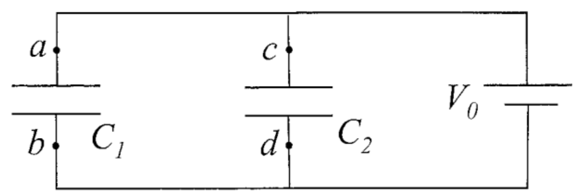
Auxiliar 6

Condensadores

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

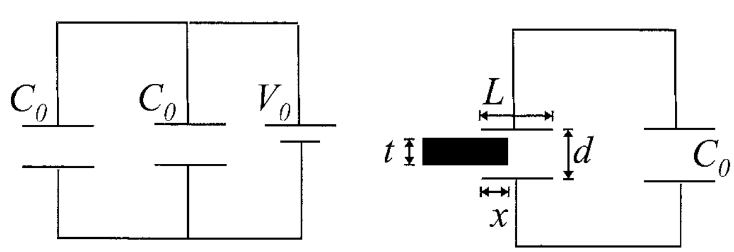
P1.-

Dos condensadores descargados, de capacidades C_1 y C_2 se conectan en paralelo con una batería que entrega una diferencia de potencial V_0. Luego se desconectan, sin perder su carga, y se conectan de modo que la placa positiva del primer condensador quede conectada a la placa negativa del segundo condensador y viceversa (ya no hay batería). Calcule la nueva carga en cada placa de los condensadores



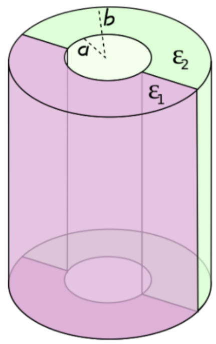
P2.-

Dos condensadores planos idénticos, de área A y separación entre las placas d, inicialmente descargados, se conectan en paralelo. Mediante una batería se les aplica una diferencia de potencial V_0. Luego se desconecta la batería quedando los condensadores cargados y aislados (todavía conectados en paralelo). Se introduce en uno de los condensadores una placa conductora, de igual área y espesor t, una distancia x como se ve en la figura. Calcule, como función de x, la carga final de cada condensador y la energía almacenada en el sistema.



P3.-

La figura representa un condensador formado por dos superficies conductoras cilíndricas de altura h y de radios a y b respectivamente. La superficie de radio a tiene carga Q y la superficie de radio b carga $-Q$. El espacio entre estos conductores está divido por un plano que corta verticalmente al cilindro con un plano que pasa por el eje. Estos espacios están llenos con materiales dieléctricos con constante ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente, Calcule la capacidad de este condensador. Desprecie efectos de borde en los extremos superior e inferior ($h >> b >> b - a$).



Formulario

Condiciones de borde

En una superficie cualquier con densidad de carga σ se tiene la condición

$$E^{\perp}_{\text{above}} - E^{\perp}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,, \qquad E^{\parallel}_{\text{above}} = E^{\parallel}_{\text{below}}\,,$$

donde E_{above} y E_{below} son los campos medidos **justo** sobre y bajo el plano respectivamente.

Condensadores

- Para un condensador básico, la capacitancia está dada por sus propiedades geométricas y el medio $C = \epsilon_k \epsilon_0 \frac{A}{d}$, donde A es el área de las caras, d la separación entre estas, ϵ_k la constante dieléctrica y ϵ_0 la permitividad del vacío.
- La carga en un condensador se calcula como $Q = CV$, donde V es el voltaje al que está conectado el condensador.
- La capacitancia equivalente para condensadores en serie y paralelo respectivamente es:

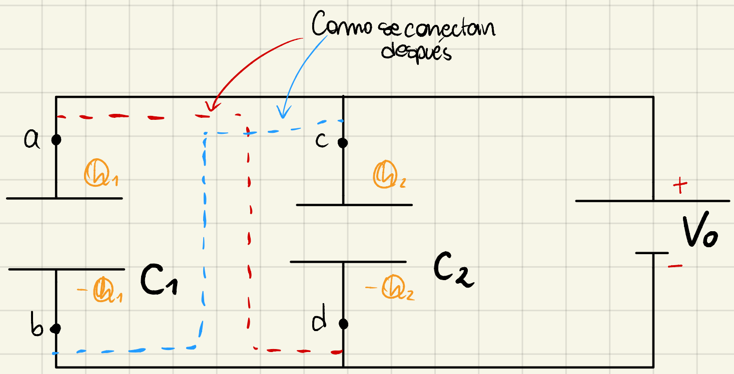
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}\,; \qquad C_{eq} = \sum_i C_i\,.$$

