FI2001-3 Mecánica.
Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc y Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

Examen

05 de Diciembre del 2022.
Tiempo total: 3 horas.

P1. Se tiene un sólido homogéneo de masa M y con forma de paralelepípedo rectangular de dimensiones $a \times b \times c$ con $a < b < c$.

(a) Determine su matriz de inercia $\mathbf{I}^G$

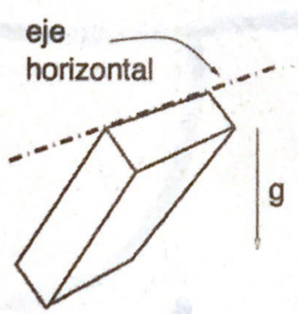
(b) Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones de los tres péndulos que consisten en que el sólido descrito oscila, debido a su peso, en torno a cada una de las tres aristas -colocada en un eje fijo horizontal- de largos a, b y c respectivamente.

P2. Considere una estructura rígida formada por un arco de un aro de radio R y masa M, que tiene en sus extremos dos partículas de masa m cada una. El sistema está inicialmente en reposo, apoyado en un soporte colocado en el punto medio del arco (punto P). Se sabe que el arco de aro subtiende un ángulo 2α, como se ve en la figura.

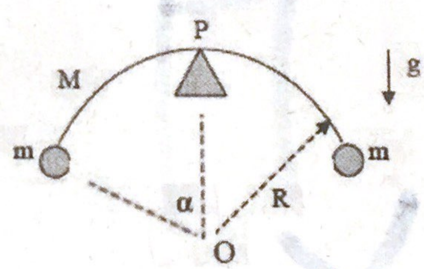
(a) Encuentre la distancia desde O hasta el centro de masa de la barra

(b) Obtenga el momento de inercial del sistema (masas + barra) con respecto al punto P.

(c) Considere que el sistema comienza a oscilar, encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo θ definido como el ángulo entre la línea OP y la vertical.



(a) P1



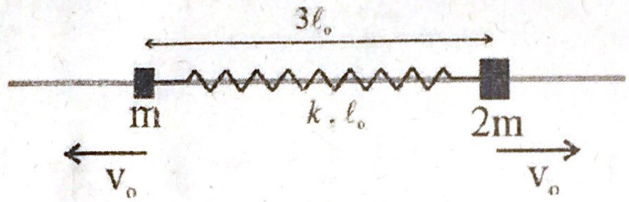
(b) P2

P3. Dos anillos puntuales de masas m y $2m$ están insertos en una vara horiontal rectilínea e infinita con la cual no tienen roce (ver figura). Ambos anillos se encuentran unidos por un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. Inicialmente ambos anillos están a una distancia $3l_0$ entre sí, moviéndose con rapidez v_0 respecto de la vara en los sentidos mostrados en la figura.

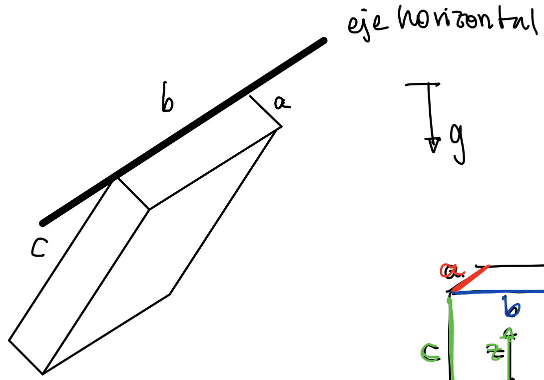
(a) Para la condición inicial, determine la distancia entre el centro de masa (CM) del sistema y cada extremo del resorte. Determine también la velocidad (magnitud y dirección) del CM.

(b) Para la condición inicial, determine la energía cinética del CM y la energía cinética del movimiento relativo al CM del sistema.

(c) Encuentre la distancias máximas y mínimas entre los anillos para el movimiento resultante y la frecuencia con que el sistema oscila.

