PAUTA CONTROL 2 FI2002

Prof: Simón Riquelme
Aux: Antonia Cisternas
Javier Huenupi
Ay: Bruno Pollarolo

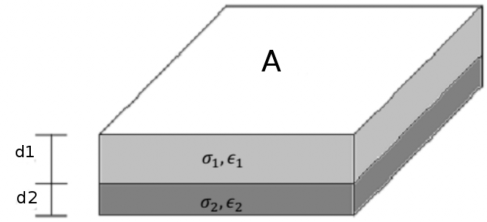
Problema 1

Considere dos placas conductoras de área A y separadas una distancia $d = d_1 + d_2$. Entre las placas se colocan dos materiales de conductividades y permitividades σ_1, ϵ_1, y σ_2, ϵ_2, respectivamente, tal como muestra la figura. Entre las placas se establece una diferencia de potencial V_0, con la placa inferior a potencial mayor. Encuentre:

(a) La resistencia del sistema.

(b) La densidad de cargas en la interfaz de los materiales (desprecie efectos de borde).

(3 ptos. cada uno)



+3 tot

(a) Sabemos que $R = V/I$, donde

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{S}, \quad V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l},$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

Dado que el sistema está conectado a una fuente de potencial todo el tiempo, la carga que entra es la misma que la que sale, luego estamos en presencia de un régimen estacionario, luego

+0.2 estado estacionario

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{\,0} + \nabla\cdot\vec{J} = \nabla\cdot\vec{J} = 0. \qquad (\mathrm{I})$$

Las cargas fluyen desde la placa de mayor potencial (inferior) a la de menor potencial, luego $\vec{J} = J(x)\hat{i}$, donde hemos orientado el eje x hacia arriba. Así,

+0.3

$$\nabla\cdot\vec{J} = \frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{J} = J\hat{i}, \text{ con } J \text{ constante}. \qquad (\mathrm{II})$$

Calculamos entonces la corriente integrando en un plano paralelo a las placas de área A, luego $d\vec{S} \parallel \vec{J}$, con lo que

+0.5

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{S} = J\int dS = JA. \qquad (\mathrm{III})$$

Por otra parte, para determinar J utilizamos la ley de Ohm en cada material, a decir,

+0.5 $$\vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1 = J\hat{\imath}, \quad \vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2 = J\hat{\imath}. \qquad (\mathrm{IV})$$

Tomando $d\vec{l} = dx\,\hat{\imath}$, se obtiene que, tomando $d = d_1 + d_2$

$$V_0 = V(0) - V(d) = -\int_d^{d_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{d_2}^{0} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

+0.5 plantear la integral

$$= -\frac{J}{\sigma_1}\int_d^{d_2} dx - \frac{J}{\sigma_2}\int_{d_2}^{0} dx$$

$$= -\frac{J}{\sigma_1}\left(d_2 - d\right) - \frac{J}{\sigma_2}\left(0 - d_2\right) = \frac{J d_1}{\sigma_1} + \frac{J d_2}{\sigma_2}$$

+0.5 por resultado

$$= J\left(\frac{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \qquad (\mathrm{V})$$

Luego, hemos encontrado que

+0.5 ley de ohm y calcular bien

$$R = \frac{V_0}{I} = \cancel{J}\left(\frac{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{J}A} = \frac{1}{A}\left(\frac{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) \qquad (\mathrm{VI})$$

+ 3 tot

(b) La densidad de carga σ_q en la interfaz de los materiales se debe a la carga libre σ_f y a la carga de polarización de los materiales σ_p, es decir,

+0.2 $$\sigma_q = \sigma_f + \sigma_p. \qquad (\mathrm{VII})$$

Determinamos la carga libre usando la ley de Gauss para dieléctricos e integrando sobre un cilindro en la interfaz

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \sigma_f \, dS$$

$$(D_1 - D_2)\,S = \sigma_f\, S$$

+0.5 $$\Rightarrow \sigma_f = D_1 - D_2. \qquad (\mathrm{VIII})$$

Pudimos "sacar" los D_i de la integral porque son constantes, dado que al ser medios lineales $\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E}_i$, y los $\vec{E}_i$ son constantes porque $\vec{J}$ lo es, al tratarse de medio "óhmicos". Todo lo anterior nos permite expresar a σ_f en términos de datos del problema.

