MECÁNICA (FI 2001-2) **EXAMEN** Fecha: jueves 14 julio 2022

Prof. Patricio Aceituno

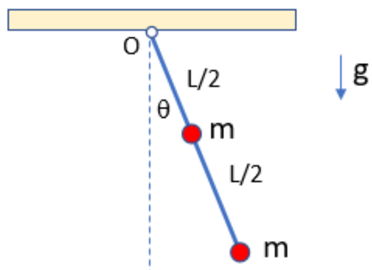
Profesores auxiliares: Edgardo Rosas, Javier Huenupi; Ayudantes: Felipe Cubillos, Álvaro Flores

P1. Un péndulo está formado por una barra rígida de masa despreciable y largo **L** y dos partículas de masa **m**, fijas en el extremo y en la mitad de la barra, respectivamente (ver figura adjunta).

a) Si el péndulo se libera desde el reposo, en una posición en que la barra forma un ángulo $\theta = \pi/4$ con la vertical, determine la magnitud de la fuerza que el eje alrededor del cual oscila el péndulo ejerce sobre el extremo de la barra en el instante inicial. (2 pts).

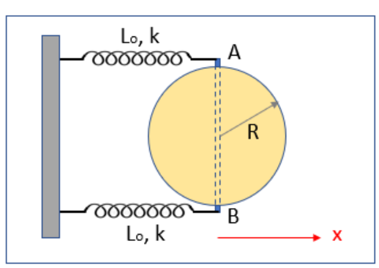
b) Escriba una expresión para el momentum angular del péndulo con respecto a O, y a partir de esa información deduzca la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del péndulo alrededor de su posición angular de equilibrio. (2 ptos.)

c) Imagine ahora que se reemplaza el péndulo de la figura por otro que consiste en una barra delgada y uniforme de largo D y masa 2m. Suponga que este nuevo péndulo, al igual que el anterior, puede girar sin roce en torno a un eje colocado en uno de los extremos de la barra. ¿Qué valor debería tener D para que la frecuencia de pequeñas oscilaciones de este péndulo alrededor de su posición de equilibrio sea la misma que la obtenida en b)? [2 ptos.]

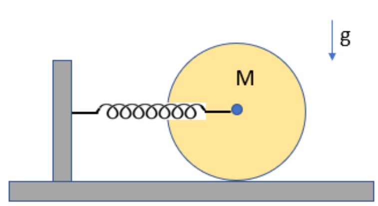


P.2 Una esfera sólida de radio **R** y masa **M** se encuentra sobre una superficie horizontal, sobre la cual puede rodar sin resbalar debido a la fuerza de roce estático caracterizada por un coeficiente de roce $\boldsymbol{\mu_e}$ cuyo valor es desconocida. La esfera es atravesada diametralmente por un eje delgado y de masa despreciable, respecto del cual puede rotar sin roce. Los extremos del eje A y B están fijos a dos resortes iguales, ambos de constante elástica **k** y largo natural $\mathbf{L_o}$. En el instante inicial el largo de los dos resortes es $\mathbf{L_o + \delta_o}$, siendo δ_o su máxima deformación para que una vez que se libera la esfera desde el reposo en esa posición, ruede sin resbalar (si la deformación de los resortes es mayor se produciría deslizamiento en el punto de contacto con la superficie). Determine

a) el valor del coeficiente de roce μ_e (2 pts.)
b) La ecuación de movimiento de la coordenada x del centro de la esfera, tomando como origen (x=0) su posición de equilibrio, en la cual los resortes tienen su largo natural. (2 pts)
c) El tiempo que toma la esfera para que su centro pase por la posición x = 0, luego que se libera desde el reposo con los resortes deformados en δ_o. (2 pts).



(vista superior)



(vista lateral)

P.3. Dos partículas **1** y **2**, de masas **m** y **2m** respectivamente, se encuentran unidas por una cuerda (C_1) a través de un agujero en una placa horizontal como se indica en la figura adjunta. Además, la partícula 2 está unida mediante otra cuerda (C_2) a un punto fijo P por debajo de ella. Las dos cuerdas están tensas, con la partícula 1 describiendo un círculo de radio **L** con velocidad angular $\boldsymbol{\omega_o} = (4\ g/L)^{1/2}$.