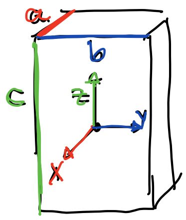


P1



masa M

$a \times b \times c \quad a < b < c$



→ tomemos el origen en el centro del paralelepípedo

a) Matriz de Inercia I_G

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

donde cada término viene dado por

$$\underbrace{I_{x_i x_j} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, dm}_{\text{caso continuo}}$$

...

Ahora calculemos los términos de la matriz.

• $I_{xx} = \int \left(\sqrt{\cancel{x^2} + y^2 + z^2}^{\,2} \cdot 1 - \cancel{x^2} \right) dm$

$\quad = \int (y^2 + z^2)\, dm$

¿Qué es dm? depende

$dm = \lambda\, dl$ (lineal) → $\lambda\, dx$

$dm = \sigma\, dS$ (superficial) → $\sigma\, dx\, dy$

$dm = \rho\, dS$ (volumétrico) → $\rho\, dx\, dy\, dz$

Como estamos trabajando en un paralelepípedo usamos entonces el dm volumétrico.

Pero ¿Qué es ρ? ρ es la densidad volumétrica que se define como la masa / volumen

$\boxed{M}$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{M}{abc}}$$

Reemplazando en I_{xx},

$$I_{xx} = \iiint (y^2+z^2)\,\rho\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{+b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2+z^2)\frac{M}{abc}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{M}{\cancel{a}bc}\cdot\cancel{a} \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2} (y^2+z^2)\,dy\,dz$$

$$= \frac{M}{bc}\int_{-c/2}^{c/2}\left(\frac{y^3}{3}+z^2 y\,\Big|_{y=-b/2}^{y=b/2}\right) dz$$

$$= \frac{M}{bc}\int_{-c/2}^{c/2} \frac{(b/2)^3}{3}+\frac{(b/2)^3}{3}+z^2(b)\,dz$$

$$= \frac{M}{bc}\int_{-c/2}^{c/2}\left(\frac{b^3}{12}+z^2 b\right)dz$$

$$= \frac{M}{bc}\left(\frac{b^3}{12}\cdot c + b\left(\frac{(c/2)^3}{3}+\frac{(c/2)^3}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{M}{bc}\left(\frac{b^3 c}{12}+b\frac{c^3}{12}\right)$$

$$= \frac{Mbc}{12bc}(b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{xx} = \frac{M}{12}(b^2+c^2)}$$

De forma análoga calculamos I_{yy}, I_{zz}.

$$\boxed{I_{yy} = \frac{M}{12}(a^2+c^2)}$$

$$\boxed{I_{zz} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)}$$

$$I_{x_i x_j} = \int (r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\, dm$$

Ahora veamos $I_{xy} = I_{x_1 x_2}$

De la definición tenemos que

$$I_{xy} = \int \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 0 - xy\right) dm$$

$$= \int -xy\, dm$$

$$= \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} -xy \,\frac{M}{abc}\, dx\, dy\, dz$$

$$= -\frac{M}{abc}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left(y\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=-a/2}^{x=a/2}\right) dy\, dz$$

$$= -\frac{M}{abc}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{2}\underbrace{\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)}_{0} dy\, dz$$