En efecto,

$$\sigma_f = D_1 - D_2 = \epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right) J$$

y usando (V),

$$= \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}\right) V_0$$

$$= \left(\frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\sigma_1}{\cancel{\sigma_1}\sigma_2}\right)\left(\frac{\cancel{\sigma_1}\,\sigma_2}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}\right) V_0$$

+0.5

reemplazo de J y buen cálculo

$$\sigma_f = \left(\frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\sigma_1}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}\right) V_0 . \qquad (IX)$$

La densidad de polarización σ_b está dada por la polarización de los materiales 1 y 2, a decir,

+0.3 $$\sigma_b = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1 \Big|_{\text{interfaz}} + \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 \Big|_{\text{interfaz}} \qquad (X)$$

Dado que son medios lineales se cumple que

+0.5

relación entre P y J

$$\vec{P}_i = \epsilon_0 \chi_i \vec{E}_i = \epsilon_0 (k_i - 1)\vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0)\vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0)\frac{\vec{J}}{\sigma_i} . \qquad (XI)$$

usando que $\vec{J} = J\hat{\imath}$, con J dado por (V), se obtiene que

+0.3

reemplazo de J y buen cálculo

$$\vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)\,\sigma_2}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} V_0\,\hat{\imath} , \quad \vec{P}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)\,\sigma_1}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} V_0\,\hat{\imath} . \qquad (XII)$$

Dado que $\hat{n}_1 = -\hat{\imath}$ y $\hat{n}_2 = +\hat{\imath}$, obtenemos a través de (X) y (XII) que

$$\sigma_b = -\frac{(\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_0\sigma_2)\, V_0}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} + \frac{(\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_0\sigma_1)\, V_0}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}$$

+0.5

cálculo de la densidad

$$\sigma_b = -\frac{(\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\sigma_1)\, V_0}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} + \frac{\epsilon_0(\sigma_2 - \sigma_1)\, V_0}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} \qquad (XIII)$$

utilizando entonces (VII), (IX) y (XIII) encontramos que

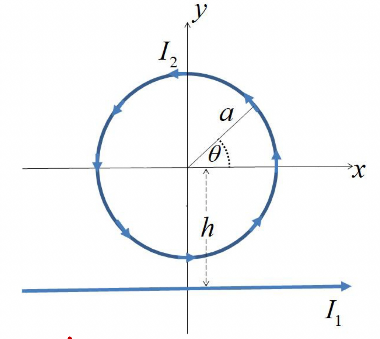
+0.2 $$\sigma_q = \frac{\epsilon_0(\sigma_2 - \sigma_1)\, V_0}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} \qquad (XIV)$$

Problema 2

Considere un alambre infinito por el cual circula una corriente I_1 y una espira circular de radio a, coplanar con el alambre y tal que el centro de la espira está a una distancia h del alambre, como muestra la figura. Suponga que la espira circular conduce una corriente I_2.

1. Usando la ley de Ampère para circuitos, determine la expresión vectorial del campo magnético $\boldsymbol{B}_1$ debido a la corriente I_1 que circula por el alambre infinito. ¿Cómo es la expresión de $\boldsymbol{B}_1$ en la región coplanar ($z = 0$) donde se encuentra la espira?
2. Usando la expresión del inciso 1. para $\boldsymbol{B}_1$, encuentre la fuerza que actúa sobre la espira donde circula la corriente I_2.
   Hint: Para facilitar los cálculos exprese todos los vectores en términos de los vectores unitarios Cartesianos $\{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$.
3. Determine el valor del torque $\boldsymbol{\tau}$ que actúa sobre la espira debido al campo magnético $\boldsymbol{B}_1$.

