Auxiliar Extra C1

Conductores

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

P1.-

Un modelo anticuado (y no realista) para un átomo de hidrógeno sugiere que éste se compone de una nube con carga positiva e, la cual se distribuye en una esfera de radio R con una densidad de carga volumétrica dada por:

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)(3 - \frac{r}{a_0})$$

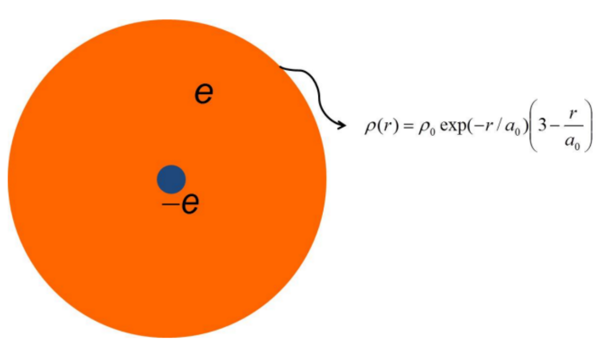
Aquí, a_0 es un parámetro conocido llamado radio de Bohr, y ρ_0 una constante. Finalmente, en el centro de dicho átomo se encuentra ubicado un electrón de carga e (puntual) y de masa m_e, como se indica en la figura.

a) Determine el valor de ρ_0 (Note que la función de distribución se hace nula en $r = 3a_0$, valor considerado como radio de este átomo).

b) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio. Muestre que el electrón ubicado en el centro del átomo estará en equilibrio en dicha posición.

c) Determine el potencial a una distancia r del electrón ($r < 3a_0$).

d) Suponga que el electrón sufre un pequeño desplazamiento respecto de su posición de equilibrio. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones con la cual el electrón oscilaría armónicamente.

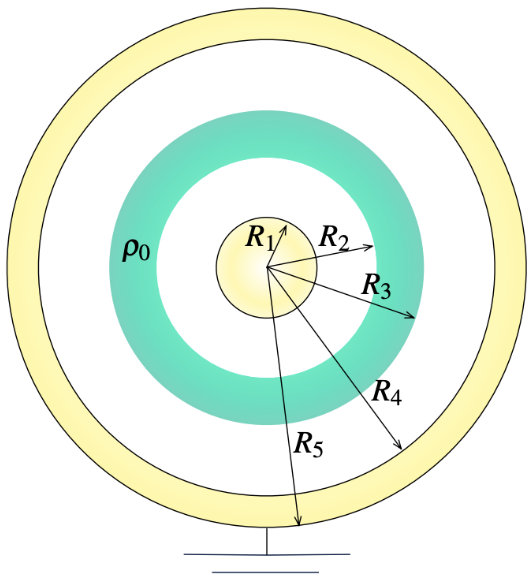


P2.-

Sean dos cilindros infinitos concéntricos conductores (los amarillos), uno de ellos macizo de radio R_1, y el otro un cascarón de radios R_4 y R_5 conectado a tierra, como muestra la figura. Se coloca una densidad volumétrica de carga ρ_0 entre los cilindros de ancho $(R_3 - R_2)$

a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio y las densidades de cargas inducidas en las superficies conductoras

b) Calcule la diferencia de potencial entre los conductores



Formulario

Condiciones de borde

En una superficie cualquier con densidad de carga σ se tiene la condición

$$\vec{E}_{\text{above}} - \vec{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}\,,$$

escrito de otra forma

$$E^{\perp}_{\text{above}} - E^{\perp}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,, \qquad E^{\parallel}_{\text{above}} = E^{\parallel}_{\text{below}}\,,$$

donde E_{above} y E_{below} son los campos medidos **justo** sobre y bajo el plano respectivamente.

Ley de Gauss

Podemos ocupar Ley de Gauss cuando tenemos **densidades de carga uniformes** y **formas simétricas** (plano infinito, cilindro infinito y esfera).