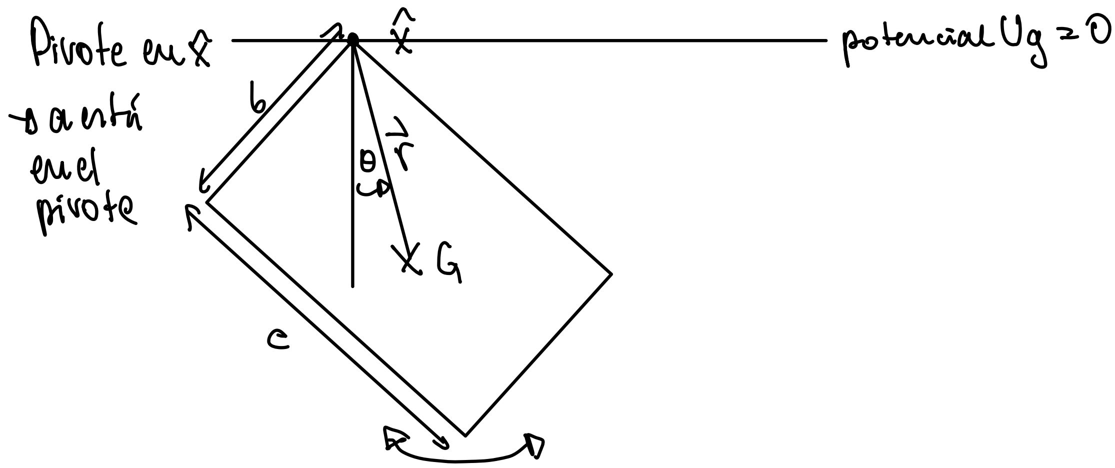
$$\Rightarrow \boxed{I_{xy} = 0} \blacksquare$$

Cosa que también pasará en $I_{x_i x_j}$ siempre que $i \neq j$ dada la simetría del problema.

Así la matriz de inercia es

$$I^{q} = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar las frec. de pequeños oscilaciones estudiamos los 3 casos posibles



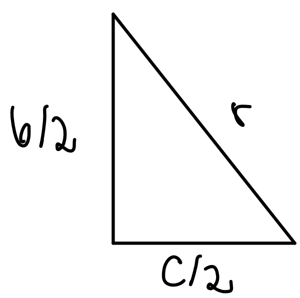
La energía mecánica total vendrá dada por

$$E_{MT} = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 - Mg\, r \cos\theta$$

donde I_O es la inercia en xx desplazada del c.m con Steiner y r es la distancia del pivote al centro de masa!

$$I_O = I_{xx} + Mr^2$$
$$= \frac{M}{12}(b^2 + c^2) + Mr^2$$

y r se obtiene con pitágoras



$$\Rightarrow r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{b^2 + c^2}{4}$$

Así

$$I_O = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) + \frac{M}{4}(b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{M}{3}(b^2+c^2)$$

Reemplazando r y I_O en EMT

$$\Rightarrow EMT = \frac{1}{2}\frac{M}{3}(b^2+c^2)\dot{\theta}^2 - \frac{Mg}{2}\cos\theta\sqrt{b^2+c^2}$$

Aplicando $\frac{dE}{dt} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\cancel{M}}{\cancel{2}\cdot 3}(b^2+c^2)\cancel{2}\ddot{\theta}\cancel{\dot{\theta}} + \cancel{\dot{\theta}}\frac{\cancel{M}g}{2}\sin\theta\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\frac{(b^2+c^2)}{3} + \frac{g}{2}\sin\theta\sqrt{b^2+c^2} = 0$$

y usando pequeñas oscilaciones $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\frac{(b^2+c^2)}{3} + \frac{g}{2}\theta\sqrt{b^2+c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{2\sqrt{b^2+c^2}}\theta = 0$$

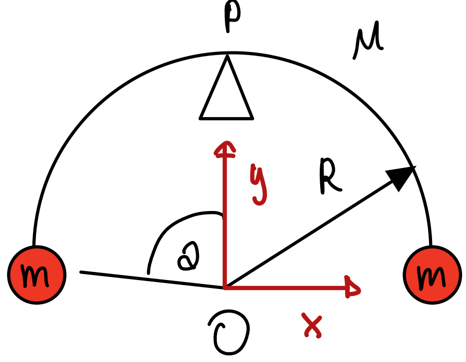
Donde $\boxed{\omega_x^2 = \frac{3g}{2\sqrt{b^2+c^2}}}$

De forma análoga obtenemos ω_y y ω_z al usar $\hat{y}$ y $\hat{z}$ como pivotes.

