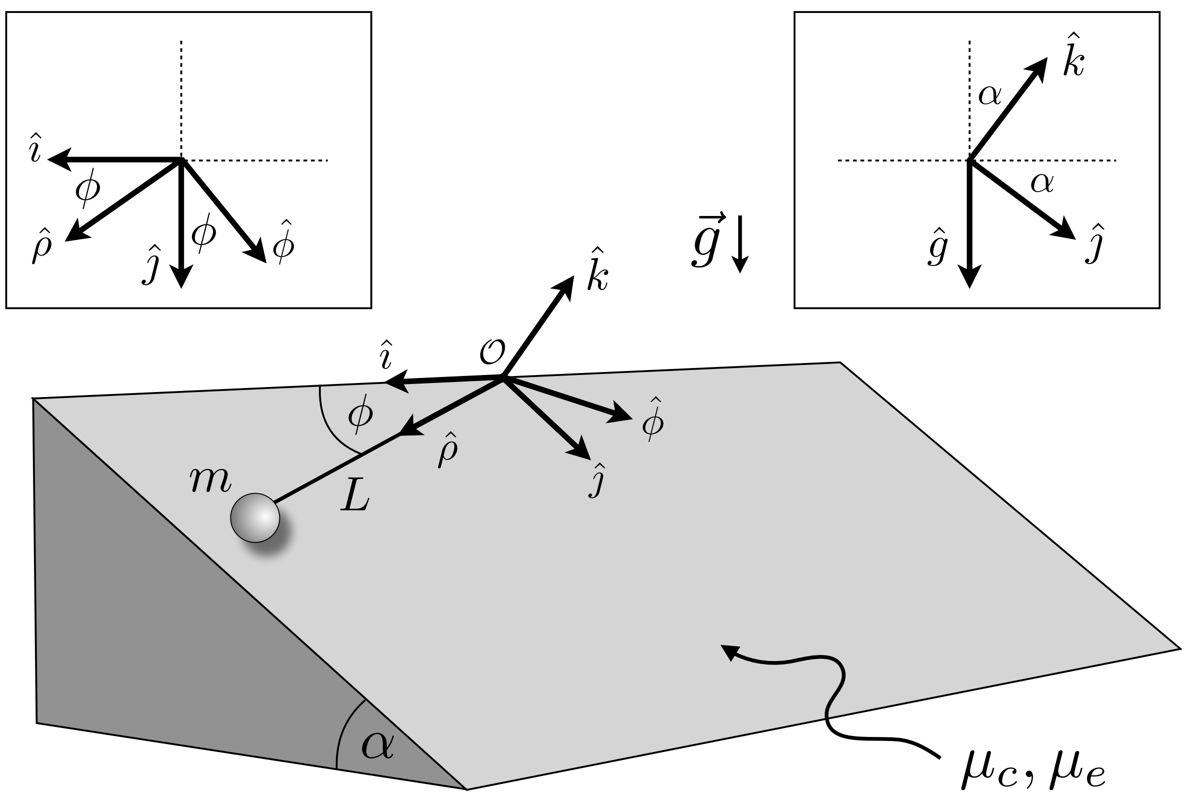
Mecánica FI2001-3
Examen: Viernes 14 de julio, 2023

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

P1: Un plano inclinado en un ángulo α sostiene, desde un origen $\mathcal{O}$, un péndulo de largo L y masa m (ver figura). Entre el plano y la masa m hay roces cinético y estático caracterizados por coeficientes de roce μ_c y μ_e respectivamente. El péndulo se suelta desde la posición horizontal $\phi = 0$ y, a pesar del roce estático, éste comienza a deslizar hasta detenerse en forma definitiva en la posición final $\phi_{\text{fin}} = \frac{3}{4}\pi$.

(a) 2.5pts. Determine la ecuación de movimiento del péndulo.
(b) 1.5pts. A partir de la ecuación de movimiento, determine $\dot{\phi}$ como función ϕ.
(c) 1.0pt. ¿Cuál es el valor de μ_c como función de otros datos del problema? (g, M, L, α).
(d) 0.5pts. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener μ_e?
(e) 0.5pts. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener μ_e?



