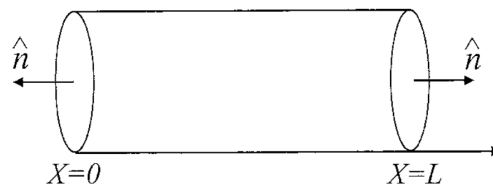


Tarea 2

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

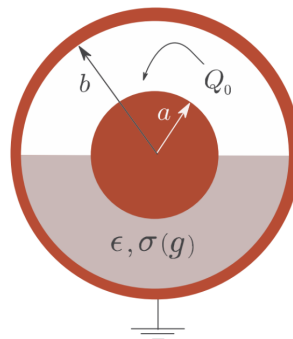
Una varilla delgada de dieléctrico de sección A se extiende sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$. La polarización de la varilla es a lo largo de su longitud, y está dada por $P_x = ax^2 + b$. Encuentre la densidad volumétrica de carga de polarización y la carga superficial de polarización en cada extremo. Demuestre explícitamente que la carga total de polarización se anula en este caso.



Pregunta 2

Se tienen dos cascarones esféricos conductores de radios a y b . El conductor interior se carga con Q_0 mientras que el exterior se mantiene conectado a tierra. Considerando que la mitad del espacio entre ambos conductores está lleno con un material de constante dieléctrica ϵ y conductividad σ (ver figura), determine:

- La evolución, en el tiempo, de la carga en la esfera interior
- La energía total disipada por el medio material



Pregunta 3

Considere un modelo clásico para un átomo de hidrógeno, en que el electrón (de carga $-e$) gira en una órbita circular de radio R en torno a un protón de carga e , como se muestra en la figura.

- a) Si se modela la órbita como si fuese un circuito, muestre que ésta tiene un momento dipolar magnético \vec{m} dado por

$$\vec{m} = -\frac{1}{2}ev_eR\hat{z} \quad (1)$$

donde $v_e = ||\vec{v}_e||$ y \vec{v}_e es la velocidad con que rota el electrón.

- b) Imagine ahora que este átomo se encuentra en presencia de un campo magnético externo $\vec{B} = B\hat{z}$, para el cual B puede ser positivo o negativo. Muestre que, si en presencia de \vec{B} el electrón continua moviéndose en una órbita circular, la cual (como aproximación) mantiene el mismo radio R , la rapidez del electrón tendría que variar en una cantidad

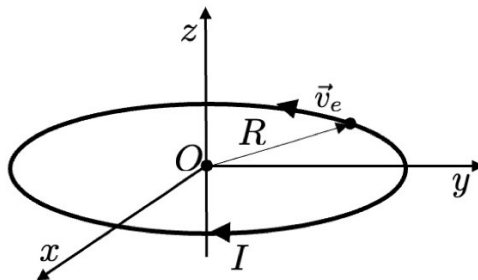
$$\Delta v_e \approx \frac{eRB}{2m_e}, \quad (2)$$

donde m_e es la masa del electrón. Para que la ecuación sea válida, necesita suponer que Δv_e es una cantidad muy pequeña.

- c) Tomando su resultado en b), muestre que debido a la presencia de \vec{B} , el momento magnético asociado a la órbita del electrón cambió en una cantidad:

$$\Delta \vec{m} \approx -\frac{e^2R^2}{4m_e}\vec{B}, \quad (3)$$

- d) A partir de su resultado en c), discuta por qué el efecto encontrado daría origen a diamagnetismo (es decir, a una disminución del campo magnético adentro de la órbita del electrón).



Tarea 2

P1

En presencia de materiales dieléctricos, se inducen cargas de polarización dadas por

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} ; \quad \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

donde \vec{P} es la polarización del medio.

En este caso nos dan la polarización en coordenadas cartesianas

$$\vec{P}_x = (ax^2 + b)\hat{i}$$

Entonces las densidades de carga inducidas serían

$$\square \sigma_b(x=0) = \vec{P}_x(x=0) \cdot (-\hat{i}) = b\hat{i} \cdot (-\hat{i}) = -b$$

$$\square \sigma_b(x=L) = \vec{P}_x(x=L) \cdot \hat{i} = (aL^2 + b)\hat{i} \cdot \hat{i} = aL^2 + b$$

$$\square \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -2ax$$

Estas son densidades, así que para las cargas totales integramos cada una

$$\triangleright Q_{\sigma_b(x=0)} \equiv \iint \sigma_b(x=0) ds = -bA$$

$$\triangleright Q_{\sigma_b(x=L)} \equiv \iint \sigma_b(x=L) ds = (aL^2 + b)A$$

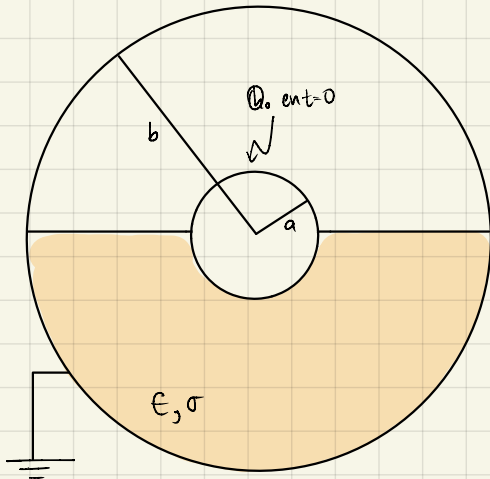
$$\triangleright Q_{\rho_b} \equiv \iiint \rho_b(x) dV = \iiint -2ax \, dx dy dz = \overbrace{\iint dy dz}^{=A} -A \int_0^L 2ax \, dx = -Aa x^2 \Big|_0^L = -AaL^2$$

