PAUTA C1 FI2002
Abril 2023

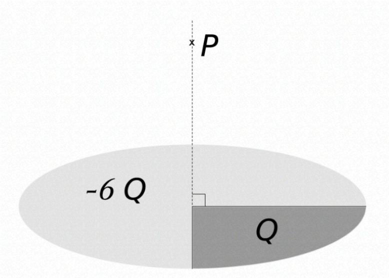
Prof: Simón Riquelme
Aux: Antonia Cisterna,
Javier Huanqui
Ay.: Bruno Pollarolo

Problema 1

Considere un disco de radio R que tiene una carga positiva $+Q$ distribuida uniformemente sobre un cuarto de su área y una carga $-6Q$ distribuida uniformemente sobre el resto, como muestra la figura adjunta.

a) Tomando como referencia $V(\infty) = 0$, calcule el potencial en un punto P a distancia z sobre el eje central del disco que se muestra en la figura.

b) ¿En qué dirección apunta el campo eléctrico en P?
Dado el potencial calculado en a): ¿Puede calcular el campo eléctrico? ¿Qué información del campo eléctrico puede obtener a partir de a)? Calcule dicha información.



+4.0 tot

a) El potencial creado por una superficie con densidad de carga σ está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma\, dS}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

En este problema, $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho}$, $dS = \rho\, d\rho\, d\theta$ y hay dos valores distintos de σ sobre el disco que llamaremos $\sigma = \sigma_1$ en $0 < \theta < \pi/2$ y $\sigma = \sigma_2$ en $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces

+1.0 Por plantear bien la integral

$$V(z) = \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{\pi/2} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + \frac{\sigma_2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

$$= \frac{(\sigma_1 + 3\sigma_2)}{8\epsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{(\sigma_1+3\sigma_2)}{8\epsilon_0}\left\{\sqrt{R^2+z^2} - z\right\}$$ +1.5

donde se ha usado que $\sqrt{z^2} = z$ ya que estamos considerando puntos en $z > 0$ solamente.

Ahora sólo queda calcular las densidades, las cuales son

$$\sigma_1 = \frac{Q}{\pi R^2/4}, \quad \sigma_2 = \frac{-6Q}{3\pi R^2/4},$$ +1.0

con lo que finalmente se obtiene que

$$V(z) = -\frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left\{\sqrt{R^2+z^2} - z\right\}$$ +0.5

Llegar al resultado correcto

+2.0 tot

b) Dado que el problema NO tiene simetría cilíndrica, el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene sus tres componentes $\{E_\rho, E_\theta, E_z\}$ no nulas. Recordamos que el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left\{\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right\},$$

+0.5 es claro que lo único que podemos calcular con el resultado del inciso anterior es la componente $E_z = E_z(\rho, \theta, z)$ en $\rho = 0$. La componente que podemos calcular entonces es

$$E_z(\rho=0, z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)$$ +1.5

Notas:

- Podrían calcular directamente el campo eléctrico a partir de

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dS,$$ y usar que $$\int \hat{\rho}\, d\theta = \sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y}$$

para notar que las componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ no se anulan.

- Podrían calcular la parte a) utilizando

$$V(z) = -\int_\infty^{r} \vec{E}(\rho=0, z)\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^{z} E_z\, dz.$$

En efecto,

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{z\, dS}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\left\{\sigma_1\frac{\pi}{2} + \sigma_2\frac{3\pi}{2}\right\} = \frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left\{\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right\}$$

luego $$V(z) = -\int_\infty^{z} E_z\, dz = -\frac{5Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left\{\sqrt{R^2+z^2} - z\right\}.$$

Problema 2

Un átomo de hidrógeno se puede modelar con el protón como una carga puntual en $r = 0$ y un electrón dispersado en una distribución esférica alrededor del protón, por lo que el electrón es equivalente a una densidad de carga por unidad de volumen dada por

$$\rho(r) = -\frac{q}{\pi a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right), \tag{1}$$

donde $a_0 = 5,29 \times 10^{-11}$m es el famoso "radio de Bohr".

Con esto, calcule:

(i) La cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno encerrada dentro de una esfera con radio r centrada en $r = 0$. Demuestre que cuando $r \to \infty$, la carga encerrada tiende a cero.

(ii) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) causado por la carga del átomo de hidrógeno como función de r.

+4.0 tot

a) La carga encerrada está dada por

$$Q_{enc} = q_p + q_e = q + \int \rho(r)\, dV,$$

donde $q_p = q$ es la carga del protón y $q_e = \int \rho(r)\, dV$ la del electrón.

