Examen

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

INDICACIONES: *Es necesario que exponga y justifique adecuadamente cada uno de los razonamientos que llevan a las soluciones. Tiene 3 horas para realizar el examen. Puede utilizar apuntes de manera offline, como se ha establecido en U-Cursos. ¡Éxito!*

Problema 1: Ondas Electromagnéticas en el Vacío

Considere una onda electromagnética que viaja a través del vacío en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, la cual posee un **campo magnético** dado por

$$\boldsymbol{B} = B_1 \exp\left[i\left(kz - \omega t\right)\right]\hat{\boldsymbol{x}} + B_2 \exp\left[i\left(kz - \omega t - \phi\right)\right]\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{1}$$

donde B_1 y B_2 son números reales.

(a) Determine el **campo eléctrico** asociado a esta onda electromagnética y el promedio temporal del **vector de Poynting**.

(b) Demuestre que el promedio temporal del vector de Poynting satisface una **ecuación de continuidad** sin disipación.

(c) Ahora considere $B_1 = B_2 = B_0$ y $\phi = \pi/2$, grafique $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ (en sus expresiones reales) en función de z para un $t = 0$.

Problema 2: Ondas Electromagnéticas en Conductores

Considere la propagación de ondas electromagnéticas a través de un medio lineal con permitividad ϵ, permeabilidad μ, y conductividad g (todas cantidades conocidas), en la presencia de fuentes libres no nulas ρ_l y$\boldsymbol{J}_l$.

1. Escriba las **ecuaciones de Maxwell** para tal sistema.
2. Demuestre que cualquier densidad de carga inicial $\rho_l(0)$ decae a $e^{-1}\rho_l(0)$ en un **tiempo característico** $\tau \equiv \epsilon/g$. Compruebe además que $\rho_l \to 0$ cuando $t \to \infty$.
3. Considerando entonces el caso en que $\rho_l = 0$ derive, a partir de las ecuaciones de Maxwell, las **ecuaciones de onda modificadas** para el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y el campo magnético $\boldsymbol{B}$.
4. Tomando los "ansatze" de onda plana

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right], \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right], \tag{2}$$

derive, utilizando las ecuaciones de Maxwell, la **relación de dispersión**

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + \frac{ig}{\epsilon\omega}\right) \equiv (\alpha + i\beta)^2 \,, \tag{3}$$

donde $k^2 \equiv \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}$ y hemos explicitado la naturaleza compleja de $k = \alpha + i\beta$, con $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}$. Explique por qué el parámetro β está asociado a la **atenuación** de la onda electromagnética.

5. Encuentre una expresión explícita para la **longitud de penetración** $\delta \equiv 1/\beta$. Compruebe que $\delta \to \infty$ cuando $g \to 0$, y comente por qué esto es esperable.

6. Demuestre que cuando $g^2 \ll \epsilon^2\omega^2$, $\delta \approx \frac{2}{g}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$. Comente dicho resultado.

7. Demuestre que cuando $g^2 \gg \epsilon^2\omega^2$, $\delta \approx \frac{\lambda}{2\pi}$, donde λ es la longitud de onda en el conductor, $\lambda \equiv 2\pi/\alpha$. Comente dicho resultado.

8. Tome $\boldsymbol{k} = k\,\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{E}_0 = E_0\,\hat{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{B}_0 = B_0\,\hat{\boldsymbol{y}}$, donde, como sabemos, k, E_0 y B_0 son cantidades complejas. Escriba dichas cantidades en su forma polar, a decir,

$$k = |k|e^{i\varphi}, \quad E_0 = |E_0|e^{i\chi}, \quad B_0 = |B_0|e^{i\psi}. \tag{4}$$

Utilizando las ecuaciones de Maxwell:

   - Demuestre que

$$\psi - \chi = \varphi \tag{5}$$

   e interprete este resultado con un gráfico de la onda electromagnética atenuada.

