PAUTA CONTROL 3 FI2002

Prof: Simón Riquelme
Aux: Antonia Cisternas
Javier Huenupi
Ay: Bruno Pollarolo

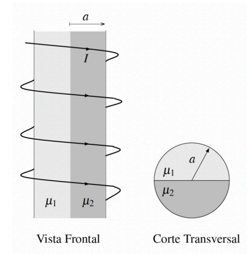
Problema 1

Un solenoide infinito de radio a que tiene m espiras por unidad de largo, lleva corriente I. La permeabilidad magnética del material al interior del solenoide es

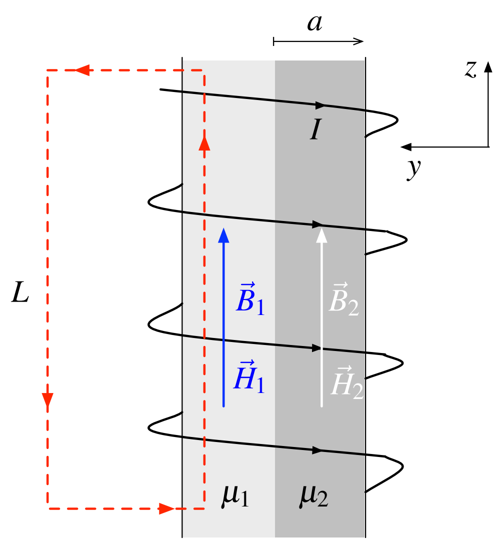
$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } 0 < \theta \leq \pi, \\ \mu_2 & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \tag{1}$$

como muestra la figura. Encuentre **(1.5 ptos. cada uno)**:

1. El campo magnético $\boldsymbol{B}$ en todo el espacio.
2. La intensidad magnética $\boldsymbol{H}$ en todo el espacio.
3. La magnetización $\boldsymbol{M}$ de los materiales.
4. Las densidades de corriente $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{J_M}$.



Dada la geometría del problema, el campo magnético provocado por el solenoide debe ser paralelo al eje del cilindro. Recuérdese en el solenoide ideal e infinitamente largo se hace el supuesto que el campo magnético es nulo fuera del mismo.



Cálculo de Campo Magnético Usando Ley de Àmpere.

En la Figura se muestra el rectángulo con el cual puede ser usada la Ley de Ampère de la siguente forma

+0.5 +0.5

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} \Longrightarrow H_1 \cdot L = mLI \Longrightarrow \vec{H}_1 = mI\hat{z}$$

Análogamente, es posible hacer el mismo análisis para $\vec{H}_2$, por lo que también se puede concluir

$$\vec{H}_2 = mI\hat{z}$$ +0.5

El resultado anterior es coherente con la condición de borde $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{\text{libre}}$ ya que en la interfase de los medios no hay corrientes libres circulando por ende $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$. Por otro lado, los campos magnéticos están dados por +0.5 utilizar $\vec{B}_i = \mu_i \vec{H}$

$$\vec{B}_1 = \mu_1 mI\hat{z} \qquad \vec{B}_2 = \mu_2 mI\hat{z}$$

+0.5 +0.5

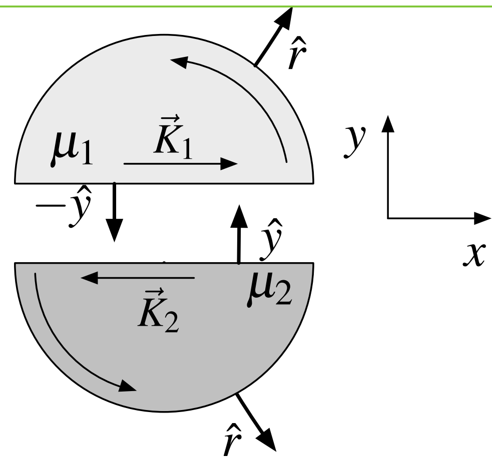
A partir de lo anterior, se procede a determinar las magnetizaciones de cada medio, las cuales cumplen $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, por lo tanto

+0.5 +0.5 +0.5

$$\vec{M}_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{z} \qquad \vec{M}_2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{z}$$

Ahora, para encontrar las densidades de corrientes presentes se usan las definiciones $\vec{K_M} = \vec{M} \times \hat{n}$ y $\hat{J_M} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$. Hay que tener precaución debido a que los medios tienen más de una normal.

+0.3 (juntas)



Cálculo de Corrientes de Magnetización.

Siguiendo la Figura se pueden determinar las corrientes superficiales en la división son

$$\vec{K}_1 = \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{z}\right] \times (-\hat{y}) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{x}$$

$$\vec{K}_2 = \left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{z}\right] \times \hat{y} = -\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{x}$$

+0.4

Mientras que en los mantos se tiene que

$$\vec{K}_1 = \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{z}\right] \times \hat{r} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{\theta}$$

$$\vec{K}_2 = \left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{z}\right] \times \hat{r} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) mI\hat{\theta}$$

+0.4

Finalmente, dado que $\vec{M}$ es constante $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$.

