio del sistema (exprese las posiciones de las masas a partir del origen $\mathcal{O}$).

(b) 2pts. Determine las frecuencias de oscilación de los modos normales del sistema.

(c) 2pts. Deduzca e ilustre los modos normales de oscilación asociada a cada frecuencia.

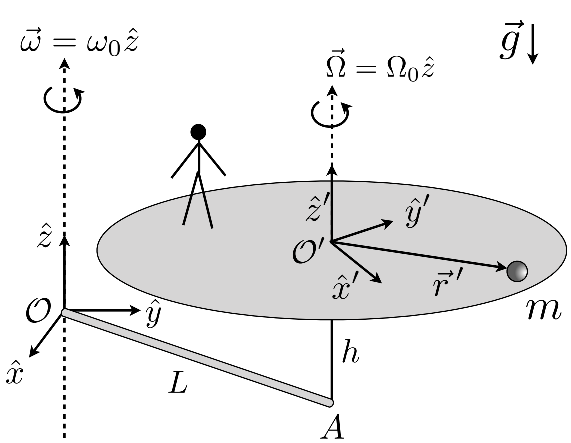


P2. Movimiento relativo: El brazo horizontal $\mathcal{O}A$ de la figura, de longitud L, gira en torno al origen $\mathcal{O}$ con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ constante, donde $\hat{z}$ es un vector unitario que apunta verticalmente hacia arriba. El extremo A del brazo sostiene una plataforma horizontal con forma de disco, de radio R y a una altura h, la cual gira en torno al eje $A\mathcal{O}'$ con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{z}$ constante con respecto al sistema inercial fijo S. Considere como sistema no-inercial S' a aquel solidario a la plataforma, con origen $\mathcal{O}'$ y vectores unitarios $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ $\hat{z}'$ (ver figura). Inicialmente, en $t = 0$, tanto el brazo como $\hat{x}'$ apuntan en la dirección $\hat{x}$ del sistema S. En $t = 0$, una persona parada sobre la plataforma, libera en $\mathcal{O}'$ una masa m desde el reposo sobre la plataforma (es decir: $\vec{r}\,' = 0$ y $\vec{v}\,' = 0$). Hay gravedad, pero no hay roce entre la masa m y la plataforma.

(a) 1.5pts. Escriba expresiones para las fuerzas no inerciales asociadas al sistema S'. Exprésela en términos de las coordenadas (x', y') y vectores unitarios $\hat{x}\,'$ e $\hat{y}\,'$ solidarias a la plataforma.

(b) 1.5pts. Escriba las dos ecuaciones escalares que describen el movimiento de la partícula para x' e y'.

(c) 3pts. Considere el caso particular $\Omega_0 = \omega_0$. Encuentre la solución $x'(t), y'(t)$ para $t > 0$ antes de que la masa deslice fuera de la plataforma.



Indicación: Recuerde la formula $m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'$.

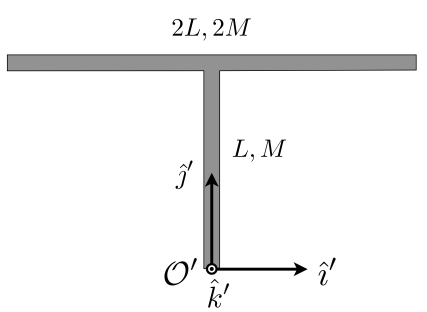
P3. Sólidos rígidos: Considere una estructura formada por dos barras, una de largo L y masa M, y la otra de largo $2L$ y masa $2M$, soldadas entre sí en en un ángulo de 90° (ver figura (I)). Inicialmente la estructura se encuentra en equilibrio con la barra de largo L en posición vertical, con su extremo inferior junto a un peldaño que impide su desplazamiento hacia la izquierda. En algún momento, y debido a una pequeña perturbación, la estructura cae hacia la derecha rotando alrededor del punto de apoyo en el plano $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, tal como muestra la figura (II).

(a) 2pts. Determine a que distancia ρ_{CM} del punto de apoyo se encuentra el centro de masa de la estructura.