   - Demuestre que

$$\frac{|B_0|}{|E_0|} = \frac{|k|}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\epsilon\,\omega}\right)^2}}. \tag{6}$$

9. Finalmente, compruebe que los campos eléctrico y magnético **reales** están dados, en la configuración del inciso anterior, por

$$\boldsymbol{E}(z,t) = |E_0|e^{-\beta z}\cos(\alpha z - \omega t + \chi)\,\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{B}(z,t) = |B_0|e^{-\beta z}\cos(\alpha z - \omega t + \chi + \varphi)\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{7}$$

PREGUNTAS EXTRA:

10. Calcule la densidad de energía promediada en el tiempo de una onda electromagnética plana en un medio conductor. Muestre que la contribución magnética siempre domina.

11. Muestre que la intensidad $I = \langle S \rangle$ está dada por $(\alpha/2\mu\omega)E_0^2 e^{-2\beta z}$.

Examen

P1

a) Tenemos $\tilde{\vec{B}} = B_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} + B_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\jmath}$, con $B_i \in \mathbb{R}$. Debido a que tenemos la relación

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}}{\omega} = \frac{k\hat{k}\times\tilde{\vec{E}}}{\omega} \quad (1)$$

usamos el ansatz que el cpo eléctrico es de la forma

$$\tilde{\vec{E}} = E_1 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\imath} + E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath} \quad (2)$$

reemplazando esto en (1) tenemos

$$\frac{k}{\omega}\hat{k}\times\left(E_1 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\imath} + E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath}\right) = \frac{k}{\omega}E_1 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\jmath} - \frac{k}{\omega}E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath}$$

$$= B_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} + B_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\jmath}$$

donde comprobamos que está bien nuestro ansatz y obtenemos relaciones entre E_i y B_i

$$E_1 = \frac{\omega}{k}B_2 \quad \text{y} \quad E_2 = -\frac{\omega}{k}B_1$$

por lo que el cpo. eléctrico sería $\tilde{\vec{E}} = \frac{\omega}{k}B_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\imath} - \frac{\omega}{k}B_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath}$ (2)

Ahora, tomamos la parte real de $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{B}}$

$$\triangleright\ \vec{E} \equiv \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}\} = \frac{\omega}{k}B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\imath} - \frac{\omega}{k}B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\jmath}$$

$$\triangleright\ \vec{B} \equiv \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{B}}\} = B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\imath} + B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\jmath}$$

Con lo que el vector de Poynting es

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\omega}{k\mu_0}\left[B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\imath} - B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\jmath}\right]\times\left[B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\imath} + B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\jmath}\right]$$

$$= \frac{\omega}{k\mu_0}\left[B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos^2(kz-\omega t)\right]\hat{k}$$

El promedio temporal de $\bar{S}$ se calcula como $\langle S\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{S}(t)\,dt$ con $T = 2\pi/\omega$

$$\Rightarrow \langle S\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\omega}{k\mu_0}\left[B_2^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t-\phi)\,dt + B_1^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t)\,dt\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\omega^2}{2\pi k\mu_0}\left[-\frac{B_2^2}{\omega}\int_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi}\cos^2(\Omega)\,d\Omega - \frac{B_1^2}{\omega}\int_{kz}^{kz-2\pi}\cos^2(\Omega')\,d\Omega'\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi k\mu_0}\left[-\frac{B_2^2}{2}\left(\Omega+\sin\Omega\cos\Omega\right)\Big|_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi} - \frac{B_1^2}{2}\left(\Omega'+\sin\Omega'\cos\Omega'\right)\Big|_{kz}^{kz-2\pi}\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\omega}{2k\mu_0}\left[B_2^2+B_1^2\right] = \frac{k}{2\omega\mu_0}\left[E_2^2+E_1^2\right]$$

b) Necesitamos demostrar que se cumple $\nabla\cdot\bar{S} + \partial_t u = 0$ para este caso, donde

$$\nabla\cdot\bar{S} = \frac{\omega}{k\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos^2(kz-\omega t)\right]$$

$$= -\frac{2\omega}{\mu_0}\left[B_2^2\cos(kz-\omega t-\phi)\sin(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos(kz-\omega t)\sin(kz-\omega t)\right] \quad (3)$$

entonces necesitamos $u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\frac{\omega^2}{k^2}\left(B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos^2(kz-\omega t)\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_1^2\cos^2(kz-\omega t) + B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi)\right)\right)$$

usamos que $k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$

$$= \frac{B_1^2}{\mu_0}\cos^2(kz-\omega t) + \frac{B_2^2}{\mu_0}\cos^2(kz-\omega t-\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\omega}{\mu_0}\left[B_1^2\cos(kz-\omega t)\sin(kz-\omega t) + B_2^2\cos(kz-\omega t-\phi)\sin(kz-\omega t-\phi)\right] \quad (4)$$