- La energía almacenada en un condensador es

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\,.$$

Auxiliar 6

P1

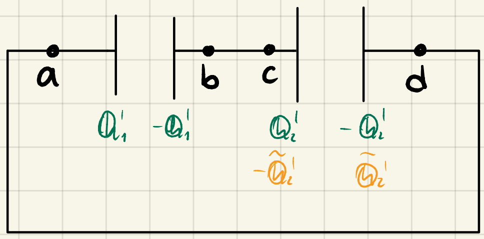


El potencial en todo el circuito es V_0, por lo que la carga de una de las caras de cada condensador está dada por

$$Q_1 = C_1 V_0 \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V_0 \quad (*)$$

y por definición de condensador, la cara opuesta tiene la misma carga, pero con signo negativo

Ahora, de forma instantánea (sin que se pierda la carga del sistema) el nuevo sistema queda como el segundo dibujo



Donde definimos las cargas Q' como las nuevas cargas de cada condensador. Ahora, las cargas se distribuirán en cada tramo manteniendo/conservando la carga de ese tramo antes de desconectarse la batería, o sea tendríamos

$$\underbrace{Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'}_{\text{tramo } a \leftrightarrow d} \quad \text{o} \quad \underbrace{Q_2 - Q_1 = Q_2' - Q_1'}_{\text{tramo } b \leftrightarrow c}$$

Ambas ecuaciones son lo mismo, utilicemos la primera $(*)$

$$\Rightarrow C_1 V_0 - C_2 V_0 = Q_1' - Q_2' \quad (1)$$

Como son dos incógnitas, necesitamos otra ecuación. Como el tramo $a \leftrightarrow d$ del segundo dibujo está conectado, entonces están al mismo potencial $\Rightarrow \Delta V = 0$

$$V_i = \frac{Q_i}{C_i} \Rightarrow \Delta V_{a \leftrightarrow d} = V_a - V_d = \frac{Q_1'}{C_1} - \frac{(-Q_2')}{C_2} = \frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} \overset{!}{=} 0 \quad (2)$$

$\Delta V = 0$ al estar conectados

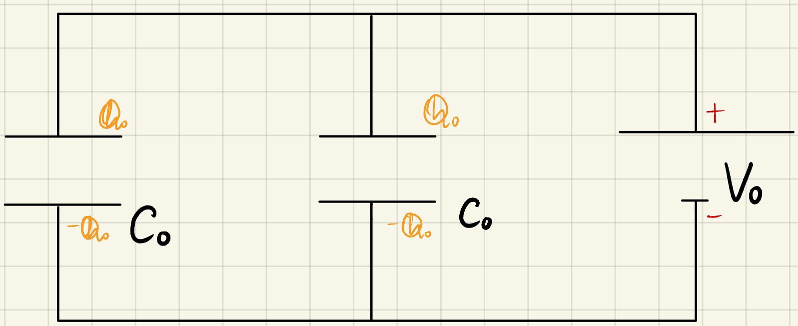
Ahora basta con despejar los Q's

$$(1) \rightarrow Q_1' = V_0(C_1 - C_2) + Q_2' \xrightarrow{\text{en } (2)} \frac{V_0(C_1 - C_2)}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow Q_2' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{V_0(C_2 - C_1)}{C_1} = \boxed{\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} V_0 C_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_1' = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_0 C_1}$$

P2

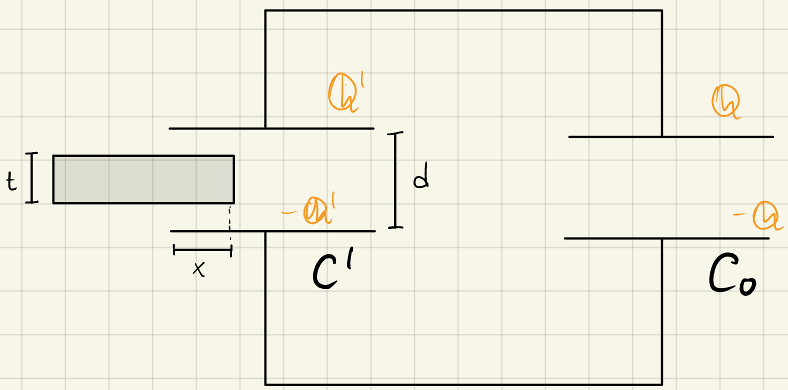


Inicialmente es un problema similar a la P1. Las caras superiores tendrán carga

$$Q_0 = C_0 V_0$$

Luego tenemos el circuito de la segunda figura, donde definimos como C' a la capacitancia del condensador que se está modificando y el otro se matiene como C_0. Por conservación de carga