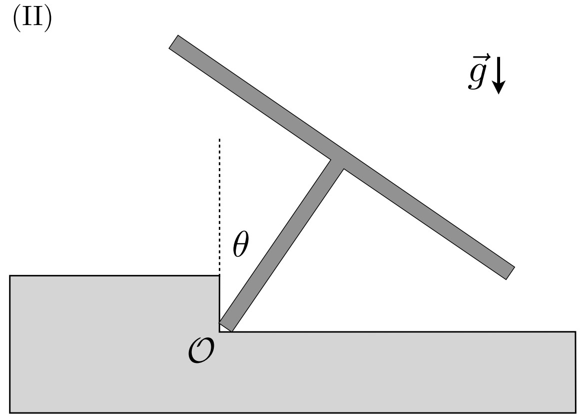
(b) 2pts. Determine el tensor de inercia del sólido con respecto al sistema de referencia solidario de la figura (I).

(c) 2pts. Determine la rapidez angular del sólido cuando el extremo derecho de la barra horizontal golpea la superficie horizontal.

(I)



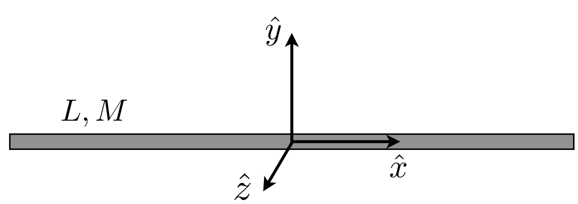
(II)



Indicación: Recuerde que el tensor de inercia de una barra homogénea de largo L y masa M, extendida a lo largo del eje $\hat{x}$, con respecto a su centro de masas, es

$$I_{CM} = \frac{ML^2}{12}(\hat{y}\hat{y}^t + \hat{z}\hat{z}^t) = \frac{ML^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ver figura siguiente:



P1. Sol: (a) Las ecuaciones de movimiento son $m\ddot{x}_1 = \frac{k}{2}(x_1 - L) - k(x_2 - x_1 - L) + mg\sin\theta_0$ y $m\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1 - L) - 2k(3L - x_2 - L) + mg\sin\theta_0$. Luego: $x_1^{(0)} = L - \frac{8}{7}\frac{mg}{k}\sin\theta_0$ y $x_2^{(0)} = 2L - \frac{5}{7}\frac{mg}{k}\sin\theta_0$. **(b)** Definamos: $\delta x_1^{(0)} = x_1 - x_1^{(0)}$ y $\delta x_2^{(0)} = x_2 - x_2^{(0)}$. Sigue que las EDM son: $\delta\ddot{x}_1 + \frac{3k}{2m}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2 = 0$ y $\delta\ddot{x}_2 - \frac{k}{m}\delta x_1 + \frac{3k}{m}\delta x_2 = 0$. Luego $\Omega^2 = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Sigue que $\omega_1^2 = \frac{k^2}{m^2}$ y $\omega_2^2 = \frac{7}{2}\frac{k^2}{m^2}$. **(c)** Los vectores propios (sin normalizar) son $\hat{e}_1 = (2,1)$ y $\hat{e}_2 = (1,-2)$, los que se pueden dibujar para ilustrar los modos.

