

# Auxiliar Extra C2

## Biot-Savart y Ley de Ampere

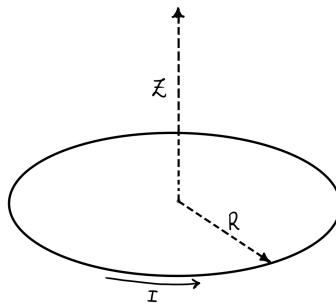
**Profesor: Simón Riquelme**

Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi

Ayudante: Bruno Pollarolo

### **P1.- Biot-Savart**

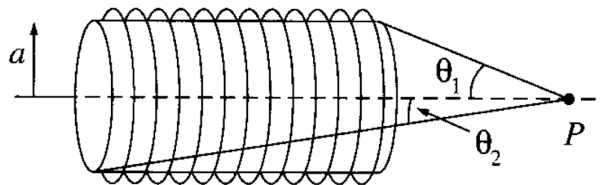
Calcule el campo magnético a una distancia  $z$  sobre el centro de un círculo de radio  $R$ , el cual lleva una corriente  $I$  (homogénea en todo el *loop*) en el sentido antihorario (ver figura)



### **P2.- Biot-Savart**

Calcule el campo magnético en el punto  $P$  ubicado en el eje central de un solenoide, constituido por un alambre que lleva una corriente  $I$  (homogénea) y que está enrollado formando un cilindro de radio  $a$  con  $n$  vueltas por unidad de longitud ( $n$  sería la densidad de *loops*). Exprese su resultado en términos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (ver figura).

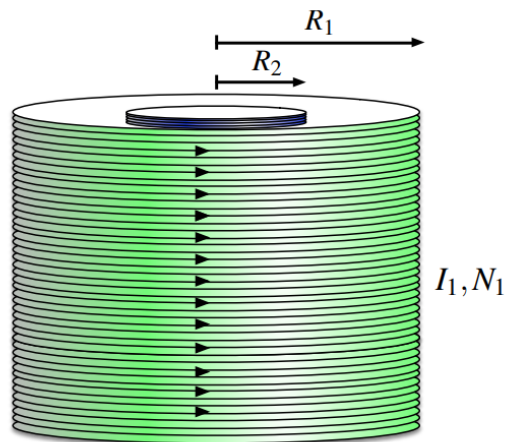
Finalmente, calcule el campo magnético en  $P$  considerando un solenoide de longitud infinita (en ambas direcciones).



### P3.- Ley de Ampère

Considere dos bobinas muy largas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , con  $N_1$  y  $N_2$  vueltas por unidad de largo, respectivamente. La bobina de radio  $R_2$  se encuentra inserta dentro de la bobina de radio  $R_1$  compartiendo su mismo eje. Si por la bobina exterior circula una corriente  $I_1$ , determine:

- La corriente  $I_2$  que circula por la bobina interior, sabiendo que el campo magnético para  $r < R_2$  es nulo.
- Para la corriente encontrada en la parte anterior, encuentre la fuerza por unidad de área que siente la bobina interior.



### Formulario

#### Biot-Savart

En el caso estacionario (*steady current*,  $\partial\rho/\partial t = 0$ ) podemos calcular el campo magnético generado por una corriente usando:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3} dl' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3} da' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3} d\tau'\end{aligned}$$

donde  $\vec{I}$ ,  $\vec{K}$ ,  $\vec{J}$  son densidades de corriente lineales, superficiales y volumétricas respectivamente. Eligen la fórmula según el tipo de corriente que tengan en el problema.