P2: Dos péndulos idénticos de largo L y masa M, separados por una distancia D, están unidos desde sus extremos por un resorte de largo natural D y constante elástica k (ver figura).

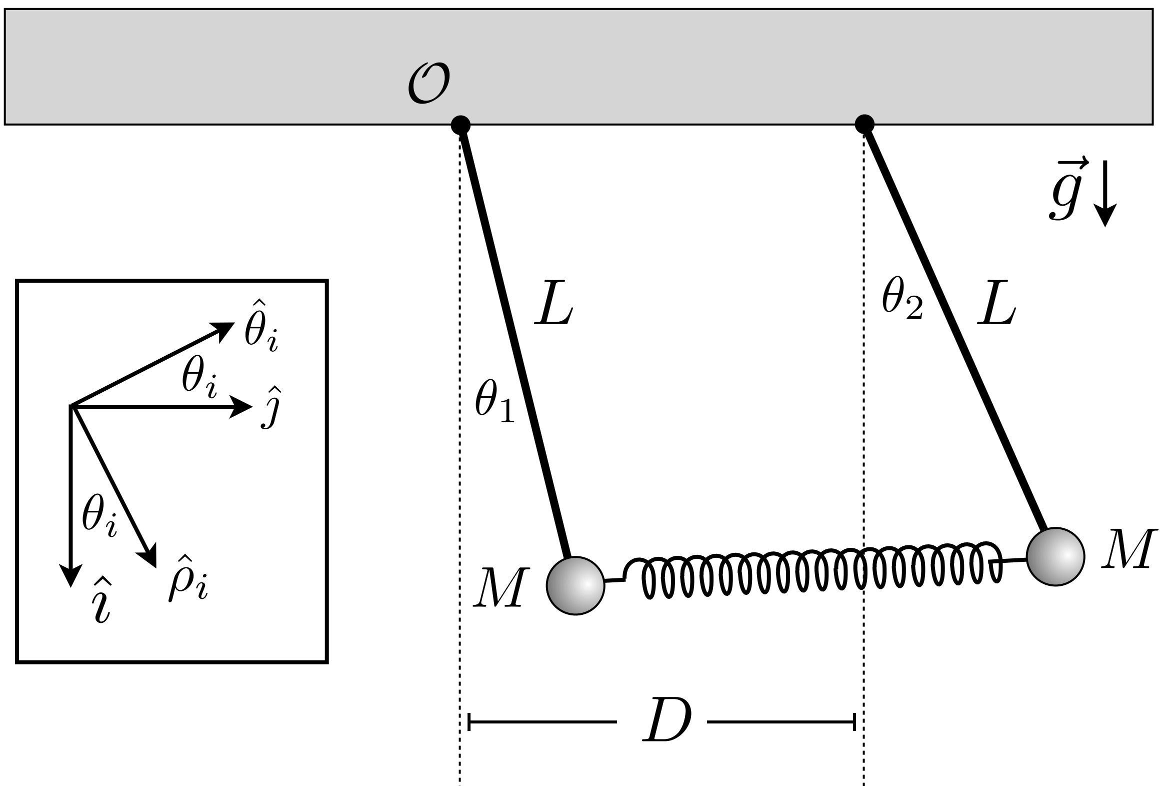
(a) 1pt. Determine la energía cinética del sistema como función de $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$.

(b) 1pt. Determine una expresión para la energía potencial del sistema U_g debido a la fuerza de gravedad, válida para ángulos θ_1 y θ_2 pequeños.

(c) 1.5pts. Determine una expresión para la energía potencial del sistema U_k debido al resorte, válida para ángulos θ_1 y θ_2 pequeños.

(d) 1pt. Escriba el Lagrangiano del sistema y deduzca las ecuaciones lineales acopladas para θ_1 y θ_2 válidas en el régimen de pequeñas oscilaciones.

(e) 1.5pt. Determine las frecuencias propias del sistema y describa sus modos normales de oscilación.