Luego,

+1.0 Por plantear la integral

$$Q_{enc} = q - \frac{q}{\pi a_0^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} e^{-2r'/a_0}\, r'^2 \sin\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi$$

$$= q - \frac{q}{\pi a_0^3}\, 4\pi \int_0^r r'^2 e^{-2r'/a_0}\, dr'$$

o bien con $u = 2r'/a_0$

$$Q_{enc} = q - \frac{q}{2} \underbrace{\int_0^{2r/a_0} u^2 e^{-u}\, du}_{\equiv I}$$

La integral I se hace "por partes" 2 veces (o como pueda hacerlo). El resultado es

$$I = \int_0^{2r/a_0} u^2 e^{-u}\, du = -\frac{4r^2}{a_0^2} e^{-2r/a_0} - \frac{4r}{a_0} e^{-2r/a_0} - 2e^{-2r/a_0} + 2.$$

Finalmente se encuentra que

$$Q_{enc} = q\, e^{-2r/a_0}\left\{\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1\right\}$$

+3.0 Por calcular bien la carga

Vemos que en efecto $Q_{enc} \to 0$ cuando $r \to \infty$ pues la exponencial decae más rápido que lo que el polinomio entre paréntesis crece.

+2.0 tot

b) Existe una simetría rotacional en el problema, luego es claro que el campo eléctrico sólo depende del radio, es decir, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Eligiendo como superficie Gaussiana una esfera centrada en el origen y de radio r, se tiene por la ley de Gauss que

+0.2 Notar que E solo va en r tongo

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

+0.3 Explicar que se puede ocupar Ley de Gauss

$$E(r)\, r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\varphi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

+0.5 Definir bien la integral

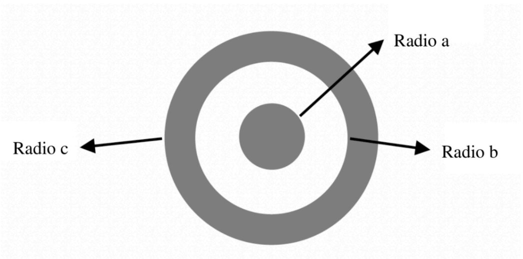
$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q_{enc}\,\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\,e^{-2r/a_0}}{r^2}\left\{\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1\right\}\hat{r}$$

+1.0 Calcular bien el campo

Problema 3

Una esfera conductora de radio a se encuentra en el interior (y es concéntrica) de un cascarón esférico conductor de radio interior b y radio exterior c, como muestra la figura. La esfera interior se encuentra a potencial V_1 y el cascarón a potencial V_2.

1. Calcule la carga total que tiene la esfera de radio a.
2. Calcule la densidad de carga en la pared exterior del cascarón.
3. Calcule el potencial en todo el espacio.



Si la esfera se conecta a tierra,

4. ¿Cuánto valdrá el potencial en $r > c$?
5. ¿Qué carga total tendrá el cascarón esférico?

+1.5 tot

1. Para calcular la carga, primero calculamos el campo eléctrico utilizando Gauss, entre a y b. Por simetría esférica se obtiene que

+0.5 Por plantear Gauss y asumir una carga Q

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r) \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Ahora podemos calcular

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(a-b)}{ab}$$

+0.5

Finalmente despejamos para Q, obteniendo

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 ab(V_2-V_1)}{(a-b)},$$

+0.5 Calcular bien la carga total

que es la carga total de la esfera de radio a.

+1.5 tot

2. Dado que el campo eléctrico dentro del cascarón es nulo, pues se trata de un conductor, se deduce que necesariamente la carga inducida en la pared interior del mismo es $-Q$, esto por una aplicación trivial de Gauss.
Para la región exterior al cascarón, aplicando Gauss se obtiene que

+0.5

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{\underline{Q - Q} + Q_c}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E(r) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}.$$

Luego, la diferencia de potencial entre el infinito y la superficie de radio c está dada por

+0.5

$$\Delta V = V_2 - \cancelto{0}{V_\infty} = -\int_\infty^c \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_c^\infty \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 c}$$

Despejando Q_c,

$$Q_c = 4\pi\epsilon_0 c V_2,$$

obtenemos la densidad superficial σ requerida

$$\sigma \equiv \frac{Q_c}{4\pi c^2} = \frac{\epsilon_0 V_2}{c}$$

+0.5

+1.5 tot

3. El potencial para $r > c$

+0.5

$$\Delta V = V_r - V_2 = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{c V_2}{r}$$

El potencial entre los conductores $a < r < b$

$$\Delta V = V_r - V_2 = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right),$$

Pero $Q = 4\pi\epsilon_0 ab(V_2 - V_1)/(a-b)$, luego

+0.5

$$V_r = V_2 + \frac{a(V_2 - V_1)(b - r)}{(a-b)r}, \quad a < r < b.$$

Para $r < a$ tenemos V_1

Para $b < r < c$ tenemos V_2

+0.5

+0.75 tot

4. Del inciso anterior, $V_r = c\frac{V_2}{r}$, lo que no cambia cuando la esfera se conecta a la tierra, es decir $V_1 \to 0$.

+0.75 tot

5. Notamos que $Q_c = 4\pi\epsilon_0 c V_2$, lo que no cambia cuando la esfera se conecta a la tierra, es decir $V_1 \to 0$.