# Auxiliar Extra C2

## P1

Usamos un sistema de coordenadas cilíndrico para calcular el campo magnético con Biot-Savart, en este caso tenemos una corriente de línea, entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' \quad (1)$$

donde  $\vec{r}'$  nos indica la posición de la corriente que integramos en la línea  $l'$ . Identificamos cada parte por separado

▷  $\vec{r} = z\hat{k}$

▷  $\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}' + z'\hat{k}' = R\hat{\rho}'$ , ya que esto tenemos corriente a una distancia  $\rho' = R$  y en  $z' = 0$

▷  $\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - R\hat{\rho}'$

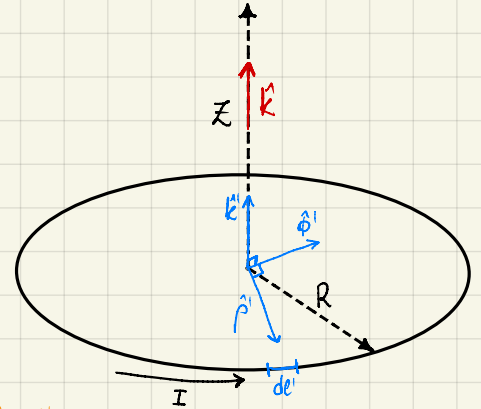
▷  $\vec{I}(\vec{r}') = I\hat{\phi}'$ , la corriente es homogénea

▷  $dl' = \rho'd\phi' = R d\phi'$ , donde  $\phi' \in (0, 2\pi]$

Reemplacemos en (1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{B}(z\hat{k}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\phi}' \times (z\hat{k} - R\hat{\rho}')}{(z^2 + R^2)^{3/2}} R d\phi' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[ z \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\phi' + R \int_0^{2\pi} \hat{k}' d\phi' \right] \end{aligned}$$

$\hat{k} = \hat{k}'$



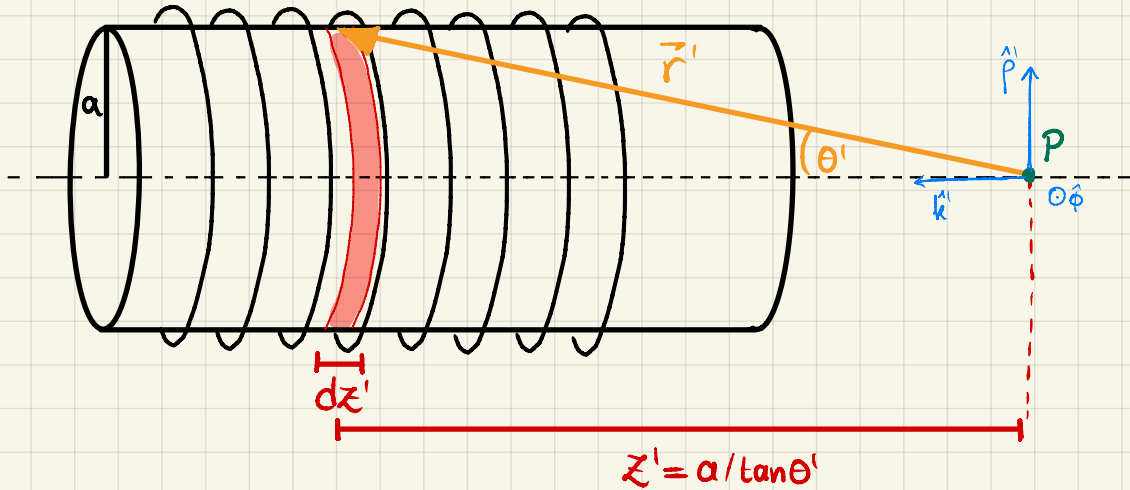
Recordamos que  $\hat{k}' = \hat{k}$  no depende de la coordenada  $\phi'$ , pero  $\hat{\rho}'$  sí:

$$\hat{\rho}' = \cos\phi' \hat{i} + \sin\phi' \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{B}(z\hat{k}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[ z \int_0^{2\pi} (\cancel{\cos\phi'} \hat{i} + \cancel{\sin\phi'} \hat{j}) d\phi' + 2\pi R \hat{k}' \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} \end{aligned}$$