$\therefore\ \nabla\cdot\bar{S} + \partial_t u = (3) + (4) = 0$, así que se cumple la conservación

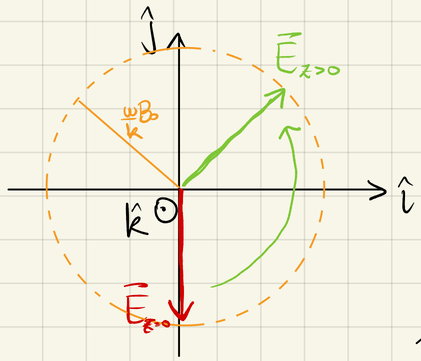
c) Tenemos $\bar{E} = \frac{\omega}{k}B_0\sin(kz)\hat{\imath} - \frac{\omega}{k}B_0\cos(kz)\hat{\jmath}$

$$\bar{B} = B_0\cos(kz)\hat{\imath} + B_0\sin(kz)\hat{\jmath}$$

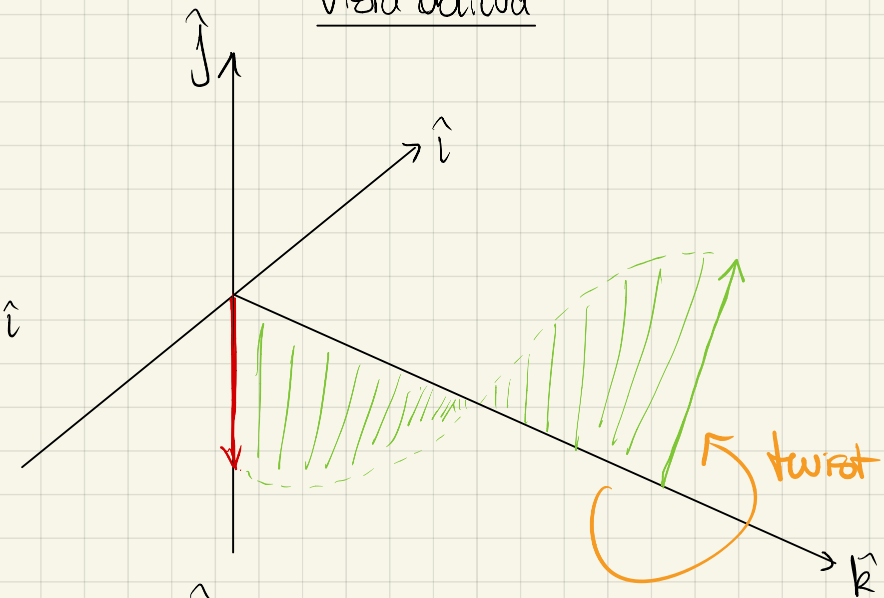
por lo que la polarización se va torziendo mientras se avanza en z

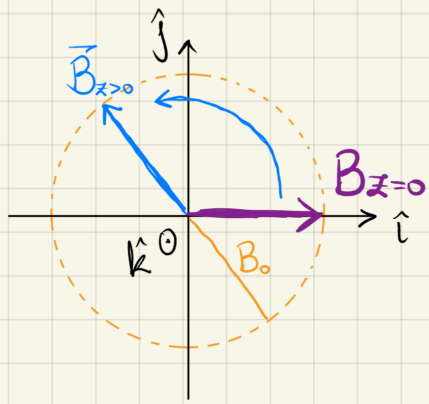
Por separado se ven como:

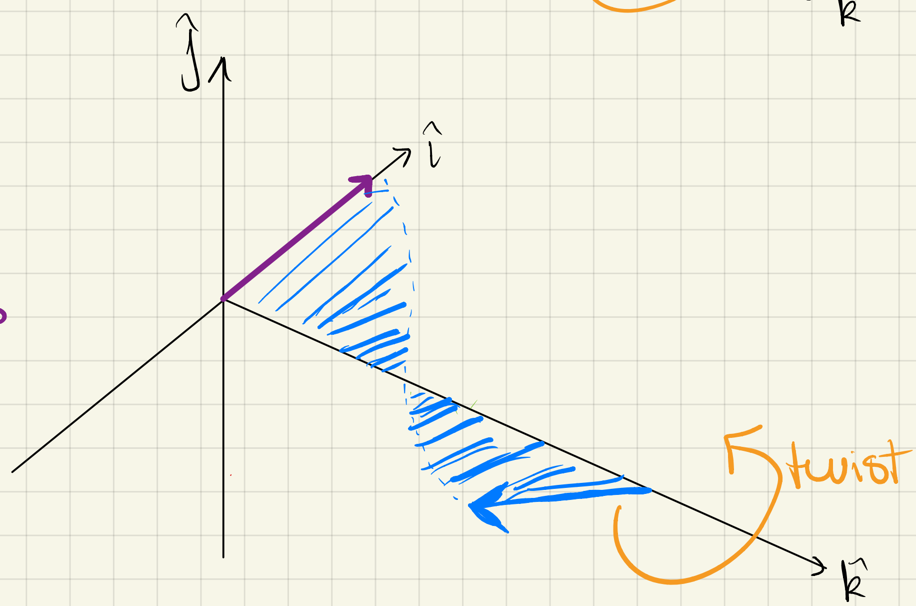
Vista de frente



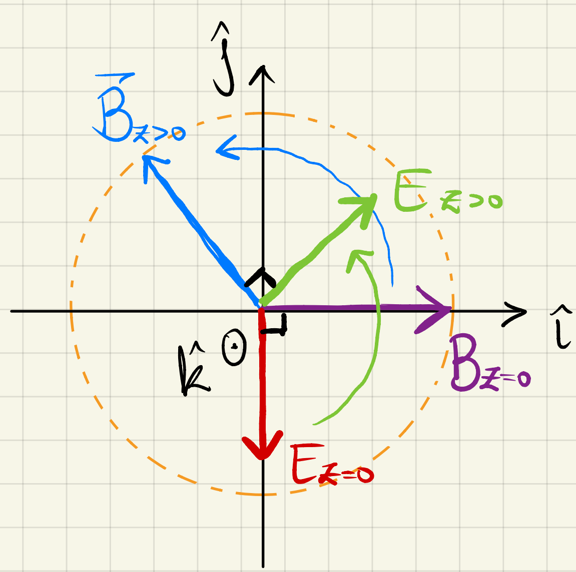
Vista oblicua







Mientras que juntos



Problema 2: Ondas Electromagnéticas en Conductores

Considere la propagación de ondas electromagnéticas a través de un medio lineal con permitividad ϵ, permeabilidad μ, y conductividad g (todas cantidades conocidas), en la presencia de fuentes libres no nulas ρ_l y $\boldsymbol{J}_l$.

1. Escriba las **ecuaciones de Maxwell** para tal sistema.

Tenemos que

$$(\mathrm{I})\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho_l\ , \quad (\mathrm{III})\ \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t\ ,$$
$$(\mathrm{II})\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\ , \quad (\mathrm{IV})\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\ . \quad (0.3)$$

pero $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ y $\vec{J}_l = g\vec{E}$, luego

$$(\mathrm{I'})\ \nabla\cdot\vec{E} = \rho_l/\epsilon\ , \quad (\mathrm{III'})\ \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t\ ,$$
$$(\mathrm{II'})\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\ , \quad (\mathrm{IV'})\ \nabla\times\vec{B} = \mu g\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ . \quad (0.3)$$

2. Demuestre que cualquier densidad de carga inicial $\rho_l(0)$ decae a $e^{-1}\rho_l(0)$ en un **tiempo característico** $\tau \equiv \epsilon/g$. Compruebe además que $\rho_l \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Tomando la divergencia de (IV) se obtiene

$$0 = \nabla\cdot\vec{J}_l + \frac{\partial\nabla\cdot\vec{D}}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{J}_l + \frac{\partial\rho_l}{\partial t} \quad (\mathrm{V}) \quad (0.2)$$