$$\boxed{\omega_y^2 = \frac{3g}{2\sqrt{a^2+c^2}}}$$

$$\boxed{\omega_z^2 = \frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$$

P2

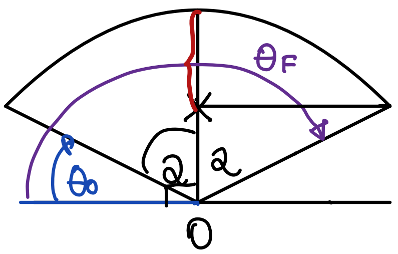


$y = R\sin$

a) r_{cm} desde O:

Para el aro $\quad \vec{R}^{a}_{CM} = \frac{1}{M}\int dm\,(x\hat{x} + y\hat{y}) \quad ; \; dm' = \lambda\, d\ell$

El aro recorre $2a$ en ϕ.



$y = R\sin\theta$
$x = R\cos\theta$

luego $\quad \lambda = \frac{\text{masa}}{\text{línea}} = \frac{M}{2aR}$

$d\ell = R\,d\theta,$

$\left.\begin{array}{l}\theta_0 = \pi/2 - a \\ \theta_F = \pi/2 + a\end{array}\right\} \; \theta \in \left[\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} + a\right]$

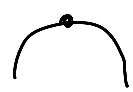
$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \frac{M}{2aR} R\,d\theta\,(x\hat{x} + y\hat{y})$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int_{\pi/2-a}^{\pi/2+a} (R\sin\theta\,\hat{y} + R\cos\theta\,\hat{x})\,d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[2R\sin a\,\hat{y} + 0\right]$$

$$= \boxed{\frac{R}{a}\sin a}$$

si $a = \pi/2$, tengo un semiaro



y $R_{cm} = \frac{R}{a} = \frac{2R}{\pi}$ y recupero lo del aux ✓

b) Barra I_{zz}

• Barra:

$\lambda = \frac{\text{masa}}{\text{línea}} = \frac{M}{2aR}$

$$I_{zz} = \int (r^2 - zz)\,dm$$

$$= \int (x^2 + y^2)\,dm \qquad \text{con } dm = \lambda\, d\ell \qquad d\ell = R\,d\theta,$$

$$= \int R^2 \cdot \frac{M}{2a\cancel{R}}\,\cancel{R}\,d\theta$$

$\left.\begin{array}{l} y = R\sin\theta \\ x = R\cos\theta \end{array}\right] x^2 + y^2 = R^2$

$$= \frac{R^2 M}{2\alpha} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} d\theta$$

$$= \frac{R^2 M}{2\alpha} \left[\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha \right]$$

$$= \frac{R^2 M}{2\alpha} (2\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{I^b_{zz} = MR^2} = I_O$$

y usando Steiner lo movemos a P

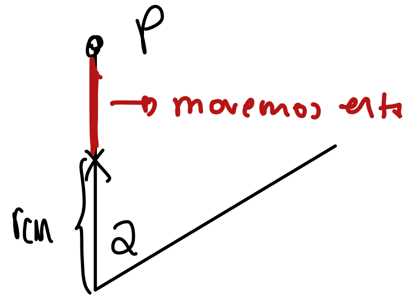
Steiner al CM

$$I_{CM} = I_O - M r_{CM}^2$$

$$= MR^2 - M\frac{R^2 \sin\alpha^2}{\alpha^2}$$

$$I = MR^2 \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \right)$$

$\alpha = \pi/2 \Rightarrow I_{CM} = MR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$ ✓ igual que el aux



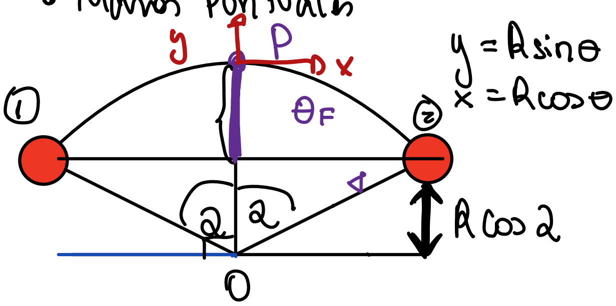
Steiner CM a P

$$I_P = I_{CM} + M(R - r_{cm})^2$$

$$= MR^2 + M\left(R - R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{I_P = MR^2 + MR^2\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$ I_P para la barra