$$2Q_0 = Q' + Q \quad (1)$$



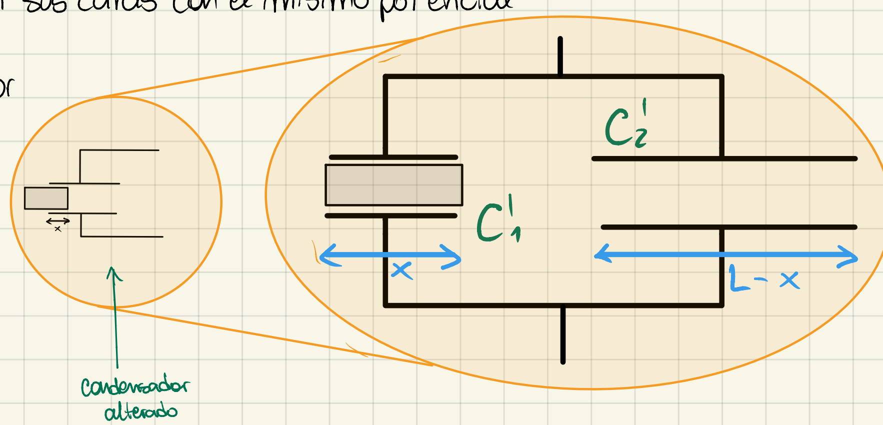
con Q' la carga en el condensador modificado y Q la del no-modificado. Como $\Delta V = 0$ en cada tramo

$$\Delta V = \frac{Q'}{C'} - \frac{Q}{C_0} = 0 \quad (2)$$

Así que solo nos faltaría encontra C' y podríamos despejar Q y Q' con (1) y (2)

Notamos que el condensador alterado lo podemos "partir" y describir como dos condensadores en paralelo ya que estos "dos nuevos" condensadores tendrían sus caras con el mismo potencial

Recordamos que la capacitancia de un condensador está dada por el área de sus caras, la separación entre estas y el material entremedio



$$C_i = \epsilon_0 \frac{A_i}{d_i}$$

Área

separación

Asumimos un ancho H de las placas

$$\Rightarrow C_1' = \epsilon_0 \frac{Hx}{d-t} \quad y \quad C_2' = \epsilon_0 \frac{H(L-x)}{d}$$

Ver anexo

y como están en paralelo, la capacitancia equivalente sería $C' = C_1' + C_2'$. Ahora, usando que $C_0 = \epsilon_0 \frac{HL}{d}$

$$\Rightarrow C_1' = \frac{C_0 d}{L} \frac{x}{d-t} \quad y \quad C_2' = \frac{C_0}{L}(L-x) = C_0 - \frac{C_0 x}{L} \Rightarrow C' = C_0\left(1 + \frac{t}{d-t}\frac{x}{L}\right) \quad (3)$$

Despejando Q' y Q

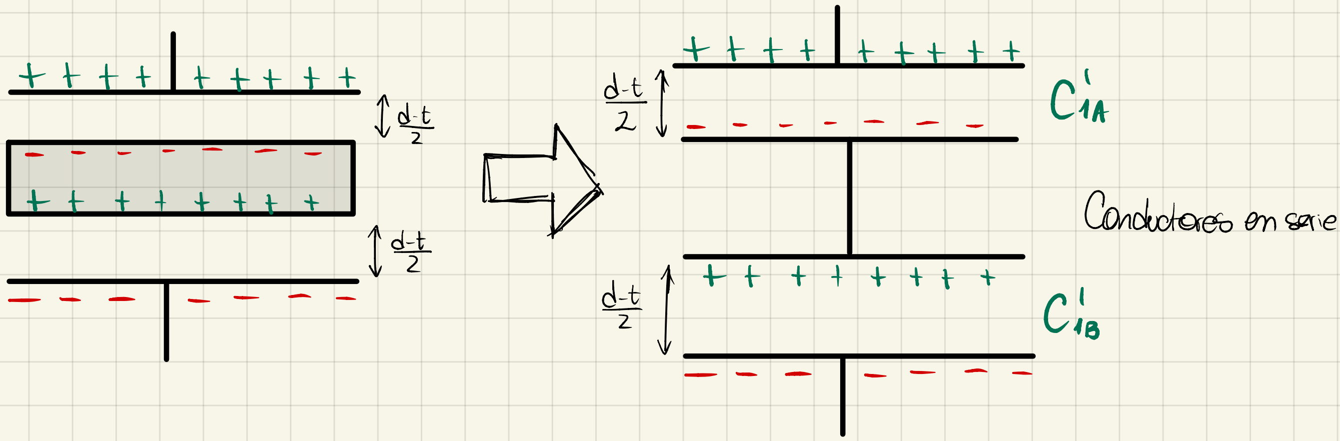
$$(1) \rightarrow Q' = 2Q_0 - Q \xrightarrow{\text{en (2)}} \frac{2Q_0}{C'} - \frac{Q}{C'} - \frac{Q}{C_0} = 0 \Rightarrow Q = 2Q_0 \frac{C_0}{C' + C_0}$$