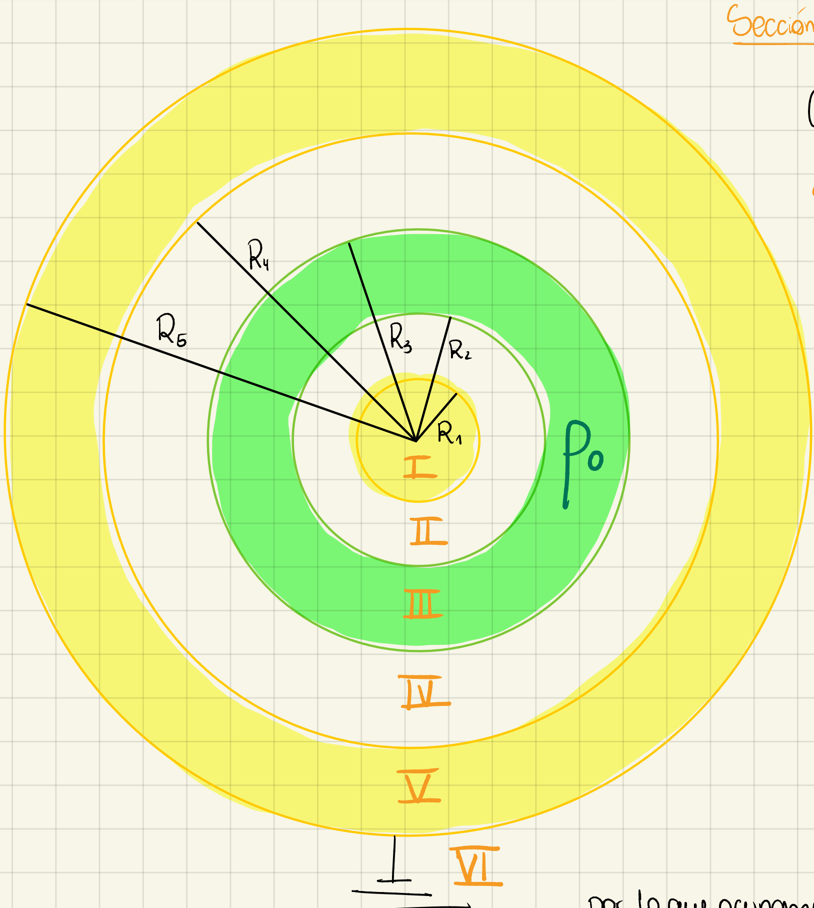
$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}\,,$$

donde $\mathrm{d}\vec{S}$ es el diferencial vectorial de superficie de la superficie gaussiana y Q_{enc} la carga total encerrada por esa superficie.
El campo eléctrico sale de la integral al ser uniforme para un mismo radio r, por lo que la integral da simplemente la superficie de la superficie gaussiana elegida.

Auxiliar Extra

P2

Usamos Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en cada sección



Sección I

Como es un conductor macizo $\Rightarrow \vec{E}_I(\vec{r}) = \vec{0}$

Sección II

No hay carga encerrada $\Rightarrow \vec{E}_{II}(\vec{r}) = \vec{0}$

Sección III

La cantidad de carga que encerremos con un radio r t.q $R_2 \leq r < R_3$, depende de este radio. Calculamos la carga encerrada como

$$Q_{III} = \int \rho(r')\,d\upsilon' = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{R_2}^{r} \rho_0\, r'dr'd\phi'dz'$$

$$= \rho_0\, \pi L r'^2 \Big|_{R_2}^{r} = \rho_0 \pi L\,(r^2 - R_2^2)$$

por lo que ocupando Ley de Gauss (considerando cilindros de largo L) es:

$$\oint \vec{E}_{III}(\vec{r})\cdot d\vec{S}' = E_{III}(\vec{r})\cdot 2\pi r L = \frac{Q_{III}}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow E_{III}(\vec{r})\, 2\pi r L = \frac{\rho_0 \pi L (r^2 - R_2^2)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{III}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}(r^2 - R_2^2)\,\hat{r}\ ,\ \text{para } R_2 \leq r < R_3$$

Sección IV

Aquí encerramos toda la carga proveniente de ρ_0

$$Q_{IV} = \int \rho(r')\,d\upsilon' = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{R_2}^{R_3} \rho_0\, r'dr'd\phi'dz' = \rho_0 \pi L (R_3^2 - R_2^2)\text{, así que con Gauss}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{IV}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}(R_3^2 - R_2^2)\,\hat{r}\ ,\quad \text{para } R_3 \leq r < R_4$$

Sección V

Estamos dentro de un conductor $\Rightarrow \vec{E}_{V}(\vec{r}) = \vec{0}$

Sección VI

Como en $r = R_5$ está conectado a tierra (potencial igual a cero) implica que el campo eléctrico es 0 para $R_5 \leq r$. Esto lo pueden ver como

$$\Delta V = \cancel{V(r=R_5)}^{0} - \cancel{V(r=\infty)}^{0} = -\int_{\infty}^{R_5} \vec{E}_{VI}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}\,'$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\int_{\infty}^{R_5} E_{VI}(\vec{r}\,')\cdot dr' \quad \Rightarrow E_{VI} = 0 \quad \forall r \in [R_5, \infty)$$