- Masas Puntuales



$y = R\sin\theta$
$x = R\cos\theta$

$$| = \underbrace{R - R\cos\alpha}_{y}$$

$$I^m_{zz} = \sum m(x^2 + y^2 + z^2 - z^2) = \sum m(x^2 + y^2)$$

① $\vec{R}_1 = -R\sin\alpha\,\hat{x} - (R - R\cos\alpha)\hat{y}$

$$I_{zz}' = m(\underline{R^2} - 2R^2\cos\alpha + \underline{R^2\cos^2\alpha} + \underline{R^2\sin^2\alpha})$$

$$= mR^2(2-2\cos\alpha)$$

$$= 2mR^2(1-\cos\alpha)$$

(2) $\vec{R}_2 = R\sin\alpha\,\hat{x} - (R-R\cos\alpha)\hat{y}$

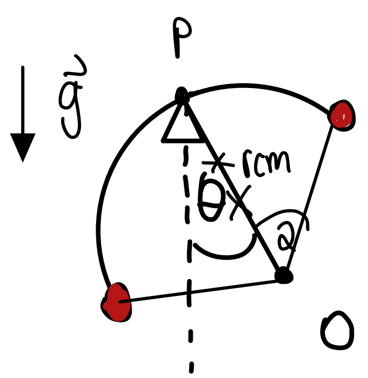
$$I_{zz}' = 2mR^2(1-\cos\alpha)$$

Así $\boxed{I_p = 4mR^2(1-\cos\alpha)}$ → I_p para las masas

por principio de superposición

$$\boxed{\begin{aligned} I_p^{\text{sistema}} &= I_p^{\text{barra}} + I_p^{\text{masas}} \\ &= MR^2 + MR^2\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + 4mR^2(1-\cos\alpha) \end{aligned}}$$

c) Ahora a un péndulo. tomemos $I_p^{\text{sistema}} = I_{zz}$ y lo dejamos expresado.



Queremos la ec. de mov de oscilador armónico.

Usamos $E = K_{rot} + U_g$, $dE/dt = 0$

U_g:

- Aro ⇒ $-Mg(R-r_{cm})\cos\theta$

$$= -MgR\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos\theta$$

- Masas ⇒
  solo R_{CM} c/r a P

(1) $\vec{R}_1 = -R\sin\alpha\,\hat{x} - (R-R\cos\alpha)\hat{y}$

(2) $\vec{R}_2 = R\sin\alpha\,\hat{x} - (R-R\cos\alpha)\hat{y}$

$$\sum \frac{m_i r_i}{M}$$

$$\vec{R}_{CM} = -(R - R\cos\alpha)\hat{y}$$

Luego para la Energía cinética habrá que

$$U_{masas} = -2m\,(R - R\cos\alpha)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{U_g = -MgR\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos\theta - 2mR\,(1-\cos\alpha)\cos\theta}$$

- $K_{rot} = \frac{1}{2}\underline{I_{zz}}\,\dot{\theta}^2$

incluye masas y aro!

Luego

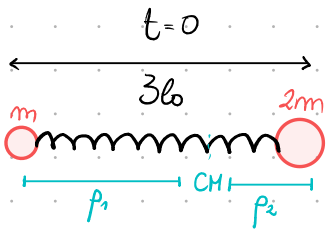
$$E = -MgR\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos\theta - 2mR\,(1-\cos\alpha)\cos\theta + \frac{1}{2}I_{zz}\dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE}{dt} = +MgR\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\sin\theta\,\cancel{\dot{\theta}} + 2mR\,(1-\cos\alpha)\sin\theta\,\cancel{\dot{\theta}} + I_{zz}\cancel{\dot{\theta}}\,\ddot{\theta} = 0$$

Pequeñas oscilaciones : $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \theta\left[\frac{MgR\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + 2mR\,(1-\cos\alpha)}{I_{zz}}\right] = 0}$$

