

Auxiliar 8

Corrientazo

Profesor: Simón Riquelme

Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi

Ayudante: Bruno Pollarolo

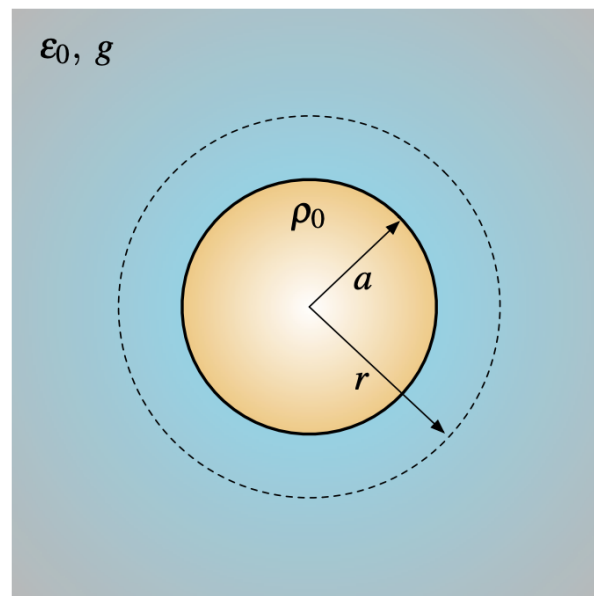
P1.-

Una esfera de radio a se encuentra inmersa en un medio de permitividad ϵ_0 y conductividad g . Al tiempo $t = 0$ una carga eléctrica Q_0 se coloca uniformemente distribuida sobre la esfera

- Encuentre la EDO que gobierna la evolución de la carga $Q(t)$ contenida en la superficie de la esfera de radio a
- Resuelva la EDO anterior e imponga condiciones iniciales
- Calcule la cantidad de energía disipada como calor durante todo el proceso de descarga

Hint: Integre la ecuación de continuidad en un volumen esférico

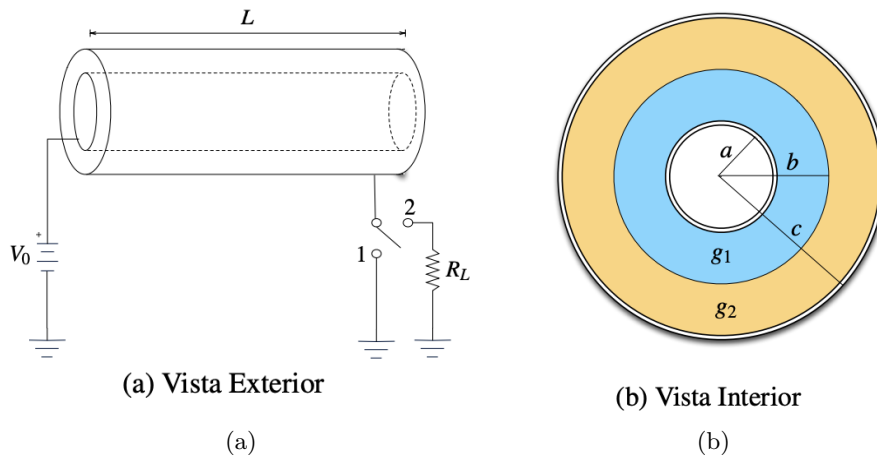
$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



P2.-

Considere el circuito mostrado en la figura. El circuito consta de una fuente de voltaje V_0 , un condensador cilíndrico, un switch que puede cambiar entre las posiciones 1 y 2 y una resistencia R_L desconocida. El condensador cilíndrico tiene un largo L y posee un radio interior a y un radio exterior c (considere $L \gg a, c$). En el interior del condensador hay dos medios materiales óhmicos de conductividad constante g_1 y g_2 y permitividad igual a ϵ_0 . Las posiciones respectivas de cada material al interior del condensador se muestran en la figura parte (b). Si el switch inicialmente se encuentra en la posición 1 y el sistema ha alcanzado el régimen estacionario, determine

- El vector densidad de corriente \vec{J} y el campo eléctrico \vec{E} dentro del condensador
- La carga total de cada placa cilíndrica del condensador
- La corriente que circula por el sistema
- La resistencia del sistema



Formulario

Corriente

La corriente I se calcula como la integral de la densidad de corriente \vec{J}

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

Esta densidad de corriente se relaciona con la densidad de carga por la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

donde para el régimen estacionario se tiene $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. En los materiales óhmicos se tiene la relación

$$\vec{J} = g\vec{E}.$$

Extras

La energía W almacenada en un sistema se calcula como:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E^2(\vec{r}) d\tau , \end{aligned}$$

donde para la primera fórmula \mathcal{V} considera todo el espacio que tenga densidad de carga ρ , mientras que la segunda integral considera **todo** el espacio. Recomendando leer el Griffiths.

La resistencia R de un objeto está dada por

$$R = V/I ,$$

donde V es la diferencia de voltaje a la que está sometido el objeto y I es la corriente que lo atraviesa.