Para calcular las densidades de carga superficiales inducidas usamos que:

Para $r = R_1$

Dentro del conductor el campo debe ser 0 y para $R_1 \leq r < R_2$ se encierra una carga neta igual a 0, por lo que el campo en II también es 0, así que por condición de borde

$$E^{\perp}_{above} - E^{\perp}_{below} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad , \text{ donde } E^{\perp}_{above} = E_{II} \text{ y } E^{\perp}_{below} = E_{I}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{E_{II}}^{0} - \cancel{E_{I}}^{0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

*σ_1 es la densidad de carga en $r = R_1$

Para $r = R_4$ (σ_4)

Analizamos los campos totales justo antes y justo después de $r = R_4$. Para $R_3 \leq r < R_4$ la única carga encerrada es Q_{IV} (ya calculado) y como ya vimos que el cilindro macizo de radio R_1 no aporta al campo total

$$\Rightarrow E^{\perp}_{below} = E_{IV}(r=R_4) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R_4}(R_3^2 - R_2^2)$$

mientras que para $R_4 \leq r$ el campo eléctrico total es 0 $\Rightarrow E^{\perp}_{above} = 0$, por lo que la C.B. nos queda como

$$\cancel{E^{\perp}_{above}}^{0} - E^{\perp}_{below} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R_4}(R_3^2 - R_2^2) = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \sigma_4 = \frac{\rho_0}{2R_4}(R_3^2 - R_2^2)$$

Para $r = R_5$ (σ_5)

Hacemos algo similar. Para $R_4 \leq r < R_5$ el campo eléctrico total es 0 al ser un conductor $\Rightarrow E^{\perp}_{below} = E_{V} = 0$

y como el borde está conectado a tierra, dijimos que para $R_5 \leq r$ el campo total tiene que ser $0 \Rightarrow E^{\perp}_{above} = E_{\text{VI}} = 0$ así que las C.B. son

$$E^{\perp}_{above} - E^{\perp}_{below} = \frac{\sigma_5}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{E_{\text{VI}}}^{0} - \cancel{E_{\text{V}}}^{0} = \frac{\sigma_5}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\sigma_5}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \sigma_5 = 0$$

b) Para calcular el potencial eléctrico es igual que siempre

$$\Delta V = V(\vec{r}) - V(r=\infty) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}'$$

Calculemos el potencial para cualquier r t.q. $0 < r < R_5$, para que practiquen

$$\Delta V = V_{\text{I}}(r) - \cancel{V(r=R_5)}^{0} = -\int_{R_5}^{r} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{\ell}' = -\int_{R_5}^{r} E(r')\,dr'$$

$$= -\int_{R_5}^{R_4} \cancel{E_{\text{V}}(r')}^{0}\,dr' - \int_{R_4}^{R_3} E_{\text{IV}}(r')\,dr' - \int_{R_3}^{R_2} E_{\text{III}}(r')\,dr - \int_{R_2}^{R_1} \cancel{E_{\text{II}}(r')}^{0}\,dr' - \int_{R_1}^{0} \cancel{E_{\text{I}}(r')}^{0}\,dr'$$

$$= -\int_{R_4}^{R_3} \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r'}(R_3^2 - R_2^2)\,dr' - \int_{R_3}^{R_2} \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r'}(r'^2 - R_2^2)\,dr'$$

$$= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_3^2 - R_2^2)\ln\left(\frac{R_3}{R_4}\right) - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(R_2^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)$$

Para el resto de potenciales cambiamos los límites de integración

- $V_{\text{I}}(r) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_3^2 - R_2^2)\ln\left(\frac{R_3}{R_4}\right) - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(R_2^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)$ (*)
- $V_{\text{III}}(r) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_3^2 - R_2^2)\ln\left(\frac{R_3}{R_4}\right) - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(r^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R_3}\right)$
- $V_{\text{IV}}(r) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_3^2 - R_2^2)\ln\left(\frac{r}{R_4}\right)$

Así que finalmente, la diferencia de potencial entre los conductores (entre $r = R_5$ y $r = R_1$) es (*) evaluado en $r = R_1$

$$\Delta V_{conductores} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(R_3^2 - R_2^2)\ln\left(\frac{R_3}{R_4}\right) - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(R_2^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)$$