P3



a) Inicialmente, colocando $\vec{R}_{CM}$ en el origen de nuestro sist. de referencia

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{3m}\left(m\cdot(-\rho_1)\hat{\imath} + 2m\rho_2\hat{\imath}\right) = 0\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow 2\rho_2 = \rho_1 \; \Big\} \text{ en } t=0 \quad (1)$$

Además, tenemos que $\rho_2 + \rho_1 = 3l_0 \Rightarrow \rho_1 = 3l_0 - \rho_2$

$$(1) \Rightarrow 2\rho_2 = 3l_0 - \rho_2$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = l_0 \Rightarrow \rho_1 = 2l_0$$

Para calcular la velocidad del CM usamos

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$t=0 \rightarrow \vec{v}_{CM,0} = \frac{1}{3m}\left(m\cdot(-v_0)\hat{\imath} + 2m\, v_0\hat{\imath}\right)$$

$$= \frac{v_0}{3}\hat{\imath}$$

Como no hay fuerzas externas (el resorte es interna), en $\hat{\imath}$, esta velocidad es constante

b) La energía cinética asociada al CM es

$$K_{CM} = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}|^2$$

$$= \frac{1}{6}m v_0^2$$

y la energía cinética asociada al movimiento de las masas c/r al CM la podemos calcular utilizando la energía cinética total

$$K = K_{CM} + K_\rho$$

$$\text{con } K = \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{1}{2}2m v_0^2 = \frac{3}{2}m v_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m v_0^2 = \frac{1}{6}m v_0^2 + \sum \frac{1}{2}m_i \dot{\rho}_i^2$$

$$\Rightarrow \sum \frac{m_i}{2}\dot{\rho}_i^2 = \frac{4}{3}m v_0^2$$

c) Expresamos la energía mecánica (que se conserva)

$$E = K_{CM} + K_p + U$$

$$= \frac{1}{6} m v_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{\rho}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \dot{\rho}_2^2 + \frac{1}{2} k (\rho_1 + \rho_2 - l_0)^2$$

Como v_{cm} es constante, podemos definir que $\vec{R}_{CM} = 0\hat{\imath} \ \forall t$, por lo que siempre tenemos la relación

$$2\rho_2 = \rho_1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2\dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_1 \quad \forall t$$

reemplazamos

$$\Rightarrow E = \frac{1}{6} m v_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{\rho}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \frac{\dot{\rho}_1^2}{4} + \frac{1}{2} k \left(\frac{3\rho_1}{2} - l_0 \right)^2$$

$$= \frac{1}{6} m v_0^2 + \frac{3}{4} m \dot{\rho}_1^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{3\rho_1}{2} - l_0 \right)^2$$

En los momentos de máxima y mínima compresión $\dot{\rho}_1 = 0$. Además, tenemos que como se conserva la energía

$$E_0 = \frac{3}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k (3l_0 - l_0)^2$$

$$= \frac{3}{2} m v_0^2 + 2k l_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m v_0^2 + 2k l_0^2 = \frac{1}{6} m v_0^2 + \cancelto{0}{\frac{3}{4} m \dot{\rho}_1^2} + \frac{1}{2} k \Bigg(\overbrace{\frac{3\rho_1^*}{2} - l_0}^{:= \delta} \Bigg)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} k \delta^2 = -\frac{4}{3} m v_0^2 + 2k l_0^2$$

$$\Leftrightarrow \delta_{1,2} = \pm \sqrt{4l_0^2 - \frac{8}{3} \frac{m}{k} v_0^2} = x - l_0$$, con $x = \rho_1 + \rho_2$, la compresión

$\therefore$ La máxima compresión es $x_{máx} = l_0 + \sqrt{4l_0^2 - \frac{8}{3} \frac{m}{k} v_0^2}$ y la mínima

$$x_{mín} = l_0 - \sqrt{4l_0^2 - \frac{8}{3} \frac{m}{k} v_0^2}$$