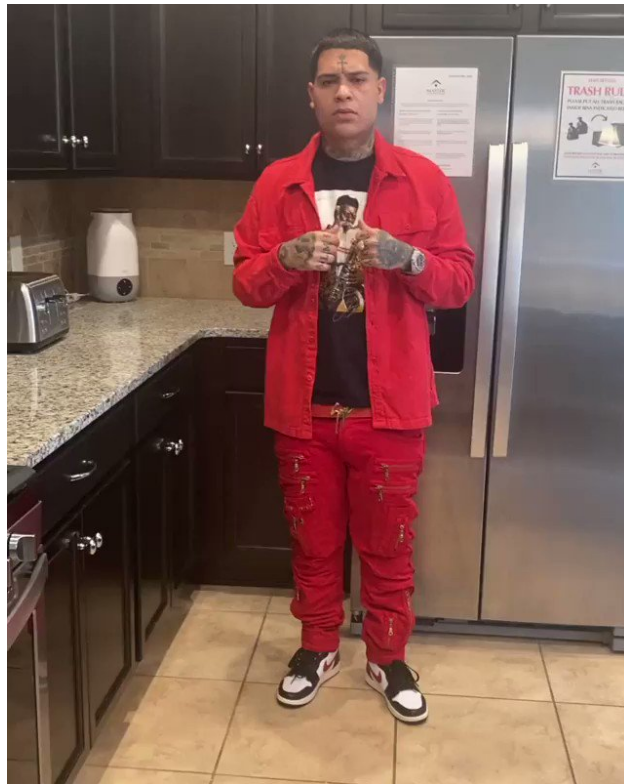
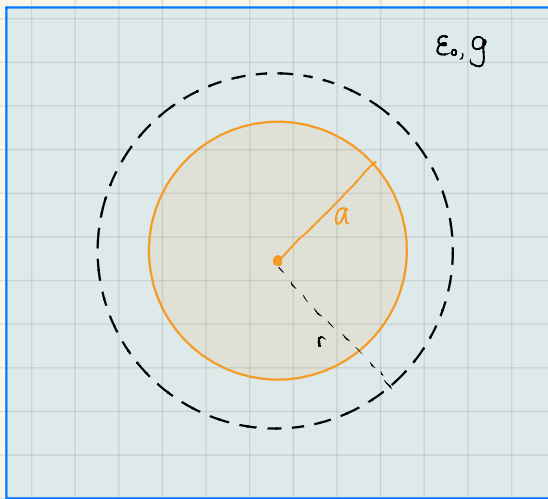


Figura 1: El verdadero **corrientazo**

Auxiliar 8

P1



La esfera conductora (naranja) irá cediendo en el tiempo carga al material con conductividad g (material azul). Luego de un tiempo suficientemente grande el sistema alcanzará un equilibrio (etapa estacionaria), pero como nos interesa la carga en el tiempo antes que se alcance el equilibrio, consideremos la ec. de continuidad

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

integremos (1) en el volumen de una esfera de radio r (ver figura)

$$\Rightarrow \int_V \nabla \vec{J} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\text{y por teo. de Stokes tenemos que } \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \frac{d}{dt} Q(t, r) \quad (2)$$

donde definimos $\int_V \rho dV = Q(t, r)$ como la carga total de una esfera de radio r (y en función del tiempo)

Recordamos que en los materiales óhmicos tenemos la relación $\vec{J} = g\vec{E}$, entonces calculemos \vec{E} .

Para calcular el cpo. eléctrico usamos Ley de Gauss

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(t, r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q(t, r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \text{ para } a \leq r \quad (3)$$

Notamos que en este caso no usamos el desplazamiento \vec{D} , ya que en el material azul estamos en el vacío (por enunciado). Ahora, \vec{J} sería

$$\vec{J}(t, r) = \frac{g Q(t, r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

por lo que \vec{J} saldría de la integral de (2) (al ser constante para un radio r)

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{g Q(t, r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \int_{\partial V} dS = \frac{g Q(t, r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{g}{\epsilon_0} Q(t, r)$$

así que por (2) tendríamos la EDO, $\frac{g}{\epsilon_0} Q(t, r) = - \frac{d}{dt} Q(t, r)$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}(t,r) + \frac{g}{\epsilon_0} Q(t,r) = 0$$

ocupamos polinomio característico $\Rightarrow p(\lambda) = \lambda + \frac{g}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{g}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow Q(t,r) = C_1 \cdot e^{-\frac{g}{\epsilon_0} t}$$

la constante de integración C_1 la podemos calcular con condición inicial $Q(t=0, a) = Q_0 = C_1 \cdot e^0 = C_1$

$$\Rightarrow Q(t,r) = Q_0 e^{-\frac{g}{\epsilon_0} t} \equiv Q(t)$$

donde $Q(t,r)$ finalmente no depende de r , ya que toda esta carga estaría en $r=a$ y el resto se disipa en forma de calor

b) Notemos que en un tiempo infinito $t \rightarrow \infty \Rightarrow Q \rightarrow 0$, por lo que toda la carga se va a disipar en forma de calor, así que esta energía que se disipa será, en total, igual a la energía que nos "costó" inicialmente poner la carga Q_0 en $r=a$.

