MECANICA (FI2001) **CONTROL 1** 15 diciembre 2021

Prof.: Patricio Aceituno
Prof. Auxiliares: Mauricio Rojas, Edgardo Rosas, Javier Huenupi

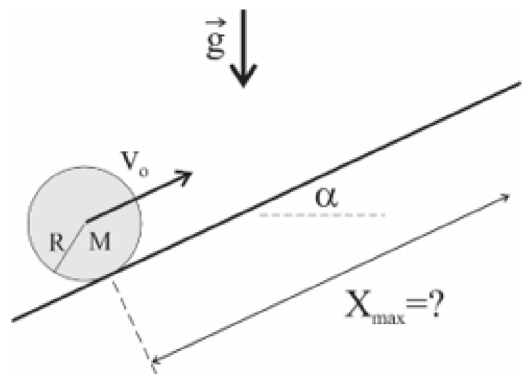
Tiempo: 3 horas

1. Una esfera homogénea de masa M y radio R es lanzada pendiente arriba sobre una superficie inclinada un ángulo α respecto de la horizontal, de manera que la rapidez inicial de su centro es igual a v_o.

a) Suponiendo que la esfera rueda sin resbalar sobre la superficie, determine la magnitud de la fuerza de roce estático entre la esfera y la superficie. [2 puntos]

b) Determine el mínimo coeficiente de roce estático que asegura que la esfera no resbala. [2 puntos]

c) Si el coeficiente de roce estático tiene el valor mínimo determinado en b), calcule la distancia X_{max} que la esfera recorre hasta que se detiene y empieza a descender. [2 puntos]



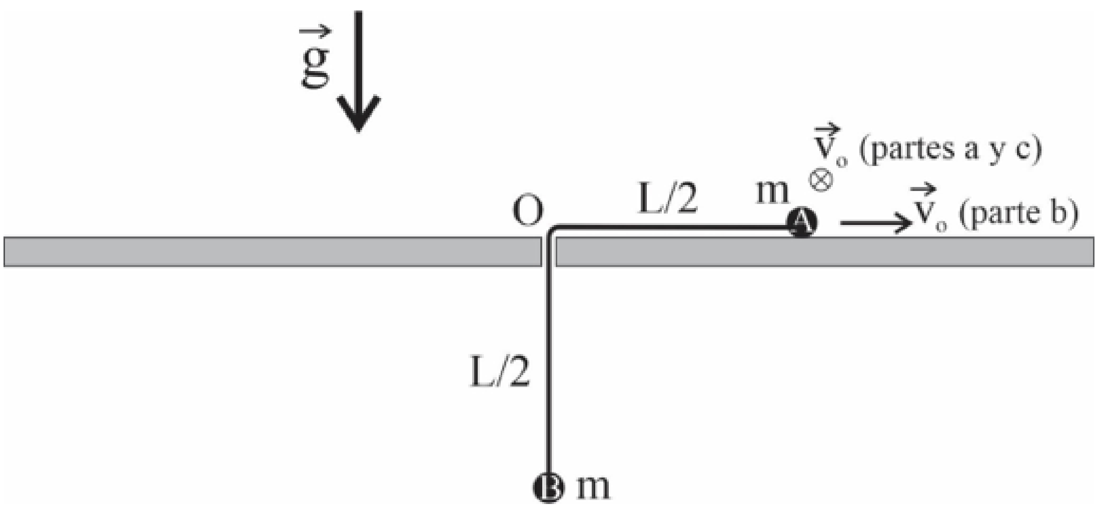
Indicación: Momento de inercia de esfera con respecto a eje que la atraviesa por su centro: $\frac{2}{5}MR^2$

2. Dos partículas idénticas de masa m están unidas por una cuerda ideal sin masa de largo L. En la condición inicial la partícula A se encuentra sobre una mesa lisa horizontal mientras que la partícula B cuelga por el orificio O, quedando la mitad de la cuerda sobre la mesa, como muestra la figura. No existe ningún roce.

