

## Auxiliar 4

### Potenciales y conductores

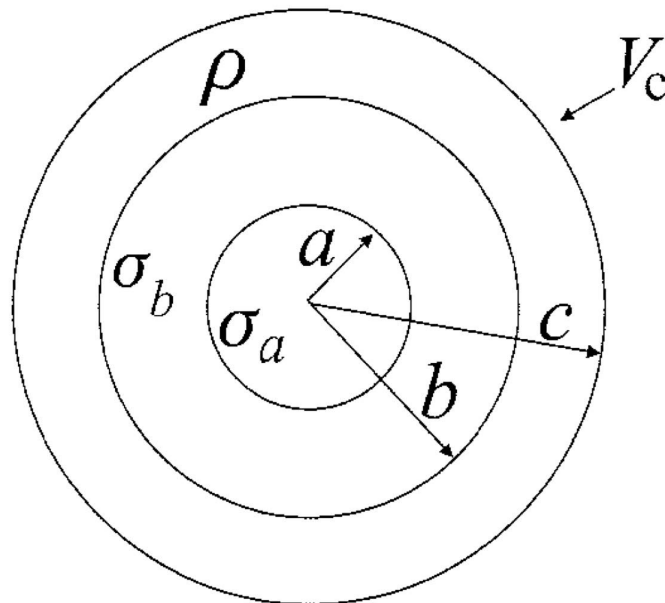
**Profesor: Simón Riquelme**

Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi

Ayudante: Bruno Pollarolo

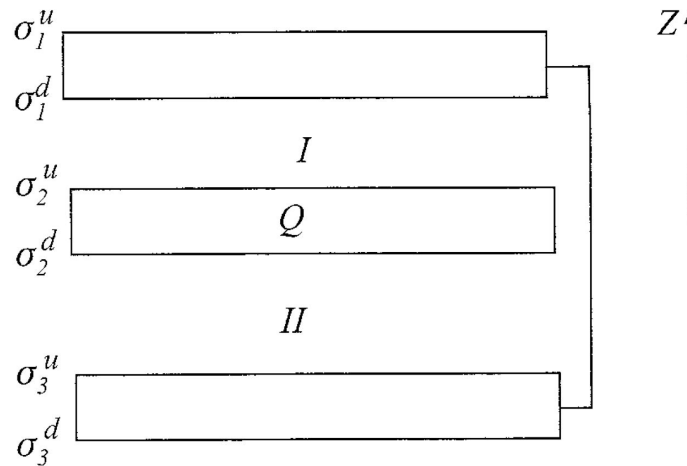
**P1.-**

Considere un sistema formado por dos cilindros conductores de largo infinito y de radios  $a$  y  $c$  respectivamente ( $a < c$ ). Sobre el cilindro de radio  $a$  hay una densidad superficial de carga  $\sigma_a$ . El cilindro conductor de radio  $c$  está a potencial  $V_c$  concido. En el espacio entre los cilindros también hay cierta distribución de carga: en  $r = b$  ( $a < b < c$ ) existe una distribución superficial  $\sigma_b$  y en la región entre  $b$  y  $c$  hay una distribución volumétrica de carga  $\rho = -\rho_0 r$  (con  $r$  la distancia desde un punto al eje concntrico de los cilindros). Un corte transversal de los cilindros se muestra en la Figura. Se pide calcular el potencial entre  $a$  y  $c$ .