Y la carga total de toda la vara sería la suma de cada contribución

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\sigma_b(x=0)} + Q_{\sigma_b(x=L)} + Q_{\rho_b} = 0, \text{ que es lo que nos piden demostrar. } \square$$

P2

a) Similar al Aux 8, integramos la ec. de continuidad en un volumen de una esfera de radio $r > a$



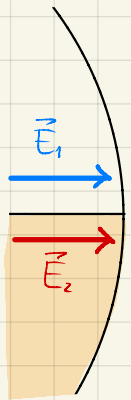
$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \int_V d\tau'$$

$$\Leftrightarrow \int_V \nabla \vec{J} d\tau' = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau'$$

$$\Leftrightarrow \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S}' = - \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}') d\tau' \equiv - \frac{d}{dt} Q(r,t) \quad (1)$$

donde definimos $Q(r,t) \equiv \int_V \rho d\tau'$ como la carga total dentro de la esfera de radio r .

Ahora, por simetría del problema (cascarones esféricos y concéntricos), el campo eléctrico solo apuntaría en \hat{r} y dependería solo de r , $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, pero como tenemos la mitad del "condensador" con un material dieléctrico y la otra mitad con vacío, a priori podríamos tener un campo eléctrico diferente para cada sección



Pero por condiciones de borde $E_{above}'' = E_{below}'' \Rightarrow E_1 = E_2$

∴ El ϵ_p es el mismo dentro del condensador para un mismo r

Volviendo a (1), considerando el material naranja como óhmico, tenemos la relación

$$\vec{J}_i(\vec{r}) = \sigma_i \vec{E}(\vec{r})$$

por lo que si \vec{E} es simétrico (vale lo mismo en magnitud para un mismo r), entonces \vec{J} también así que puede salir de la integral de (1). Sin embargo, en la parte "superior" no hay material, por lo que la conductividad para $\theta \in (0, \pi/2)$ sería 0 y \vec{J} también, así que la integral sería

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S}' &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cancel{J_1(r)} r^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} J_2(r) r^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' \\ &= J_2(r) r^2 \phi' \Big|_0^{2\pi} \cdot -\cos\theta' \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\pi r^2 J_2(r) \end{aligned}$$

y usando que $J_2(r) = \sigma E(r) \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\pi\sigma r^2 E(r)$

$$(1): 2\pi\sigma r^2 E(r) = - \frac{d}{dt} Q(r,t) \quad (2)$$

así que debemos expresar E en función de Q para obtener una EDO para $Q(t,r)$.

Como tenemos un material dieléctrico, usaremos Ley de Gauss modificada

$$\oiint_{\text{vol}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} = Q_e(r, t) \quad (3)$$

y como tenemos la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, en este caso E es simétrico $\forall r$ y tenemos dos ctes dieléctricas distintas

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = 1 \cdot \vec{E} \quad ; \quad \vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}$$

donde $\epsilon_1 = 1$, ya que es vacío.

$$\Rightarrow (3): \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} D_1(r) r^2 \sin\theta d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} D_2(r) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = Q_e(r, t)$$

$$\Leftrightarrow E(r) 2\pi r^2 + \frac{E(r)}{\epsilon} 2\pi r^2 = Q_e(r, t) \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\epsilon}{\epsilon+1} \frac{Q_e(r, t)}{2\pi r^2} \hat{r}, \text{ para } a \leq r < b$$

reemplgando esto en (2) $\Rightarrow \frac{\epsilon \sigma}{\epsilon+1} Q(r, t) = -\dot{Q}(r, t) \Leftrightarrow \dot{Q}(t) + \frac{\epsilon \sigma}{\epsilon+1} Q(t) = 0$

$$\Rightarrow Q(t) = C_1 e^{-\frac{\epsilon \sigma}{\epsilon+1} t}$$

imponiendo condición inicial $Q(t=0) = Q_0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\epsilon \sigma}{\epsilon+1} t}$

* Debido a que la esfera está rodeada de material dieléctrico, habrám cargas ligadas, superficiales y volumétricas, pero estas cargas no los consideramos porque están rodeando la esfera y nos preguntan por las cargas en la esfera