(V) se puede escribir como

$$\nabla\cdot\vec{J}_l + \frac{\partial\rho_l}{\partial t} = g\nabla\cdot\vec{E} + \frac{\partial\rho_l}{\partial t} = \frac{g}{\epsilon}\rho_l + \frac{\partial\rho_l}{\partial t} = 0 \quad (0.2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho_l}{\partial t} = -\frac{g}{\epsilon}\rho_l \Rightarrow \rho_l(t) = \rho_l(0)e^{-gt/\epsilon} \quad (\mathrm{VI}) \quad (0.2)$$

Vemos que $\rho_l(0) \to \rho_l(0)e^{-1}$ en un tiempo $\tau = \epsilon/g$.

De (VI) vemos que $\rho_l(\infty) = 0$. (0.2)

3. Considerando entonces el caso en que $\rho_l = 0$ derive, a partir de las ecuaciones de Maxwell, las **ecuaciones de onda modificadas** para el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y el campo magnético $\boldsymbol{B}$.

Tenemos que

$$(\mathrm{I}') \quad \nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad ; \qquad (\mathrm{III}') \quad \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \, ,$$

$$(\mathrm{II}') \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad ; \qquad (\mathrm{IV}') \quad \nabla\times\vec{B} = \mu g \vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} .$$

Ahora

- $\nabla\times(\mathrm{III}') \Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\partial(\nabla\times\vec{B})/\partial t$

$$\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{0}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu g\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu g\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \quad (\mathrm{VIII})$$

(0.3)

- $\nabla\times(\mathrm{IV}') \Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{B} = \mu g\nabla\times\vec{E} + \mu\epsilon\,\partial(\nabla\times\vec{E})$

$$\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}}_{0}) - \nabla^2\vec{B} = -\mu g\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \mu g\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \quad (\mathrm{IX})$$

(0.3)

4. Tomando los "ansatze" de onda plana

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right], \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right], \tag{2}$$

derive, utilizando las ecuaciones de Maxwell, la **relación de dispersión**

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon\left(1 + \frac{ig}{\epsilon\omega}\right) \equiv (\alpha + i\beta)^2, \tag{3}$$

donde $k^2 \equiv \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ y hemos explicitado la naturaleza compleja de $k = \alpha + i\beta$, con $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{R}$. Explique por qué el parámetro β está asociado a la **atenuación** de la onda electromagnética.

Con el ansatz sugerido se encuentra que

(0.2)

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \quad (\mathrm{X})$$

Además, $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$ (XI)

Igualmente, $\nabla \times \vec{B} = \mu g \vec{E} + \mu \epsilon\, \partial \vec{E}/\partial t$

$$\Rightarrow i\vec{k} \times \vec{B}_0 = \mu(g - i\epsilon\omega)\vec{E}_0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{i\vec{k}\times\vec{B}_0}{\mu(g - i\epsilon\omega)} \quad (\mathrm{XII}) \qquad (0.2)$$

Tenemos pues que tomando $\vec{k}\times(\mathrm{XII})$ y usando (XI) se obtiene que

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{i\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{B}_0)}{\mu(g - i\epsilon\omega)} = \omega\vec{B}_0$$

$$\Rightarrow i\vec{k}\underbrace{(\vec{B}_0\cdot\vec{k})}_{0} - i\vec{B}_0(\vec{k}\cdot\vec{k}) = \mu(g - i\epsilon\omega)\omega\vec{B}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k}^2 = \omega^2\mu\epsilon\left(1 + \frac{ig}{\epsilon\omega}\right) \equiv (\alpha + i\beta)^2} \quad (\mathrm{XIII}) \qquad (0.2)$$

Luego, si $\vec{k} = k\hat{k} = (\alpha + i\beta)\hat{k}$ la onda EM va como

$$\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] = \exp[-\beta\hat{k}\cdot\vec{r}]\exp[i(\alpha\hat{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$$

Vemos que el término asociado a β es un decaimiento exponencial, es decir, una "atenuación" de la onda a medida que esta avanza. (0.1)

5. Encuentre una expresión explícita para la **longitud de penetración** $\delta \equiv 1/\beta$. Compruebe que $\delta \to \infty$ cuando $g \to 0$, y comente por qué esto es esperable.