## P2.- Conductores y condiciones de borde

Tres placas conductoras paralelas de área  $A$ , muy grandes, se colocan como en la Figura. Las placas externas están conectadas y la placa central tiene carga  $Q$ . Considere que la distancia entre la placa superior y la central es  $d_1$  y entre la placa central y la inferior es  $d_2$ . Determine la carga en cada una de las caras de las placas



### Formulario

#### Condiciones de borde

En una superficie cualquier con densidad de carga  $\sigma$  se tiene la condición

$$\vec{E}_{\text{above}} - \vec{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n},$$

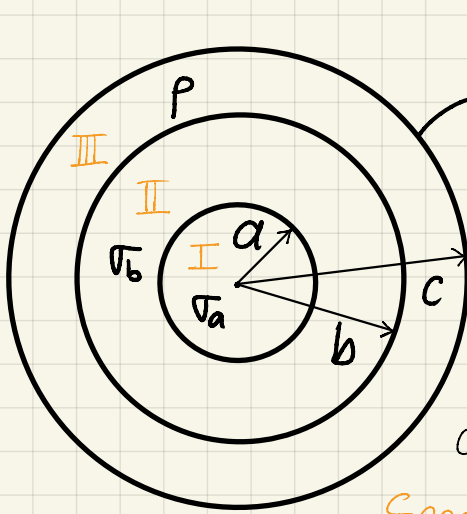
escrito de otra forma

$$E_{\text{above}}^{\perp} - E_{\text{below}}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{\text{above}}^{\parallel} = E_{\text{below}}^{\parallel},$$

donde  $E_{\text{above}}$  y  $E_{\text{below}}$  son los campos medidos **justo** sobre y bajo el plano respectivamente.

# Auxiliar 4

## P1



Para calcular el potencial usaremos el campo eléctrico y con esto

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l}'$$

El campo eléctrico tiene expresiones diferentes en cada sección, calculemoslo en las secciones I, II, III siempre ocupando Ley de Gauss debido a que tenemos simetría cilíndrica

### Sección I

En esta sección no tenemos carga volumétrica y la carga superficial está recién en  $r=a$ , por lo que al hacer Ley de Gauss no estamos encerrando ninguna carga

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_r \cdot d\vec{S} = E_r 2\pi r L \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{en } 0 < r < a$$

### Sección II

Usando un  $r$  t.q.  $a \leq r < b$  estamos encerrando la carga definida por la densidad de carga  $\sigma_a$ , que como es uniforme

$$\Rightarrow Q_{\text{enc},a} = \sigma_a \cdot 2\pi a L$$

así que la Ley de Gauss sería como

$$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc},a}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E_r(r) 2\pi r L = \frac{\sigma_a 2\pi a L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{II}(\vec{r}) = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}, \quad \text{para } a \leq r < b$$

### Sección III

Para un radio  $b \leq r < c$  encerraríamos la carga superficial de  $r=a$ , de  $r=b$  y carga volumétrica  $\rho$ , calculemos la contribución de cada una

$$Q_a = \sigma_a 2\pi a L; \quad Q_b = \sigma_b 2\pi b L; \quad Q_\rho = \int \rho(r') dV' = -\rho_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_b^c r'^2 dr' d\phi dz' = -\frac{\rho_0}{3} 2\pi L (c^3 - b^3)$$

por lo que la Ley de Gauss sería

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_{II} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \text{ donde } Q_{enc} = Q_a + Q_b + Q_p$$

$$\Leftrightarrow E_{II}(r) 2\pi r L = \frac{\sigma_a 2\pi a L + \sigma_b 2\pi b L - \rho_0 2\pi L (r^3 - b^3)/3}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{II}(r) = \left[ \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0 r} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (r^3 - b^3) \right] \hat{r}$$

Así que calculamos el potencial como

$$V_{II}(r) - V(r=c) = - \int_c^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_c^b \vec{E}_{II} \cdot d\vec{l} - \int_b^r \vec{E}_{II} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_c^b E_{II}(r') dr' - \int_b^r E_{II}(r') dr'$$

$$= - \int_c^b \left[ \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r'} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0 r'} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (r'^3 - b^3) \right] dr'$$

$$- \int_b^r \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \frac{1}{r'} dr'$$