P2. Sol: (a) Ignoremos z. Se tiene $\dot{\vec{\Omega}} = 0$, $\vec{R} = R\hat{\rho}$, $\ddot{\vec{R}} = -R\omega_0^2\hat{\rho}$. Además $\hat{\rho} = \cos[(\Omega_0 - \omega_0)t]\hat{x}' + \sin[(\Omega_0 - \omega_0)t]\hat{y}'$. Luego: $-m\ddot{\vec{R}} = mL\omega_0^2\hat{\rho}$, $\vec{F}_{\text{cent}} = m\Omega_0^2(x'\hat{x}' + y'\hat{y}')$ y $\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\Omega_0(\dot{x}'\hat{y}' - \dot{y}'\hat{x}')$. **(b)** Usando $\vec{a}\,' = (\ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}')$, las ecuaciones son $\ddot{x}' = L\omega_0^2\cos[(\Omega_0 - \omega_0)t] + \Omega_0^2 x' + 2\Omega_0\dot{y}'$ y $\ddot{y}' = L\omega_0^2\sin[(\Omega_0 - \omega_0)t] + \Omega_0^2 y' - 2\Omega_0\dot{x}'$. **(c)** En el sistema S, las condiciones iniciales son $\vec{r} = R\hat{x}$ y $\vec{v} = L\omega_0\hat{y}$. Sigue un movimiento rectilíneo uniforme $\vec{r} = L\hat{x} + tL\omega_0\hat{y}$. Por otro lado $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,' = L\hat{\rho} + x'(t)\hat{x}' + y'(t)\hat{y}'$. Usando $\hat{x} = \hat{x}'\cos(\Omega_0 t) - \hat{y}'\sin(\Omega_0 t)$, $\hat{y} = \hat{x}'\sin(\Omega_0 t) + \hat{y}'\cos(\Omega_0 t)$ e igualando ambas expresiones para la posición: $x'(t) = tL\,\Omega_0\sin(\Omega_0 t) + L\cos(\Omega_0 t) - L$ y $y'(t) = tL\,\Omega_0\cos(\Omega_0 t) - L\sin(\Omega_0 t)$. Se puede verificar que esta solución satisface las ecuaciones de movimiento acopladas de la parte (b) para $\Omega_0 = \omega_0$.

P3. Sol: (a) La posición de CM de la barra horizontal es $L\hat{\imath}'$ mientras que la posición de CM de la barra vertical es $L\hat{\imath}'/2$. Luego $\vec{r}_{\text{CM}} = (2ML\hat{\imath}' + ML\hat{\imath}'/2)/3M = 5L\hat{\imath}'/6$. Es decir $\rho_{\text{CM}} = 5L/6$. **(b)** Usando la indicación más el teorema de Steiner: $I_{\mathcal{O}'}^{\text{hor}} = \frac{2ML^2}{3}(\hat{\jmath}'\hat{\jmath}'^t + \hat{k}'\hat{k}'^t) + 2ML^2(\hat{\imath}'\hat{\imath}'^t + \hat{k}'\hat{k}'^t) = \frac{2ML^2}{3}(3\hat{\imath}'\hat{\imath}'^t + \hat{\jmath}'\hat{\jmath}'^t + 4\hat{k}'\hat{k}'^t)$. Repitiendo $I_{\mathcal{O}'}^{\text{ver}} = \frac{ML^2}{12}(\hat{\imath}'\hat{\imath}'^t + \hat{k}'\hat{k}'^t) + \frac{ML^2}{4}(\hat{\imath}'\hat{\imath}'^t + \hat{k}'\hat{k}'^t) = \frac{ML^2}{3}(\hat{\imath}'\hat{\imath}'^t + \hat{k}'\hat{k}'^t)$. Sumando:

$$I_{\mathcal{O}'} = I_{\mathcal{O}'}^{\text{hor}} + I_{\mathcal{O}'}^{\text{ver}} = \frac{ML^2}{3}(7\hat{\imath}'\hat{\imath}'^t + 2\hat{\jmath}'\hat{\jmath}'^t + 9\hat{k}'\hat{k}'^t) = \frac{ML^2}{3}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(c) Se tiene $\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\hat{k}$. Luego $\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\vec{\Omega} = -3\dot{\theta}ML^2\hat{k}$. El torque con respecto a $\mathcal{O}$ es: $\tau_{\mathcal{O}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times (3M\vec{g}) = -3Mg(5L/6)\sin\theta\hat{k}$. Sigue que: $\ddot{\theta} - \frac{5g}{6L}\sin\theta = 0$. Integrando e imponiendo CI's: $\dot{\theta}^2 = \frac{5g}{3L}(1 - \cos\theta)$. La barra horizontal toca la superficie cuando $\theta = \pi/4$. Luego $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{5g}{3L}(1 - 1/\sqrt{2})}$.