La energía de un sistema está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV, \text{ donde } V \text{ es el volumen donde haya densidad } \rho$$

$$\text{o } U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2(\vec{r}) dV, \text{ donde } V \text{ es todo el espacio posible (4)}$$

Ocupemos la segunda: ya que Q_0 se distribuiría homogéneamente en la superficie $r=a$ (debido a la simetría del problema), el campo eléctrico fuera de este conductor es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \text{ para } a \leq r \text{ (5)}$$

mientras que, como la esfera naranja es conductora dentro suyo el cpo. eléc. es $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ para $r < a$ (6) así que reemplazando en (4)

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a E^2(\vec{r}) \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \cancel{E^2(\vec{r})} \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi + \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^\infty E^2(\vec{r}) \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^\infty \left(\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \left(\frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^\infty = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 a} / \end{aligned}$$

P2

a) Nos dicen que dejemos pasar el suficiente tiempo para que se alcance el estado estacionario, o sea tenemos

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

y por simetría del problema el cpo. eléctrico sería únicamente radial, por lo que la densidad de corriente también (por $\vec{J} = g\vec{E}$), así que la divergencia sería

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rJ(r)) = 0 \Rightarrow rJ(r) = c_1 \Rightarrow \vec{J}(\vec{r}) = \frac{c_1}{r} \hat{r} \quad (1)$$

con c_1 una cte. desconocida. La corriente eléctrica \vec{I} se calcula como

$$\begin{aligned} I &= \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{c_1}{r} \hat{r} \cdot (r d\phi dz \hat{r} + dr dz \hat{\phi} + r dr d\phi \hat{k}) \\ &= c_1 \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{r}{r} d\phi dz = c_1 2\pi L = I \quad (2) \end{aligned}$$

entonces expresemos \vec{J} en función de I (que desconocemos su valor, pero sabemos que es cte. (2))

$$(1): \vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi L r} \hat{r}$$

Para encontrar \vec{I} expresemos el cpo. eléctrico y luego ocupemos la diferencia de potencial. Considerando materiales ohmicos $\vec{J} = g\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{J} = g_1 \vec{E}_1 \quad \wedge \quad \vec{J} = g_2 \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{I}{2\pi L g_1} \frac{\hat{r}}{r}, \text{ para } a \leq r < b \quad \text{y} \quad \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi L g_2} \frac{\hat{r}}{r}, \text{ para } b \leq r < c \quad (3)$$

Sabemos que la diferencia de potencial entre los conductores es V_0 .

$$\Rightarrow V_0 - 0 = \Delta V = V(a) - V(c) = - \int_c^a \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_c^b E_2(\vec{r}) dr - \int_b^a E_1(\vec{r}) \cdot dr$$

$$V_0 = - \frac{I}{2\pi L g_2} \int_c^b \frac{dr}{r} - \frac{I}{2\pi L g_1} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi L} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$\Rightarrow I = 2\pi l V_0 \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1}$$

con lo que pudimos calcular I , así que conocemos \vec{J} y \vec{E}_i

$$\square \vec{J}(\vec{r}) = \frac{V_0}{r} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \hat{r}$$

$$\square \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{V_0}{g_1 r} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \hat{r}, \text{ para } a \leq r < b$$

$$\square \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{V_0}{g_2 r} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \hat{r}, \text{ para } b \leq r < c$$

b) Para las densidades de carga superficiales en los platos del condensador (en $r=a$ y $r=c$) usamos C.B.

$$E_{\text{above}}^+ - E_{\text{below}}^+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Para $r=a$ $E_{\text{above}}^+ = E_1(r=a)$ y $E_{\text{below}}^+ = 0$ mientras que para $r=c$ $E_{\text{above}}^+ = 0$ y $E_{\text{below}}^+ = E_2(r=c)$

$$\triangleright \sigma_a = \epsilon_0 E_1(r=a) - 0 = \epsilon_0 \frac{V_0}{g_1 a} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \Rightarrow Q_a = \sigma_a \cdot 4\pi a^2$$

$$\triangleright \sigma_b = 0 - \epsilon_0 E_2(r=c) = -\epsilon_0 \frac{V_0}{g_2 c} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \Rightarrow Q_c = \sigma_c \cdot 4\pi c^2$$

c) La corriente ya fue calculada

d) Usamos la fórmula $V = R \cdot I$, donde el voltaje en el cilindro es V_0 y su corriente ya la calculamos

$$\Rightarrow R = \frac{V_0}{I} = 2\pi l \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1}$$

* Aclaración: E_{above}^+ sobre $r=c$ es 0, ya que es el conductor más externo y está conectado a tierra

En algún momento subiré lo otro...