Indicación: No olvide que, para ángulos pequeños, las energías potenciales obtenidas en las partes (b) y (c) deben ser expresadas hasta segundo orden en términos de los ángulos θ_1 y θ_2.

P3: Un cilindro de radio interior R está anclado al suelo, con su eje de simetría paralelo a la horizontal. En su interior, una barra de largo $L = \sqrt{2}R$ y sección pequeña, con su masa M uniformemente distribuida, está inicialmente en equilibrio vertical gracias a una cuña colocada junto a su extremo inferior que le impide deslizarse.

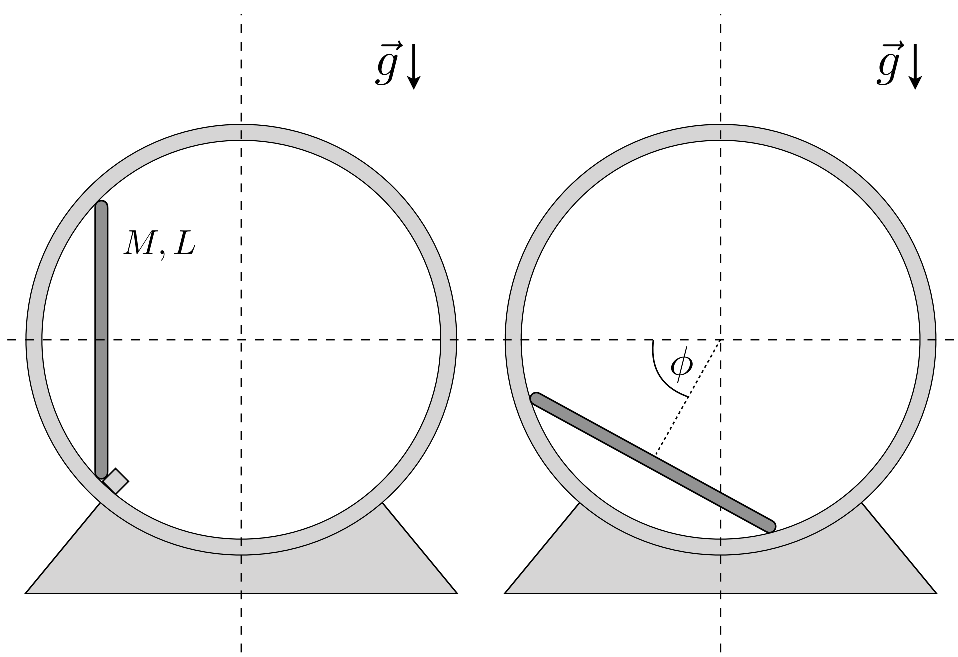
(a) 1.0 pt. Determine las fuerzas que actúan sobre la barra en función de los datos del problema.

En un cierto instante se saca la cuña y la barra empieza a caer, con sus extremos deslizando sin roce sobre la pared del cilindro.

(b) 3.0 pts. Determine la ecuación de movimiento para para el ángulo ϕ que indica la posición del centro de masas de la barra desde el origen con respecto a la horizontal (ver figura).

(c) 1.0 pt. Calcule la rapidez de los extremos de la barra cuando en su caída ésta forma un ángulo $\phi = \pi/4$ con la horizontal.

(d) 1.0 pt. Calcule las fuerzas que ejerce la pared del cilindro sobre los extremos de la barra cuando, en su caída, ésta forma un ángulo $\phi = \pi/4$ con la horizontal.