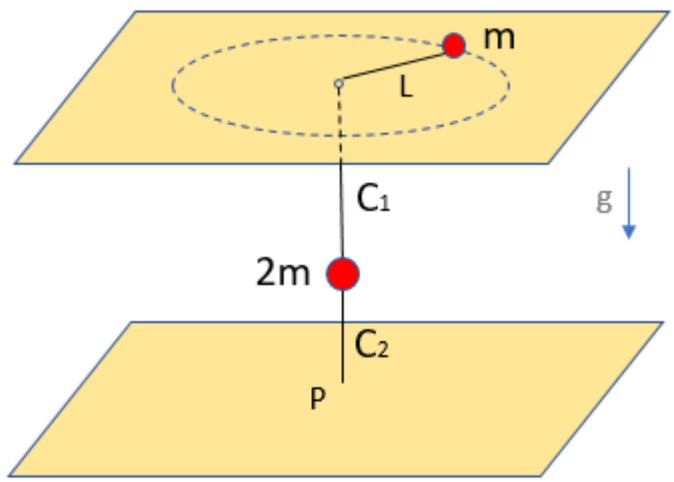
a) Determine las tensiones de las cuerdas C_1 y C_2 (1 pto.)

Si en un momento se corta la cuerda C_2 determine, a partir de ese instante (t = 0)

b) una expresión para velocidad angular ($d\theta/dt$) de la partícula 1 en función de su distancia ρ al agujero (1.5 pts).

c) una expresión para la componente radial ($d\rho/dt$) de la velocidad de la partícula 1 en función de su distancia ρ al agujero (1.5 pts)

d) distancia máxima de la partícula 1 al agujero (ρ_{max}), suponiendo que la partícula 2 no alcanza a chocar con la placa superior en su movimiento ascendente. (2 pts.)



Problema 1

El momento de inercia del sistema de partículas con respecto al pivote está dado por $I_O = \frac{5}{4}mL^2$. Por otra parte, consideramos todos los torques externos, cuya suma satisface la expresión $\sum \boldsymbol{\tau}_O = -\frac{3}{2}mgL\sin\theta\hat{\mathbf{k}}$. De lo anterior se obtiene que la ecuación para el ángulo θ está dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0. \tag{1}$$

La posición del centro de masas está dada por $\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{3}{4}L\hat{\boldsymbol{\rho}}$. De esta manera se deduce que la ecuación de movimiento en coordenadas polares ($\hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) satisface

$$-\frac{3}{2}mL\dot{\theta}^2 = 2mg\cos\theta + F_\rho, \tag{2a}$$

$$\frac{3}{2}mL\ddot{\theta} = -2mg\sin\theta + F_\theta. \tag{2b}$$

Como el sistema se suelta desde el reposo en el ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, se cumple que $\dot{\theta}(\frac{\pi}{4}) = 0$. De la Ec. (1) se obtiene que la aceleración angular en dicho punto satisface $\ddot{\theta}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{6g}{5\sqrt{2}L}$. En consecuencia se obtiene que $F_\rho(\frac{\pi}{4}) = -\frac{2mg}{\sqrt{2}}$ y $F_\theta(\frac{\pi}{4}) = \frac{19mg}{5\sqrt{2}}$, de tal manera que se cumple

$$\left\|\mathbf{F}(\tfrac{\pi}{4})\right\| = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{461}{2}}mg. \tag{3}$$

La componente relevante del momento angular es en $\hat{\mathbf{k}}$, y su magnitud está dada por

$$L = I_0\dot{\theta}. \tag{4}$$

Si calculamos la derivada temporal del momento angular podremos obtener la ecuación de mov. para el ángulo θ. Queda propuesto para el lector comprobar que dicha ecuación es equivalente a la Ec. (1). Dada la geometría del problema resulta trivial encontrar $\theta = 0$ como punto de equilibrio. Si linealizamos la Ec. (1) en torno a $\theta = 0$ se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\theta = 0, \tag{5}$$

y entonces la frecuencia de pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega^2_{\text{p.o.}} = \frac{6g}{5L}. \tag{6}$$