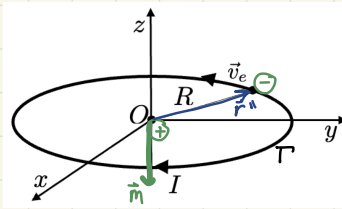
b) Para calcular la energía total disipada notamos que la esfera pierde toda su carga en $t \rightarrow \infty$, por lo que solo necesitamos calcular la energía inicial.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{vol}} E^2(\vec{r}) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} E^2(\vec{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= 2\pi \epsilon_0 \left[\int_0^a E^2(\vec{r}) r^2 dr + \int_a^b E^2(\vec{r}) r^2 dr + \int_b^{\infty} E^2(\vec{r}) r^2 dr \right]$$

$$= 2\pi \epsilon_0 \int_a^b \frac{\epsilon^2}{(\epsilon+1)^2} \frac{Q_0^2}{4\pi^2 r^4} r^2 dr = -\frac{\epsilon \epsilon^2}{(\epsilon+1)^2} \frac{Q_0^2}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

④



$$\begin{aligned} \cdot \vec{r}'' &= R \hat{\rho} \\ \cdot d\vec{r}'' &= R d\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

curva que coincide con la línea de corriente.

Sabemos que el momento magnético está dado por $\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r}'' \times d\vec{r}''$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \cdot I \int_0^{2\pi} R \hat{\rho} \times R d\theta \hat{\theta} \quad ; \quad \hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} I R^2 \int_0^{2\pi} \hat{k} d\theta = \frac{1}{2} I R^2 \hat{k} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot I R^2 \hat{k} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Luego, notamos que la corriente está dada por la carga que se mueve en cada ciclo por lo que $I = \frac{-e}{T}$, con T el periodo.

Además, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ con ω la velocidad angular y $v_e = \omega \cdot R$

$$\begin{aligned} \text{Por lo anterior, } \vec{m} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-e}{T} \cdot R^2 \hat{k} \cdot 2\pi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-e}{\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \omega \cdot R^2 \hat{k} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{e}{2} v_e \cdot R \hat{k}}$$

$$; \quad v_e = \omega \cdot R.$$

obteniéndose lo pedido. //

⑤ Notamos que la \vec{F} de Lorentz a la que está sometida inicialmente es:

$\vec{F} = q\vec{E}$ ya que no hay campo magnético.

$$\text{Así, } \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\rho} \quad ; \quad \text{ya que } \vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\rho} \quad \text{y } q = -e$$

$$\Rightarrow -m a_c \hat{\rho} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\rho} \quad ; \quad \text{pero } a_c = \frac{v_e^2}{R}$$

$$\Rightarrow m_e \frac{v_e^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R m_e}}}$$

Luego, al agregar un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, la fuerza de Lorentz será:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \text{con } q = -e.$$

En efecto, $-m_e \frac{v_f^2}{R} \hat{\rho} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\rho} + -e v_f \hat{\theta} \times B \hat{z}$, con v_f la velocidad final

$$m_e \frac{v_f^2}{R} \hat{\rho} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\rho} + e v_f B \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow m_e \frac{v_f^2}{R} - e v_f B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad / \cdot \frac{R}{m_e}$$

$$\Rightarrow v_f^2 - \frac{eBR}{m_e} v_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}$$

$$\Rightarrow v_f^2 - v_e^2 = \frac{eBR}{m_e} v_f$$

$$\Rightarrow (v_f + v_e)(v_f - v_e) = \frac{eBR}{m_e} v_f \Rightarrow (v_f - v_e) = \frac{eBR}{m_e} \frac{v_f}{v_f + v_e}$$

como Δv_e es muy pequeña, $v_f \approx v_e$

$$\Rightarrow \Delta v_e = \frac{eBR}{m_e} \frac{v_f}{2v_f}$$

$$\Rightarrow \Delta v_e = \frac{eBR}{2m_e}$$

obteniéndose lo pedido //

© Utilizando la expresión obtenida en ©, obtenemos:

$$\vec{m}_f - \vec{m}_e = -\frac{1}{2} e v_f R \hat{z} + \frac{1}{2} e v_e R \hat{z}$$

; ya que se tiene la misma carga con \neq velocidad. Además se mantiene el radio R en ambos casos.

$$\Delta \vec{m} = -\frac{(v_f - v_e)}{2} e R \hat{z}$$

$$= -\Delta v_e \frac{eR}{2} \hat{z}$$

$$= -\frac{eRB}{2m_e} \frac{eR}{2} \hat{z} \quad \text{i por b.}$$

$$= -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \hat{z} \quad \vec{B} \text{ por enunciado.}$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B} \quad \text{obteniéndose lo pedido //$$

© Podemos notar que se calculó $\Delta \vec{m}$ y nos entrega un resultado negativo. Esto nos dice que el momento magnético disminuye. Luego, notamos que estamos frente al caso en que al aplicar un campo, las cargas se alinean en sentido contrario por lo que el momento disminuye. Este es justamente el caso de un material dieléctrico en el cual el cambio en \vec{m} tiene dirección opuesta al campo \vec{B} .