+0.4

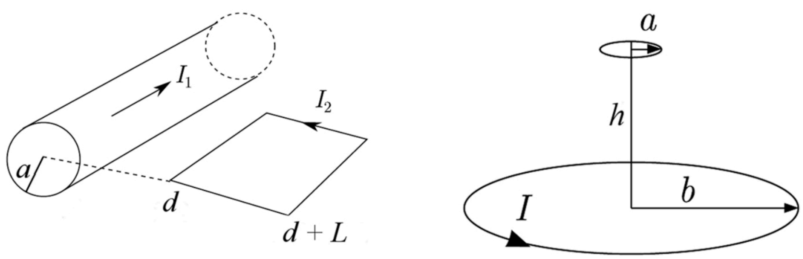
Problema 2

Considere los siguientes arreglos que se muestran en la figura adjunta:

1. **Arreglo 1**: Se tiene un cilindro infinito de radio a por el cual circula una corriente I_1 distribuida uniformemente. A una distancia d del eje del cilindro se encuentra una espira cuadrada de lado L por la cual circula una corriente I_2.

2. **Arreglo 2**: Se tienen dos espiras circulares paralelas de radios a y b separadas por una distancia h. Por la espira de radio b circula una corriente I. Asuma que $b \gg a$.

Para ambas configuraciones, calcule la inductancia mutua. **(3 ptos. cada uno)**



Arreglo 1 Arreglo 2

Solución arreglo 1

La inductancia mutua se puede calcular como:

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \quad +0.3 \tag{6}$$

donde ϕ_{21} es el flujo en la espira 2 debido al campo producido por la espira 1. Si tomamos como espira 1 el cilindro y la espira 2 el cuadrado, entonces debemos calcular el flujo sobre el cuadrado debido al cilindro, el cual va a venir dado por:

$$\phi_{21} = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \quad +0.3 \tag{7}$$

El campo producido se puede obtener de la ley de Ampère, el cual es:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\phi} \quad +0.8 \tag{8}$$

Si colocamos el sistema de referencia de modo que la espira quede en en el plano yz, entonces se tiene que:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}(-\hat{x}) \quad +0.5 \tag{9}$$

$$d\vec{S}_2 = dydz(-\hat{x}) \quad +0.5 \tag{10}$$

Por lo tanto el flujo es:

$$\phi_{21} = \int_0^L \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} dydz = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+L}{d}\right) \quad +0.3 \tag{11}$$

Finalmente la inductancia va venir dada por:

$$M = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{d+L}{d}\right) \quad +0.3 \tag{12}$$

Solución arreglo 2

Sea A la espira de radio a y B la espira de radio b. Nuevamente la inductancia mutua la podemos calcular como $M = \phi_{21}/I$. En este caso el campo lo genera B, y dado que A tiene radio $a \ll b$, entonces podemos decir que el campo sobre A va ser aproximadamente el campo producido por B sobre el eje z. Usando Biot-Savart el campo producido por B es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad +0.1 \tag{13}$$

+0.3 +0.2 +0.3 +0.3

Como $d\vec{l} = bd\phi\hat{\phi}$ con $0 \leq \phi < 2\pi$, $\vec{r} = z\hat{z}$ y $\vec{R} = b\hat{r}$, entonces se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{bd\phi\hat{\phi} \times (z\hat{z} - b\hat{r})}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \tag{14}$$

+0.1

Dado que $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}$, lo único que depende de ϕ es $\hat{r} = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}$, que al integrar entre 0 y 2π se hace 0, por lo tanto esa parte de la integral no aporta al campo magnético. La otra parte que corresponde a $\hat{\phi} \times \hat{r} = -\hat{z}$ es la que aporta al campo, con lo que se tiene:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b^2 d\phi\hat{z}}{(z^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}\hat{z} \tag{15}$$

+0.6

Ahora que se tiene el campo, se puede calcular el flujo sobre A como:

$$\phi_{21} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{16}$$

+0.2

+0.3

Con $d\vec{S} = rdrd\phi\hat{z}$ se tiene que:

$$\phi_{21} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{b^2 d\phi}{(h^2 + b^2)^{3/2}} rdrd\phi = \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{(h^2 + b^2)^{3/2}} \tag{17}$$

+0.3

Por último la inductancia mutua va a ser:

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{(h^2 + b^2)^{3/2}} \tag{18}$$

+0.3

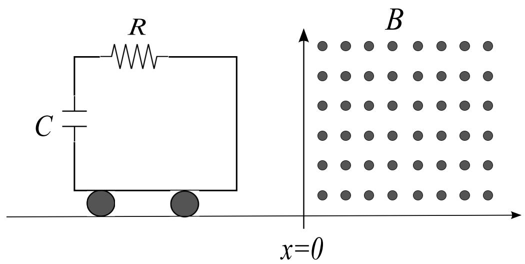
Problema 3

El circuito de la figura, de alto a y largo L, se encuentra sobre ruedas y se desplaza con velocidad $\boldsymbol{v} = v_0\,\hat{\boldsymbol{i}}$. El condensador está descargado de modo que no circula corriente en el circuito. En cierto momento el carrito llega a una región en la que existe un campo magnético uniforme ($x = 0$ en la figura). Despreciando la autoinducción del circuito, calcule:

(a) La velocidad del carrito y la carga en el condensador como función del tiempo.