$$\Rightarrow Q' = 2Q_0 - 2Q_0 \frac{C_0}{C'+C_0} = 2Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C'+C_0}\right) = 2Q_0 \frac{C'}{C'+C_0}$$, donde C' es conocido (3)

y la energía estaría dada por la energía de ambos condensadores, usando $U = Q^2/2C$

$$\Rightarrow U = \frac{Q'^2}{2C'} + \frac{Q^2}{2C_0}$$, donde todo es conocido.

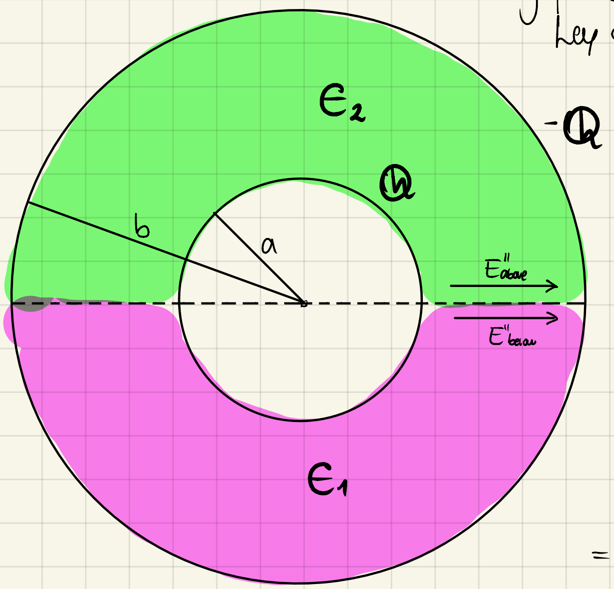
* Anexo: Para calcular C_1' notamos que tenemos el siguiente circuito



Donde tendríamos que $C_{1A}' = C_{1B}' = \epsilon_0 \frac{A}{\frac{d-t}{2}} = \epsilon_0 \frac{2A}{d-t}$ y como están en serie

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_{1A}'} + \frac{1}{C_{1B}'} = \frac{d-t}{\epsilon_0 A} \Rightarrow C_1' = \epsilon_0 \frac{A}{d-t}$$

P3



Tenemos que considerar que en la superficie $r=a$ hay una carga total Q y por simetría $\vec{E}$ sería únicamente radial, por lo que podemos usar Ley de Gauss generalizada (al tener dieléctrico)

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

Donde desde 0 a π tenemos un material ϵ_2 y de π a 2π un material ϵ_1, por lo que a priori tendríamos dos desplazamientos eléctricos

$$\oint \vec{D}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}' = \oint D(r')\hat{r}'\cdot r'd\phi' dz'\hat{r}'$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi} D(r')r'd\phi' dz' = h\left[\int_0^{\pi} D_2(r')r'd\phi' + \int_{\pi}^{2\pi} D_1(r')r'd\phi'\right]$$

$$= h\pi r\left(D_2(r)+D_1(r)\right) \overset{!}{=} Q \quad (1)$$

Pero por C.B. en la interfaz entre ϵ_1 y ϵ_2 $E^{\parallel}_{above} = E^{\parallel}_{below} \equiv E$, por lo que el campo eléctrico sería constante $\forall \phi, z$ a una misma distancia r. Usando la def. del desplazamiento

$$\vec{D}_i = \epsilon_i\vec{E} \Rightarrow D_1 = \epsilon_1 E \ \wedge \ D_2 = \epsilon_2 E$$

reemplazando en (1)

$$\epsilon_1 E(r) + \epsilon_2 E(r) = \frac{Q}{h\pi r} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{h\pi r(\epsilon_1+\epsilon_2)}\hat{r}, \quad \text{para } a\leq r< b$$

Como queremos calcular la capacitancia $C = Q/\Delta V$ debemos calcular la diferencia de potencial

$$\Delta V = V(r=a) - V(r=b) = -\int_b^a \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$= -\frac{Q}{h\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{Q}{h\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{h\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}{\ln(b/a)}$$