De (XIII) tenemos que

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\mu\epsilon \quad \text{y} \quad 2\alpha\beta = \omega\mu g.$$

De aquí es directo encontrar que

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{1/2} \quad (\mathrm{XIV}) \qquad (0.5)$$

$$\alpha = g\sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon}}\left[\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{-1/2}$$

Vemos que $\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\left[\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{-1/2}$ (XV)

y que en efecto si $g \to 0$, $\delta \to \infty$, lo que significa que el medio es "transparente" para las ondas. Esto es lo que se espera para un material con conducción nula $(g = 0)$.

6. Demuestre que cuando $g^2 \ll \epsilon^2\omega^2$, $\delta \approx \frac{2}{g}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$. Comente dicho resultado.

Si $g^2 \ll \epsilon^2 \omega^2$, $\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} \simeq 1 + \frac{g^2}{2\epsilon^2\omega^2}$,

luego de (XIV),

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\left[\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{-1/2} \quad (0.6)$$

$$\simeq \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\left(\frac{g^2}{2\epsilon^2\omega^2}\right)^{-1/2} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

La distancia de penetración no depende de la frecuencia ω en este límite.

7. Demuestre que cuando $g^2 \gg \epsilon^2\omega^2$, $\delta \approx \frac{\lambda}{2\pi}$, donde λ es la longitud de onda en el conductor, $\lambda \equiv 2\pi/\alpha$. Comente dicho resultado.

Tenemos que

$$\alpha = g\sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon}}\left[\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{-1/2} \quad (0.6)$$

que en el límite $g^2 \gg \epsilon^2\omega^2$ entrega

$$\alpha \simeq g\sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon}}\left(\frac{g}{\epsilon\omega}\right)^{-1/2} \simeq g\sqrt{\frac{\mu}{2\epsilon}}\sqrt{\frac{\epsilon\omega}{g}} \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}$$

Luego $\frac{\lambda}{2\pi} \equiv \frac{1}{\alpha} \simeq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu g}}$

En el mismo límite

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\left[\left\{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\left(\frac{g}{\epsilon\omega}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{\epsilon\omega}{g}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu g}},$$

luego, en efecto, $\delta \simeq \lambda/2\pi$.

8. Tome $\boldsymbol{k} = k\,\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{E}_0 = E_0\,\hat{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{B}_0 = B_0\,\hat{\boldsymbol{y}}$, donde, como sabemos, k, E_0 y B_0 son cantidades complejas. Escriba dichas cantidades en su forma polar, a decir,

$$k = |k|e^{i\varphi}, \quad E_0 = |E_0|e^{i\chi}, \quad B_0 = |B_0|e^{i\psi}. \tag{4}$$

Utilizando las ecuaciones de Maxwell:

- Demuestre que

$$\psi - \chi = \varphi \tag{5}$$

e interprete este resultado con un gráfico de la onda electromagnética atenuada.

- Demuestre que

$$\frac{|B_0|}{|E_0|} = \frac{|k|}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu\sqrt{1+\left(\frac{g}{\epsilon\,\omega}\right)^2}}. \tag{6}$$

Tenemos que $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$

$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$

Ahora, $\vec{k} = k\hat{z}$, $\vec{E}_0 = E_0\hat{x}$, $\vec{B}_0 = B_0\hat{y}$, luego (0.2)

$\vec{E}(z,t) = E_0\exp[i(kz-\omega t)]\hat{x}$, $\vec{B}(z,t) = B_0\exp[i(kz-\omega t)]\hat{y}$

Usando que $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$,

$$ik\,\hat{z}\times E_0\exp[i(kz-\omega t)]\hat{x} = +i\omega B_0\exp[i(kz-\omega t)]\hat{y}$$

$\Rightarrow \quad B_0 = \dfrac{kE_0}{\omega}.$ $\quad$ ($\overline{\text{XVI}}$) $\quad$ (0.2)

