Tarea 4

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Suponga que la permitividad de un medio lineal puede escribirse como

$$\epsilon = \epsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)\,. \tag{1}$$

Suponga que $\mu = \mu_0$ para todas las frecuencias y que la conductividad es nula. Una onda electromagnética se propaga en este material, con campos dados por:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{y}\,, \qquad \vec{B} = B_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{z} \tag{2}$$

a) Determine la relación entre ω y k. Discuta los casos $\omega > \omega_p$ y $\omega < \omega_p$

b) Determine la relación entre las amplitudes E_0 y B_0

Pregunta 2

Supongamos una antena especial que emite ondas electromagnéticas en forma isotrópica, o sea, que las magnitudes de los campos eléctricos y magnéticos no varían con la orientación y solo dependen de la distancia r a la antena (simetría esférica)

Elija un sistema de coordenadas esféricas cuyo origen coincide con la posición de la antena cuyo eje polar está orientado de tal manera que el campo eléctrico de la onda electromagnética emitida por la antena tenga solamente una componente en la dirección θ, o sea, $E_\theta \neq 0$, $E_r = 0$, $E_\phi = 0$.

a) Demuestre que una solución particular de la ecuación de onda en coordenadas esféricas es:

$$E_\theta(r) = \frac{E_0}{r}\exp\{i(\omega t - kr)\} \tag{3}$$

b) Calcule el campo magnético B para la onda de la pregunta a)

c) Para la onda de la pregunta a) determina la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación

Nota: Se pide expresar todas sus respuestas en función de los datos: $\omega\,, k$ y E_0

Tarea 4

P1

Nos dicen que tomemos $\epsilon = \epsilon_0 (1 - \omega_p^2/\omega^2)$ y $\mu = \mu_0$. En un medio sin carga ni conductividad $(\rho = g = 0)$ tenemos las ecs. de Maxwell en materiales

$$\text{(i)}\quad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \text{(iii)}\quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{(ii)}\quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(iv)}\quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

como es un material lineal $\vec{E} = \epsilon \vec{D}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\text{(i)} \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \text{(iv)}\quad \nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Usando los ansatz entregados $\tilde{\vec{E}} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{y}$ ^ $\tilde{\vec{B}} = B_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{k}$, debido a (i) tenemos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial (E_0 e^{i(kx-\omega t)})}{\partial y} = 0$$

Usando (ii) $\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial z}(B_0 e^{i(kx-\omega t)}) = 0$, que tampoco entrega nueva información, mientras que con (iii)

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\Leftrightarrow -\cancel{\frac{\partial E(x,t)}{\partial z}}\, \hat{\imath} + 0 \hat{\jmath} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} \hat{k} = + i \omega B_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{k}$$

$$\Leftrightarrow ikE_0 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}\, \cancel{\hat{k}} = i\omega B_0 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}\, \cancel{\hat{k}}$$

$$\Leftrightarrow kE_0 = \omega B_0 \quad \text{(v)}$$

y usando (iv) $\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \dot{\vec{E}} \Leftrightarrow -\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} \hat{\jmath} = -i\omega\mu\epsilon E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{\jmath}$

$$\Leftrightarrow -ikB_0 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = -i\omega\mu\epsilon E_0 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}$$

$$\Leftrightarrow kB_0 = \omega\mu\epsilon E_0 \quad \text{(vi)}$$

usando (v) y (vi) $\frac{\omega B_0}{k} = \frac{kB_0}{\omega\mu\epsilon} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{k^2}{\mu\epsilon} = \frac{k^2}{\mu\epsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)} \Leftrightarrow \overset{\text{(I)}}{\omega^2 - \omega_p^2 = \frac{k^2}{\mu\epsilon_0}} \Leftrightarrow \overset{\text{(II)}}{\omega = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon_0} + \omega_p^2}}$

de (I) notamos que si $\omega > \omega_p \Rightarrow k \in \mathbb{R}$ y los cpos son campos viajeros en la dirección de $\hat{\imath}$, mientras que si $\omega < \omega_p \Rightarrow k \in \mathbb{C}$ y las ondas ya no viajan y se atenuan en la dirección de $\hat{\imath}$

b) De (25) tenemos la relación $E_0 = \frac{\omega(k)}{k} B_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon_0} + \left(\frac{\omega_p}{k}\right)^2}\, B_0$

P2

a) Tenemos que como $\vec{E}$ es isotrópico (no depende de la dirección) no puede depender explícitamente de θ ni ϕ, o sea solo puede depender de la distancia r al origen. Por enunciado nos dicen que consideremos $E_r = E_\phi = 0$ así que la componente en θ, $E_\theta(r,t)$, va a seguir la ec. de onda

$$\nabla^2 E_\theta(r,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_\theta(r,t)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial r} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE_\theta) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2}$$

esta es una EDP que podemos resolver usando el método de separación de variables definiendo $E_\theta(r,t) = R(r)T(t)$,

$$\Leftrightarrow T(t)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r)) = \frac{1}{v^2}R(r)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \qquad / \cdot \frac{1}{R(r)T(t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{rR(r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r)) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2$$

con lo que obtenemos dos EDOs separadas

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r)) = -k^2 rR(r) \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + k^2v^2T(t) = 0$$

oscilador armónico

usando que $v = \omega/k$ tenemos que la segunda EDO tiene como solución $T(t) = c_1 e^{i\omega t}$ mientras que para la primera usamos como ansatz que la solución es de la forma $R(r) \propto \frac{1}{r}e^{\pm i\alpha r}$, reemplazamos

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{1}{r}e^{\pm i\alpha r}\right) = -k^2 r\frac{1}{r}e^{\pm i\alpha r} \Leftrightarrow -\alpha^2 e^{\pm i\alpha r} = -k^2 e^{\pm i\alpha r} \quad \therefore \alpha = k$$

$$\therefore R(r) = \frac{c_2}{r}e^{-ikr}, \quad T(t) = c_1 e^{i\omega t} \Rightarrow E_\theta(r,t) = R(r)T(t) = \frac{E_0}{r}e^{i(\omega t - kr)}$$

b) Usamos las ecs. de Maxwell en el vacío usando como ansatz que $\vec{B}$ solo tiene componente en $\hat{\phi}$ (ya que $\vec{E}$ tiene componente en $\hat{\theta}$ y viaja en la dirección de $\hat{r}$) y que tiene el mismo tipo de oscilación

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}} = \tilde{B}(r)e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{E}_\theta(r,t))\hat{\phi} = -i\omega\tilde{B}(r)e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi} \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(E_0 e^{i(\omega t - kr)})\hat{\phi} = -i\omega\tilde{B}(r)e^{i(\omega t-kr)}\hat{\phi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{ik}{r}E_0\cancel{e^{i(\omega t - kr)}} = -i\omega\tilde{B}(r)\cancel{e^{i(\omega t - kr)}} \Leftrightarrow \frac{k}{r}E_0 = \omega\tilde{B}(r) \Rightarrow \tilde{B}(r) = \frac{kE_0}{\omega r}$$

$$\therefore \tilde{\vec{B}}(r,t) = \frac{kE_0}{\omega r}e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi}$$

c) Identificamos que la velocidad de propagación es $v = \frac{\omega}{k}$, la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$