En el caso de una una barra uniforme de largo D y masa total $2m$, el momento de inercia con respecto a su extremo está dado por $I_O = \frac{2}{3}MD^2$. Por otra parte, la posición del centro de masas satisface $\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{D}{2}\hat{\boldsymbol{\rho}}$. De lo anterior se deduce que la ecuación que satisface el ángulo θ, a partir de la ecuación de torque, está dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2D}\sin\theta = 0. \tag{7}$$

La Ec. (7) es análoga a la Ec. (1), y entonces se obtiene directamente que el largo D tiene que estar dado por

$$D = \frac{5}{4}L. \tag{8}$$

Problema 2

Las fuerzas externas que actúan sobre la estructura son: roce $F_r\hat{\mathbf{x}}$, normal $N\hat{\mathbf{y}}$, peso $-mg\hat{\mathbf{y}}$ y elástica de cada resorte $-kx\hat{\mathbf{x}}$. De allí se deduce que la ecuación de movimiento relevante, es decir, la del eje $\hat{\mathbf{x}}$, está dada por

$$M\ddot{x} = -2kx - F_r. \tag{9}$$

Asimismo, se deduce que la ecuación de torque con respecto al centro de masas está dada por

$$I_{\text{CM}}\ddot{\theta} = F_rR. \tag{10}$$

Como la estructura rueda sin resbalar, se cumple que $\dot{x} = R\dot{\theta}$, y en consecuencia $\ddot{x} = R\ddot{\theta}$. De esta manera, la Ec. (10) se puede escribir como $I_{\text{CM}}\ddot{x} = F_rR^2$, y entonces se deduce

$$F_r = -\frac{2kxI_{\text{CM}}}{I_{\text{CM}} + MR^2}. \tag{11}$$

Sabiendo que la fuerza de roce estático debe cumplir $|f_R| < \mu_eMg$, y dado que la posición inicial

$x_0 = \delta_0$ es la máxima para que ruede sin resbalar, se obtiene que el coeficiente roce estático está dado por

$$\mu_e = \frac{4k\delta_0}{7Mg} \tag{12}$$

Usando las Ecs. (9) y (11) se obtiene directamente la ecuación de movimiento, la cual está dada por

$$\ddot{x} + \frac{10k}{7M}x = 0. \tag{13}$$

La Ec. (13) corresponde a la de un oscilador armónico simple, cuya frecuencia está dada por

$$\omega^2 = \frac{10k}{7M}. \tag{14}$$

El tiempo que se pide es $\frac{1}{4}$ del período de oscilación. Teniendo en cuenta que $\frac{2\pi}{T} = \omega$, el tiempo t^* requerido está dado por

$$t^* = \pi\sqrt{\frac{7M}{40k}}. \tag{15}$$

Problema 3

Designamos T_1 la tensión de la cuerda C_1 y T_2 la tensión de la cuerda C_2. Las ecuaciones de movimiento para cada masa están dadas respectivamente por $T_1 = m\omega_0^2 L$ y $T_2 = T_1 - 2mg$. Dado el valor de $\omega_0^2 = \frac{4g}{L}$ se obtiene directamente que

$$T_1 = 4mg, \tag{16a}$$
$$T_2 = 2mg. \tag{16b}$$

Una vez se corta la cuerda C_2 las ecuaciones de movimiento para la masa de arriba y abajo están dadas respectivamente por

$$-m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -T, \tag{17a}$$
$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0, \tag{17b}$$
$$m\ddot{z} = T - 2mg. \tag{17c}$$

De la Ec. (17b) se obtiene que

$$\dot{\theta} = \frac{L^2\omega_0^2}{\rho^2}. \tag{18}$$

Dado que la cuerda C_1 es ideal, y en particular, inextensible, se cumple $\ddot{z} = \ddot{\rho}$, y entonces se obtiene

$$\ddot{\rho} = \frac{4L^3 g}{3}\frac{1}{\rho^3} - \frac{2g}{3}. \tag{19}$$

Usamos la relación $\ddot{\rho} = \dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{d\rho}$, y sabiendo que $\dot{\rho}(\rho_{\max}) = 0$, integramos la Ec. (19), entonces

$$\frac{4L^3 g}{3}\int_L^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{2g}{3}\int_L^{\rho_{\max}} d\rho = 0. \tag{20}$$

La Ec. (20) es una ecuación algebraica para $\rho_{\max}$, y al resolverla se obtiene

$$\rho_{\max} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}L. \tag{21}$$