a) Determine la rapidez v_o que debe tener la partícula A de manera que en su movimiento se mantenga describiendo una circunferencia de radio $L/2$ en torno a O. `[2 puntos]`

b) Si se da a la partícula A una rapidez inicial v_o alejándose de O, determine el máximo valor que puede tener v_o tal que la partícula B no choque con la mesa. `[2 puntos]`

c) Si se da a la partícula A una rapidez inicial v_o en la dirección perpendicular a la cuerda, determine el máximo valor que puede tener v_o tal que la partícula B no choque con la mesa. `[2 puntos]`

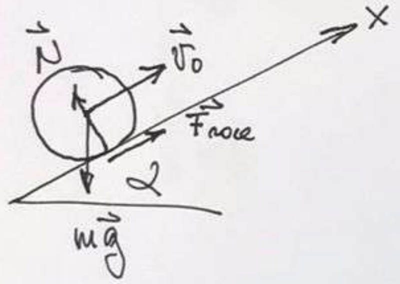


OBSERVACIONES

- Entregar respuestas de los dos problemas en 2 archivos SEPARADOS.
- Preocuparse que el texto de las respuestas sea legible.
- Las hojas de respuesta deben contener el RUT y la firma del estudiante. En el acto de firmar el estudiante certifica que su respuesta la obtuvo en forma personal, sin ayuda de terceras personas.

Examen 2021-2

(1)



$$\hat{i})\quad m\ddot{x}_{cm} = -mg \operatorname{sen}\alpha + F_r$$

$$\hat{j})\quad 0 = N - mg\cos\alpha \rightarrow N = mg\cos\alpha$$

$$I_{cm}\ddot{\theta} = -F_r \cdot R$$

CONDICIÓN DE NO DESLIZAMIENTO

$\vec{V}_P = \vec{V}_{cm} + \vec{v}_P'$ P: punto de contacto $\vec{V}_P = 0$

$$0 = V_{cm} - R\dot{\theta} \rightarrow v_{cm} = \dot{x}_{cm} = R\dot{\theta} \rightarrow \ddot{x}_{cm} = R\ddot{\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{i})\ MR\ddot{\theta} &= -Mg\operatorname{sen}\alpha + F_r \\ I_{cm}\ddot{\theta} &= -F_r R \end{aligned}\right\} \quad \frac{MR}{I_{cm}} = \frac{F_r - Mg\operatorname{sen}\alpha}{-F_r R}$$

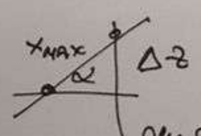
$$-MR^2 F_r = I_{cm}F_r - I_{cm}Mg\operatorname{sen}\alpha$$

$$F_r = \frac{I_{cm}Mg\operatorname{sen}\alpha}{I_{cm} + MR^2} = \frac{\frac{2}{5}M^2 g\operatorname{sen}\alpha\, R^2}{\frac{2}{5}MR^2 + MR^2} =$$

a) $\boxed{F_r = \frac{2}{7}Mg\operatorname{sen}\alpha}$ (2 PTS)

b) $F_r \leq \mu_e N \rightarrow \frac{2}{7}Mg\operatorname{sen}\alpha \leq \mu_e Mg\cos\alpha$

$$\boxed{\mu_e \geq \frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha} \quad (2\text{ PTS})$$



$\operatorname{sen}\alpha = \Delta z / X_{MAX}$

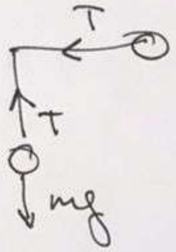
c) SE CONSERVA ENERGÍA MECANICA TOTAL

$$K_i + MgZ_i = K_f + MgZ_f \qquad K_f = 0$$

$$\frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2_{t=0} = Mg\Delta z \qquad V_0 = R\dot{\theta}\big|_{t=0}$$

$$\frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\cdot\frac{V_0^2}{R^2} = \frac{7}{10}\cancel{M}V_0^2 = \cancel{M}g\Delta z = g\operatorname{sen}\alpha\, X_{MAX} \quad \boxed{X_{MAX} = \frac{7V_0^2}{10g\operatorname{sen}\alpha}} \ (2\text{PT})$$