Fórmulas útiles:

La matriz de inercia es con respecto a un punto $\mathcal{O}'$ solidario al sólido constituido por N partículas:

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \left(|| \, \vec{r}_i{}' \, ||^2 \, \mathbb{I} - \vec{r}_i{}' \, \vec{r}_i{}'^{\,t} \right) . \tag{1}$$

En el caso de un sólido continuo:

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \int dm \left(|| \, \vec{r}\,' ||^2 \, \mathbb{I} - \vec{r}\,' \, \vec{r}\,'^{\,t} \right) . \tag{2}$$

El teorema de Steiner es:

$$I_{\mathcal{O}'} = I_{\text{CM}} + M_{\text{tot}} \left[||\vec{r}\,'_{\text{CM}}||^2 \mathbb{I} - \vec{r}\,'_{\text{CM}} \vec{r}\,'^{t}_{\text{CM}} \right] . \tag{3}$$

Recuerde que $\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} + \vec{L}_{\text{CM}}$, donde

$$\vec{L}_{\mathcal{O}}^{\text{CM}} = M \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}}, \qquad \vec{L}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}} \vec{\Omega}. \tag{4}$$

Además la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_{\text{CM}}^{\,2} + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{\,t} I_{\text{CM}} \vec{\Omega}. \tag{5}$$

Si $\mathcal{O} = P$ es un punto fijo del sólido:

$$\vec{L}_P = I_{\text{P}} \vec{\Omega}, \tag{6}$$

y la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{\,t} I_P \vec{\Omega}. \tag{7}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada generalizada q_i a partir del Lagrangiano $L = K - U$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \, . \tag{8}$$

Solución P1: **(a)** Se tienen $\hat{g} = -\cos\alpha\hat{k} + \sin\alpha\hat{\jmath}$ y $\hat{\jmath} = \cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}$. Luego, la segunda ley de Newton es: $mL(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = -T\hat{\rho} + N\hat{k} + mg(-\cos\alpha\hat{k} + \sin\alpha(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho})) - \mu_c||\vec{N}||\hat{\phi}$. Por componentes: $T = mL\dot{\phi}^2 - mg\sin\alpha\sin\phi$, $N = mg\cos\alpha$ y $mL\ddot{\phi} = mg\sin\alpha\cos\phi - \mu_c||\vec{N}||$. Reemplazando N obtenemos $\ddot{\phi} - \frac{g}{L}\sin\alpha\cos\phi + \mu_c\frac{g}{L}\cos\alpha = 0$. **(b)** Multiplicando por $\dot{\phi}$ e integrando: $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{L}\sin\alpha\sin\phi + \mu_c\frac{g}{L}\cos\alpha\phi = C$. Imponiendo condición inicial: $\dot{\phi}^2 = 2\frac{g}{L}\sin\alpha\sin\phi - 2\mu_c\frac{g}{L}\cos\alpha\phi$. **(c)** Se detiene en $\phi_{\text{fin}} = \frac{3}{4}\pi$ de donde $\mu_c = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\tan\alpha$. **(d)** Si la masa no se hubiese movido, habríamos tenido $||\vec{F}_{re}|| \le \mu_e||\vec{N}||$ donde $\vec{F}_{re} = -mg\sin\alpha\hat{\phi}$, es decir $\mu_e \ge \tan\alpha$. Pero la masa sí se movió, luego $\mu_e < \tan\alpha$. **(e)** Dado que la masa se detuvo en $\phi_{\text{fin}} = \frac{3}{4}\pi$ se cumple $||\vec{F}_{re}|| \le \mu_e||\vec{N}||$ donde $\vec{F}_{re} = -mg\sin\alpha\cos\phi_{\text{fin}}\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\sin\alpha\hat{\phi}$. Luego $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\alpha \le \mu_e$.