(b) La energía total disipada en la resistencia mientras el carro entra al campo (no debe preocuparse de qué ocurre una vez que este entra entero al campo).

(3 ptos. cada uno)



Solución:

+0.1

Elijamos el eje y vertical de modo que el campo es $\vec{B} = B_0\hat{z}$. Al entrar el carro a la región en que hay campo cambia su flujo y se genera una corriente inducida en el sentido de la flecha. Efectivamente si el elemento de área $d\vec{S} = dxdy\hat{z}$ el flujo que atraviesa el circuito cuando este ha entrado una distancia x es

+0.1

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bax \longleftarrow +0.2$$

y la fem inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav. \longleftarrow +0.2$$

Que resulte negativa significa que circula a favor de los punteros del reloj (puesto que elegimos el vector superficie en la dirección z). Las ecuaciones que describen este problema son entonces la ecuación para la corriente en el circuito

$$Bav = RI + \frac{Q}{C} \quad +0.3 \tag{1}$$

en que Q es la carga acumulándose en la parte inferior del condensador. La segunda ecuación es la relación entre la carga del condensador y la corriente, que en este caso es

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad +0.2 \tag{2}$$

y por último la fuerza magnética sobre el circuito

$$m\frac{dv}{dt}\hat{x} = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B} = -IaB\hat{x}. \quad +0.2 \tag{3}$$

Al calcular la expresión anterior las fuerzas sobre los segmentos horizontales del circuito se anulan, solamente contribuye el segmento vertical que ya entró al campo. Por último, para resolver las ecuaciones (1) (2) y (3) hay que dar las condiciones iniciales. Estas son

+0.2 +0.2

$$v(t=0) = v_0, \qquad Q(t=0) = 0 \tag{4}$$

+0.2

Obsérvese que la ecuación (1) nos indica que la corriente $I(t=0) = Bav_0/R$ y usando esto en (2) vemos que $dQ/dt(t=0) = I(0) = Bav_0/R$. Para encontrar la ecuación para la la carga del condensador derivamos (1) y reemplazamos (2) y (3) para eliminar I y v. Resulta

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}\right)\frac{dQ}{dt} = 0, \text{ sujeto a } Q(0) = 0, \quad \dot{Q}(0) = \frac{Bav_0}{R}. \tag{5}$$

+0.3

Conviene llamar

$$\alpha \equiv \frac{1}{RC} + \frac{B^2a^2}{mR}.$$

La solución a (5) es

$$\boxed{Q(t) = \frac{Bav_0}{R\alpha}\left(1 - \exp^{-\alpha t}\right)}$$

+0.2 resolver EDO
+0.2 usar C.I.

lo que usamos para integrar (2) para obtener la velocidad (usando que $I = dQ/dt$,

$$m(v - v_0) = -aB(Q(t) - Q(t=0))$$

+0.2

que es

$$\boxed{v(t) = v_0 - \frac{aB}{m}Q(t),}$$

+0.2

en que $Q(t)$ es la expresión ya calculada.

b) La energía total disipada en la resistencia es

$$\boxed{W = \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{\alpha B^2 v_0^2}{2R}}$$

+1.0 saber qué formula ocupar
+1.0 resultado correcto

para lo que hemos usado

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{Bav_0}{R}\exp^{-\alpha t}.$$

+1.0 expresión de I(t)

Lo siguiente no se pide en la prueba, pero podemos observar el balance de energía: multipliquemos por I e integremos en el tiempo la ecuación (1) del circuito . Resulta

$$\int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty vaBI - \int_0^\infty \frac{Q}{C} I dt$$

Usando (2) y (3) podemos reescribir esto como

$$\int_0^\infty RI^2 dt = -\int_0^\infty mv\frac{dv}{dt} - \int_0^\infty \frac{Q}{C} dQ$$

que se integra directamente y es

$$\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2(\infty) + \frac{1}{2}\frac{Q^2(0)}{C} - \frac{1}{2}\frac{Q^2(\infty)}{C}. \tag{6}$$

Usando los valores ya conocidos para $v(t)$ y $Q(t)$ sabemos $Q(\infty) = Bav_0/(R\alpha)$, $v(\infty) = v_0 - v_0 a^2 B^2/(mR\alpha)$ se puede verificar que se recupera el resultado ya calculado.

Notamos que la fórmula anterior se puede escribir como

Energía cinética inicial = potencia disipada + energía cinética final + energía almacenada en el condensador.