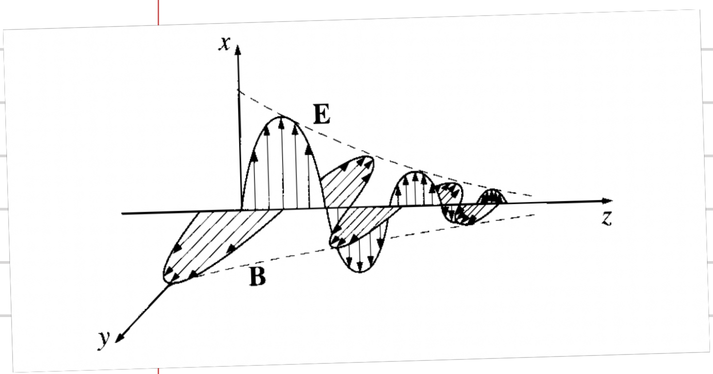
Explicitando la naturaleza compleja de las cantidades en ($\overline{\text{XVI}}$) al escribirlas en su forma polar, a decir,

$k = |k|e^{i\varphi}$, $E_0 = |E_0|e^{i\chi}$, $B_0 = |B_0|e^{i\psi}$,

Se obtiene que

$$|B_0|e^{i\psi} = \frac{|k|e^{i\varphi}|E_0|e^{i\chi}}{\omega} \Rightarrow e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\chi)}$$

$$\Rightarrow \psi - \chi = \varphi \quad (0.2)$$



Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están fuera de fase, lo que se aprecia en la gráfica adjunta.

De (XVI) se tiene que $\frac{|B_0|}{|E_0|} = \frac{|\vec{k}|}{w} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{w}$.

Teníamos que

$$\beta = w\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\left\{1+\frac{g^2}{\epsilon^2 w^2}\right\}^{1/2} - 1\right]^{1/2}$$

y $\alpha^2 - \beta^2 = w^2\mu\epsilon$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{w^2\mu\epsilon}{2}\left(\left\{1+\frac{g^2}{\epsilon^2 w^2}\right\}^{1/2} - 1\right) + w^2\mu\epsilon$$

$$\alpha^2 = \frac{w^2\mu\epsilon}{2}\left(\left\{1+\frac{g^2}{\epsilon^2 w^2}\right\}^{1/2} + 1\right) \qquad \text{(XVII)}$$

(0.2)

Luego

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{w^2\mu\epsilon}{2}\left(\left\{1+\frac{g^2}{\epsilon^2 w^2}\right\}^{1/2} + 1 + \left\{1+\frac{g^2}{\epsilon^2 w^2}\right\} - 1\right)$$

$$\alpha^2+\beta^2 = w^2\mu\epsilon\left\{1+\frac{g^2}{\epsilon^2 w^2}\right\}^{1/2}$$

con lo que finalmente

$$\frac{|\vec{B}_0|}{|\vec{E}_0|} = \sqrt{\epsilon\mu\sqrt{1+\left(\frac{g}{\epsilon w}\right)^2}}\,,$$ como se pedía demostrar. (0.2)

9. Finalmente, compruebe que los campos eléctrico y magnético **reales** están dados, en la configuración del inciso anterior, por

$$\boldsymbol{E}(z,t) = |E_0|e^{-\beta z}\cos(\alpha z - \omega t + \chi)\,\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{B}(z,t) = |B_0|e^{-\beta z}\cos(\alpha z - \omega t + \chi + \varphi)\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{7}$$

Teníamos que

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \exp[i(kz - wt)]\hat{x}, \quad \vec{B}(z,t) = B_0\exp[i(kz-wt)]\hat{y}$$

$$E_0 = |E_0|e^{i\chi}, \quad B_0 = |B_0|e^{i\psi}, \quad \psi - \chi = \varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = |E_0|\, e^{-\beta z}\exp[i(\alpha z - wt + \chi)]\,\hat{x},$$
$$\vec{B}(z,t) = |\vec{B}_0|\, e^{-\beta z}\exp[i(\alpha z - wt + \psi)]\,\hat{y}.$$

Tomando la parte real y reemplazando se obtiene finalmente que

$$\vec{E}(z,t) = |E_0|\, e^{-\beta z}\cos(\alpha z - wt + \chi)\,\hat{x},$$
$$\vec{B}(z,t) = |B_0|\, e^{-\beta z}\cos(\alpha z - wt + \chi + \varphi)\,\hat{y}.$$

(0.6)