(2 ptos. cada uno)



+ 2 tot

1. La ley de Ampère establece que

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 I_1 \,, \qquad (1)$$

0.5 dirección de B y dl

donde $\vec{B}_1 = B_1 \hat{\varphi}$ y $d\vec{l}_1 = R\, d\varphi\, \hat{\varphi}$, con φ el ángulo que describe una trayectoria circular alrededor del alambre infinito y R la distancia radial entre el punto de observación y el alambre. Luego,

+1

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \hat{\varphi} \qquad (2)$$

Es claro entonces que para la región coplanar ($z=0$), donde se encuentra la espira, el campo magnético toma la forma

+0.5

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \hat{k} \,, \qquad (3)$$

con $\hat{k}$ el vector unitario que "sale" del plano de la figura.

+ 2 tot

2. La fuerza que actúa sobre la espira debido al campo externo $\vec{B}_1$ está dada por

+0.8 planteamiento

+0.3 cálculo de dl

$$(4) \quad \vec{F}_{1\to 2} = \oint I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \oint I_2\, d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \hat{k} \,, \quad d\vec{l}_2 = a\, d\theta\, \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \oint d\theta\, \hat{\theta} \times \frac{\hat{k}}{R} \,, \quad \hat{\theta} \times \hat{k} = \hat{r}$$

+0.5 plantear la integral

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\underbrace{(h + a\sin\theta)}_{R}} \underbrace{(\cos\theta\, \hat{\imath} + \sin\theta\, \hat{\jmath})}_{\hat{r}}$$

+0.2 desarrollo de la integral

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\cancel{\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(h/a + \sin\theta)}\,\hat{\imath}} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(h/a+\sin\theta)}\,\hat{\jmath} \right)$$

$\emptyset$ por paridad

+0.2 resultado

$$\vec{F}_{1\to 2} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{h/a}{\sqrt{(h/a)^2 - 1}} \right)\hat{\jmath} \quad // \qquad (5)$$

+ 2 tot

3. Nos interesa el elemento diferencial de torque $d\vec{\tau} = \vec{R}' \times d\vec{F}_{1\to 2}$, donde $|\vec{R}'|$ denota la distancia entre cualquier eje paralelo al alambre infinito y la espira, luego $\vec{R}' = \eta \vec{R}$, con $\eta > 0$.

Con esto,

+1 planteamiento

$$d\vec{\tau} = \vec{R}' \times d\vec{F}_{1\to 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\, \eta R\, \hat{\jmath} \times \frac{d\theta}{R}\,\hat{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\, \eta\, d\theta\, \hat{\jmath} \times (\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}), \qquad (I)$$

con lo que finalmente

$$\vec{\tau} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a\, \eta}{2\pi} \oint d\theta \cos\theta\, (-\hat{k}) = 0 \quad // \qquad (II)$$

+0.5 desarrollo

+0.5 por resultado

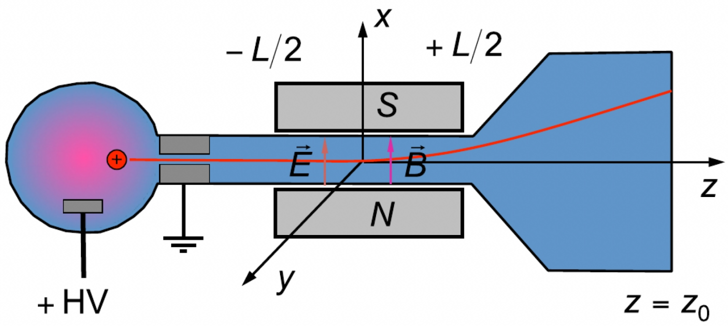
Problema 3

Considere el montaje que se observa en la figura adjunta. En él, un ion de masa m y carga $+q$ entra con velocidad v sobre el eje z a una zona con campos $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ uniformes y que apuntan en la dirección $\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Los campos actúan entre $z = -\frac{L}{2}$ y $z = +\frac{L}{2}$, y en todas las otras partes la partícula se mueve libremente. Los iones son deflectados en la zona con campos y llegan finalmente a una pantalla en $z = z_0$. Demuestre que en la pantalla se cumple que

$$x = f(m, q)\, y^2, \tag{1}$$

con $f(m, q)$ una función de la masa y la carga que **usted debe determinar.** Incidentalmente, este es el experimento que realizó J.J. Thompson en 1897 para encontrar la "relación carga/masa" del electrón, haciendo uso de rayos catódicos.
(6 ptos.)