Solución P2: **(a)** Las posiciones son $\vec{r}_1 = L\hat{\rho}_1$ y $\vec{r}_2 = \hat{\jmath}D + L\hat{\rho}_2$. Las velocidades son: $\vec{v}_1 = L\dot{\theta}_1\hat{\theta}_1$ y $\vec{v}_2 = L\dot{\theta}_2\hat{\theta}_2$. Luego $K = \frac{m}{2}L^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$. **(b)** Usando $\hat{\rho}_i = \cos\theta_i\hat{\imath} + \sin\theta_i\hat{\jmath}$, vemos que $U_g = -mgL(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$ salvo una constante. Aproximando $U_g = \frac{1}{2}mgL(\theta_2^2 + \theta_1^2)$. **(c)** La elongación del resorte es $||\vec{r}_2 - \vec{r}_1|| = \sqrt{L^2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 + (D + L\sin\theta_2 - L\sin\theta_1)^2}$. Aproximando: $||\vec{r}_2 - \vec{r}_1|| - D = L\theta_1 - L\theta_1$. Luego $U_k = \frac{k}{2}L^2(\theta_2 - \theta_1)^2$. **(d)** Juntando todo: $L = \frac{m}{2}L^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{k}{2}L^2(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2}mgL(\theta_2^2 + \theta_1^2)$. Las ecuaciones de E-L son: $\ddot{\theta}_1 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{g}{L}\theta_1 = 0$, y $\ddot{\theta}_2 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{g}{L}\theta_2 = 0$. **(e)** La forma de estas son $\ddot{\vec{q}} + \Omega^2\vec{q} = 0$ con $\vec{q} = (\theta_1, \theta_2)$ y $\Omega^2 = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} + \frac{g}{L} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} + \frac{g}{L} \end{pmatrix}$. Luego $\omega_1^2 = g/L$ y $\omega_2^2 = \frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}$.

Solución P3: **(a)** $\hat{\imath}$ apunta hacia la derecha y $\hat{\jmath}$ apunta hacia arriba. Las fuerzas son: $\vec{N}_{\text{cil}} = \frac{1}{\sqrt{2}}N_{\text{cil}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$, $\vec{N}_{\text{cu}} = \frac{1}{\sqrt{2}}N_{\text{cu}}(-\hat{\imath} + \hat{\jmath})$ y $\vec{F}_g = -Mg\hat{\jmath}$. Imponiendo suma cero: $N_{\text{cu}} = N_{\text{cil}} = Mg/\sqrt{2}$. **(b)** Se tiene $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}R\hat{\rho}$. Luego: $\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}R\dot{\phi}\hat{\phi}$. El tensor de inercia c/r al CM y base solidaria $\hat{\imath}' = \hat{\rho}$, $\hat{\jmath}' = \hat{\phi}$ y $\hat{k}' = \hat{k}$ es $I_{\text{CM}} = \frac{ML^2}{12}\text{Diag}(1,0,1)$. Usando $\vec{L}_{\mathcal{O}} = M\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + I_{\text{CM}}\vec{\Omega}$ con $\vec{\Omega} = (0,0,\dot{\phi})$, obtenemos $\vec{L}_{\mathcal{O}} = \frac{MR^2}{2}\dot{\phi}\hat{k} + \frac{ML^2}{12}\hat{k}\dot{\phi} = \frac{2MR^2}{3}\dot{\phi}\hat{k}$. Dado que el cilindro ejerce fuerzas que apuntan hacia $\mathcal{O}$, éstas no contribuyen al torque. Luego: $\vec{\tau}_g = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}MgR\cos\phi\hat{k}$. Usando $\dot{\vec{L}}_{\mathcal{O}} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ obtenemos $\ddot{\phi} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{R}\cos\phi = 0$. **(c)** Integrando e imponiendo condiciones iniciales: $\dot{\phi}^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{g}{R}\sin\phi$. Luego: $v = \sqrt{\frac{3}{2}gR}$. **(d)** Para $\phi = \pi/4$ las fuerzas son $\vec{N}_{\text{sup}} = N_{\text{sup}}\hat{\imath}$ y $\vec{N}_{\text{inf}} = N_{\text{inf}}\hat{\jmath}$. Usando $M\vec{a}_{\text{CM}} = \sum\vec{F}^{\text{ext}}$ obtenemos $N_{\text{sup}} = \frac{9}{8}Mg$ y $N_{\text{inf}} = \frac{11}{8}Mg$.

Comentario: La parte (b) de la P3 se puede hacer de otras formas: Por ejemplo calculando la energía cinética de la vara con $K = \frac{1}{2}M\vec{v}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\text{CM}}\vec{\Omega}$ y luego usando conservación de energía, o las ecuaciones de Euler Lagrange. También se puede calcular $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ usando teorema de Steiner.