2 a)

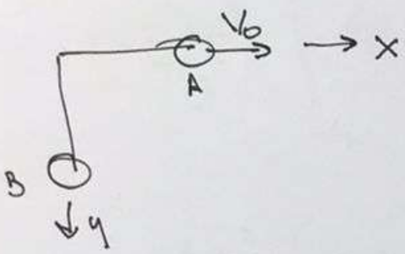


$$T = mg$$

$$-\cancel{m}\frac{V_0^2}{L/2} = -T = -\cancel{m}g$$

$$V_0^2 = \frac{gL}{2} \rightarrow V_0 = \left(\frac{gL}{2}\right)^{1/2}$$

b)



MASA A : $m\ddot{x} = -T$ (1)

MASA B $m\ddot{y} = mg - T$ (2)

~~(1)=(2)~~: $x + y = L \rightarrow \ddot{y} = -\ddot{x}$

MASA B: $-m\ddot{x} = mg - T$ (3)

(1) − (3) $2m\ddot{x} = -mg \rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{2}$

$$\dot{x} = V_0 - \frac{g}{2}t \rightarrow x = \frac{L}{2} + V_0 t - \frac{g}{4}t^2$$

TIEMPO HASTA DETENCIÓN $0 = V_0 - \frac{g}{2}t \rightarrow \boxed{t^* = \frac{2V_0}{g}}$

SE IMPONE LA CONDICIÓN QUE EN t^* MASA A ESTÉ EN $x = L$

$\cancel{L = \frac{L}{2} - \frac{g}{2}\left(\frac{2V_0}{g}\right.}$ $L = \frac{L}{2} + V_0\left(\frac{2V_0}{g}\right) - \frac{g}{4}\left(\frac{4V_0^2}{g^2}\right)$

$$\therefore V_0^2 = \frac{gL}{2} \rightarrow V_0 = \left(\frac{gL}{2}\right)^{1/2}$$

c) Ec. MOV. MASA A

$\hat{\rho}$) $m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 = -T$

$\hat{\theta}$) $\rho^2\dot{\theta} = \frac{L}{2}V_0 \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{2}\frac{V_0}{\rho^2}$

Ec. MOV. MASA B

$m\ddot{y} = Mg - T$ $\rho + y = L \rightarrow \ddot{y} = -\ddot{\rho}$

$$\hat{\rho})\quad M\ddot{\rho} = M\rho\frac{L^2}{4}\frac{v_0^2}{\rho^4} - T \qquad\qquad 2\cancel{M}\ddot{\rho} = \frac{\cancel{M}L^2v_0^2}{4}\frac{1}{\rho^3} - \cancel{M}g$$

$$\hat{z})\quad -M\ddot{\rho} = Mg - T$$

$$\ddot{\rho} = \frac{L^2v_0^2}{8}\frac{1}{\rho^3} - \frac{g}{2}$$

$$\int_0^0 \dot{\rho}\,d\dot{\rho} = \frac{L^2v_0^2}{8}\int_{L/2}^{L}\frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{g}{2}\int_{L/2}^{L}d\rho$$

$$0 = \frac{L^2v_0^2}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\Big|_{L/2}^{L}\right) - \frac{g}{2}\frac{L}{2}$$

$$0 = \frac{L^2v_0^2}{16}\left(\frac{4}{L^2} - \frac{1}{L^2}\right) - \frac{gL}{4}$$

$$\boxed{v_0^2 = \frac{4}{3}gL} \qquad \boxed{v_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{gL}}$$