$\hat{k} = \hat{k}'$

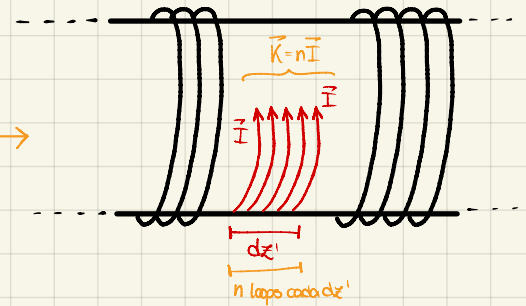
# P2



El campo magnético en  $P$  puede ser calculado ocupando Ley de Ampere (y un par de argumentos físicos), pero ahora lo calcularemos con Biot-Savart donde tenemos una corriente lineal, pero como las vueltas del alambre están tan juntas, podemos considerar una densidad de corriente superficial dada por  $\vec{K} = I \cdot n$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da'$$

identificamos cada parte de (1)



$$\triangleright \vec{r} = \vec{0} \quad \triangleright \vec{r}' = \rho' \hat{\rho}' + z' \hat{k}' = a \hat{\rho}' + a / \tan(\theta') \hat{k}'$$

$$\triangleright \vec{r} - \vec{r}' = -a \hat{\rho}' - a / \tan \theta' \hat{k}' \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (a^2 + a^2 / \tan^2 \theta')^{3/2} = a^3 / \sin^3 \theta'$$

$$\triangleright \vec{K}(\vec{r}') = I n \hat{\phi}', \text{ el sentido de } \vec{K} \text{ está dado por el signo de } I$$

$$\triangleright da' = \rho' d\phi' dz' = a d\phi' \cdot \left( -\frac{a}{\sin^2 \theta'} d\theta' \right) = -a^2 d\phi' \frac{d\theta'}{\sin^2 \theta'}, \text{ donde } \phi' \in [0, 2\pi] \text{ y } \theta' \in [\theta_1, \theta_2]$$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ I n \hat{\phi}' \times (-a \hat{\rho}' - a / \tan \theta' \hat{k}') \right] \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^{-3/2}}{a^{3/2}} \cdot \left( -\frac{a^2 d\phi' d\theta'}{\sin^2 \theta'} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I n}{a} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{\phi}' \times (a \hat{\rho}' + a / \tan \theta' \hat{k}') \sin \theta' d\phi' d\theta'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I n \left[ - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{k}' \sin \theta' d\phi' d\theta' + \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\hat{\rho}'}{\tan \theta'} d\phi' d\theta' \right]$$

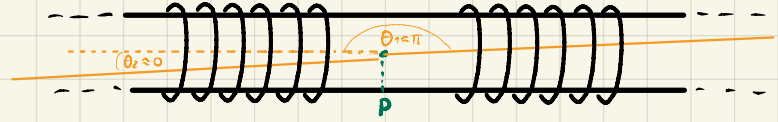
al igual que en el problema anterior, la segunda integral se anula al pasar  $\hat{\rho}'$  a cartesianas. Por lo que nos queda

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I n \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{k}'$$

$$= \frac{\mu_0}{2} I n \cos\theta' \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{k}' = \frac{\mu_0}{2} I n (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \hat{k}$$

Ahora, si consideramos el solenoide infinito, digamos que nuestro punto P está "justo al medio" de este cilindro infinito, nuestro ángulo inicial de integración  $\theta_1$  sería  $\theta_1 = \pi$  y  $\theta_2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{2} I n (1 + 1) \hat{k} = \mu_0 I n \hat{k}$$



Sin embargo, en un cilindro infinito todos los puntos serían "justo al medio" del solenoide y como  $a \ll \infty$ , entonces en todas partes al interior de un solenoide infinito el campo valdría

$$\vec{B} = \mu_0 I n \hat{k}$$