Hint: En la ecuación de movimiento, asuma que $v_y \approx 0$ y $v_z \approx v$ en la zona con campo. Use esto para **justificar** el uso de la regla de la cadena de la forma $\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}$ y así encontrar ecuaciones paramétricas de la forma $x = x(z)$ e $y = y(z)$.



Sea $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la posición de la partícula. La ecuación de movimiento (fuerza de Lorentz) establece que

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}). \qquad \text{(A)}$$

Aquí, $\vec{E} = E\hat{\imath}$, $\vec{B} = B\hat{\imath}$, y $\dot{\vec{r}} = (V_x, V_y, V_z)$ con lo que

+1 $$m\ddot{x} = qE, \quad m\ddot{y} = qBV_z, \quad m\ddot{z} = -qBV_y. \qquad \text{(B)}$$

Siguiendo la indicación del hint que nos sugiere tomar $V_y \approx 0$ y $V_z = V$, la ecuación de movimiento se reduce a

+0.3 $$m\ddot{x} = qE, \quad m\ddot{y} = qBV, \quad m\ddot{z} \approx 0. \qquad \text{(C)}$$

Es claro que $\ddot{z} \approx 0 \Rightarrow V_z = V = \text{constante}$, por lo que no nos interesará el movimiento en z. Esto nos permite utilizar la regla de la cadena de manera que

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz} \approx V\frac{d}{dz} \qquad \text{(D)}$$

+0.2
identificar v

Podemos entonces escribir

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(v\frac{dx}{dz}\right) = v^2\frac{d^2x}{dz^2},$$

+0.5

y análogamente

$$\ddot{y} = v^2\frac{d^2y}{dz^2},$$

con lo que se obtiene que

+0.5 $$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{qE}{mv^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{qB}{mv},$$ (E)

cuyas soluciones son

$$x(z) = x_0 + v_{0x}z + \frac{1}{2}\frac{qE}{mv^2}z^2,$$

+0.5 (F)

$$y(z) = y_0 + v_{0y}z + \frac{1}{2}\frac{qB}{mv}z^2.$$

Para determinar x_0, y_0, v_{0x} y v_{0y} debemos imponer condiciones iniciales. Para $x(z)$ estas son

(G)

1. $x(-L/2) = 0$ pues inicialmente la partícula sólo se mueve por el eje z.
2. $x'(-L/2) = 0$, donde la prima ' indica derivada con respecto a z. Nuevamente, esto pues la partícula sólo se mueve por el eje z, y es una coincidencia de la regla de la cadena pues

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{-L/2} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}\left.\frac{dt}{dz}\right|_{t=t_0} = 0 \quad \text{pues} \quad \frac{dx}{dt}(t=t_0) = 0.$$

Análogamente, para $y(z)$ se tiene que

(H)

3. $y(-L/2) = 0$,
4. $y'(-L/2) = 0$.

+0.5 condiciones iniciales

Ahora bien $x(-L/2) = x_0 + v_{0x}\left(-L/2\right) + \frac{1}{2}\frac{qE}{mv^2}\left(-L/2\right)^2 = 0$

y $x'(-L/2) = v_{0x} + \frac{qE}{mv^2}\left(-\frac{L}{2}\right) = 0.$

De aquí, $v_{0x} = \frac{qEL}{2mv^2} \Rightarrow x_0 = \frac{qEL}{2mv^2}\frac{L}{2} - \frac{1}{2}\frac{qEL^2}{4mv^2}$

$$x_0 = \frac{qEL^2}{8mv^2}$$

Luego,

$$X(z) = X_0 + V_{0x} z + \frac{1}{2}\frac{qE}{mV^2} z^2$$

$$X(z) = \frac{1}{8}\frac{qEL^2}{mV^2} + \frac{qEL}{2mV^2} z + \frac{1}{2}\frac{qE}{mV^2} z^2$$

+0.3 reemplazo condiciones iniciales

$$\Rightarrow \quad X(z) = \frac{qE}{2mV^2}\left(z + \frac{L}{2}\right)^2, \quad -L/2 \leq z < L/2 \qquad (I)$$

y en completa analogía

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{qB}{2mV}\left(z + \frac{L}{2}\right)^2, \quad -L/2 \leq z < L/2 \qquad (J)$$

En la zona sin campos, $z \geq L/2$, no hay fuerzas, luego la partícula se mueve en línea recta. Usando nuevamente z como parámetro se obtiene

+0.5

$$\bar{X}(z) = \bar{X}_0 + \bar{V}_{0x} z, \quad \bar{Y}(z) = \bar{Y}_0 + \bar{V}_{0y} z, \quad z \geq L/2, \qquad (K)$$

donde usamos la "barra" para enfatizar que nos encontramos en esta segunda región. Ahora debemos "pegar" las soluciones, demandando continuidad de las funciones y sus derivadas en $z = L/2$, es decir,

+0.2

$$X(L/2) = \bar{X}(L/2), \quad Y(L/2) = \bar{Y}(L/2) \qquad (L)$$

$$X'(L/2) = \bar{X}'(L/2), \quad Y'(L/2) = \bar{Y}'(L/2)$$

Tenemos pues que

$$X(L/2) = \frac{qEL^2}{2mV^2} = \bar{X}_0 + \bar{V}_{0x}\frac{L}{2}, \quad X'(L/2) = \frac{qEL}{mV^2} = \bar{V}_{0x}$$

+0.3

$$\Rightarrow \bar{X}_0 = 0, \text{ y equivalentemente } \bar{Y}_0 = 0.$$

+0.5

Luego,

$$\bar{X}(z) = \frac{qEL}{mV^2} z, \quad \bar{Y}(z) = \frac{qBL}{mV} z \qquad (M)$$

De la segunda ecuación tenemos que $V = \frac{qBLz}{m\bar{Y}(z)}$.

Reemplazando en la primera entrega entonces

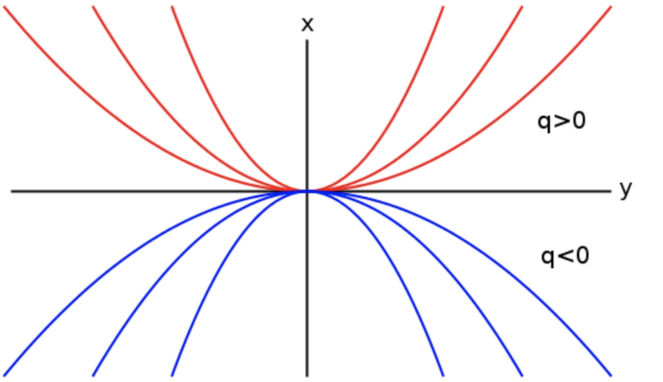
$$\bar{X}(z) = \frac{qE\cancel{L}\cancel{z}}{\cancel{m}} \frac{m^{\cancel{2}}\bar{Y}^2(z)}{q^{\cancel{2}}B^2L^{\cancel{2}}z^{\cancel{2}}}$$

+0.5 $$\Rightarrow \quad \bar{X}(Z) = \frac{m}{q}\,\frac{E}{B^2 L Z}\,\bar{Y}^2(Z).$$ N

En la pantalla, $Z = Z_0$, con lo que se encuentra finalmente que

+0.2 $$X = \frac{m}{q}\,\frac{E^2}{B^2 L Z_0}\,Y^2 \Rightarrow f(m,q) = \frac{m}{q}\,\frac{E^2}{B^2 L Z_0}$$ Ñ

En conclusión, en la pantalla $(Z = Z_0)$ se tienen parábolas que se abren hacia arriba para cargas positivas $(q>0)$ y que se abren hacia abajo para cargas negativas $(q<0)$, como muestra la figura.



NOTA: La aproximación utilizada (y aconsejada en el hint) tiene sentido ya que (para $q>0$) $\vec{E}$ deflecta la partícula hacia arriba, es decir no afecta ni a V_y ni a V_z, mientras que $\vec{B}$ la deflecta hacia "afuera de la pantalla", pero si el campo es más o menos débil entonces la deflección es pequeña. Bajo tal supuesto la partícula no se mueve mucho en $y \Rightarrow V_y \approx 0$ y dado que $\vec{B}$ no afecta ni a V_x, ni a V_y, ni al módulo de la velocidad es natural esperar que $V_z \approx V$.