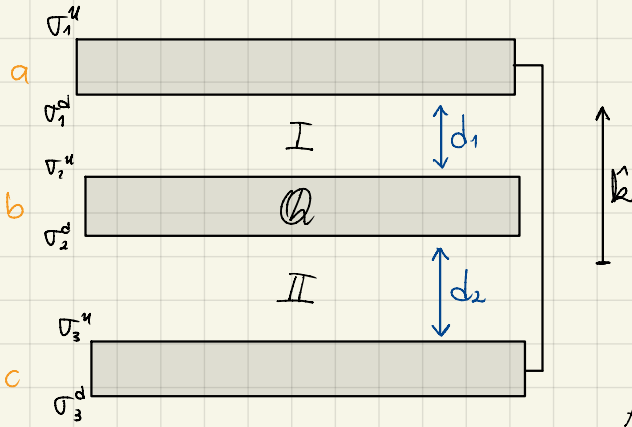
$$= - \left( \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0} + \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0} \right) \int_c^b \frac{dr'}{r'} + \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_c^b r'^2 dr' - \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \int_b^r \frac{dr'}{r'}$$

$$= \left( \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0} + \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{\rho_0}{9\epsilon_0} (b^3 - c^3) - \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$\therefore V(r) = V_c + \left( \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0} + \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0} \right) \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{\rho_0}{9\epsilon_0} (b^3 - c^3) - \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$



# P2



Las placas superior e inferior tienen carga neta 0, pero debido a que la placa central tiene carga, produce un cpo. eléctrico, por lo que las cargas en las placas a y c se van a la superficie, o sea a las caras de cada placa para anular el cpo. eléctrico dentro de ellas (son conductores). Esta disposición de cargas en a y c generan a su vez un cpo. elect., por lo que las cargas de la placa b también se van a los caros de la placa para anular el cpo. dentro de ella. Cada  $\sigma_i$  es uniforme en cada placa por simetría del problema (placas planas, infinitas y paralelas).

Ahora, utilizamos las condiciones de borde para el campo eléctrico

donde para la superficie con carga  $\sigma_2^u$  tenemos:

$$E_{\text{above}}^+ - E_{\text{below}}^+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

justo arriba de la superficie ←
→ justo abajo de la superficie

$$E_{\text{above}}^+ - \cancel{E_{\text{below}}^+} = \frac{\sigma_2^u}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E}_I = \frac{\sigma_2^u}{\epsilon_0} \hat{k} \quad (2)$$

conductor

donde  $E_{\text{above}}^+ = 0$  ya que dentro de conductores el campo es 0. Por lo tanto, para la superficie con  $\sigma_1^d$  tenemos

$$\cancel{E_{\text{above}}^+} - E_{\text{below}}^+ = \frac{\sigma_1^d}{\epsilon_0} \Rightarrow -\vec{E}_I = \frac{\sigma_1^d}{\epsilon_0} \hat{k} \quad (1)$$

conductor

\* Ojo que estos campos son los campos totales (ppio superposición)  
(Ver diferencia en la otra página)

ya que el campo en I es constante. Juntando (1) y (2) encontramos la relación

$$\sigma_2^u = -\sigma_1^d \equiv \sigma \quad (3)$$

Hacemos lo mismo para las cargas  $\sigma_2^d$  y  $\sigma_3^u$ , donde encontramos la misma relación

$$\sigma_2^d = -\sigma_3^u \equiv \tilde{\sigma} \quad (4)$$

Ojo que no conocemos  $\sigma$  ni  $\tilde{\sigma}$ , los encontraremos después

Como dije al inicio, Q se distribuye en ambas caras de la placa b, por lo que

$$\sigma \cdot A + \tilde{\sigma} \cdot A = Q \quad (5)$$

y similarmente, como las placas a y c no tienen carga neta y están conectadas, la suma de sus cargas superficiales inducidas debe ser 0

$$(\sigma_1^u + \sigma_1^d)A + (\sigma_3^u + \sigma_3^d)A = 0$$

$$(3), (4) \Rightarrow (\sigma_1^u - \sigma) + (-\tilde{\sigma} + \sigma_3^d) = 0, \quad (5) \Rightarrow \sigma_1^u + \sigma_3^d = \frac{Q}{A} \quad (6)$$

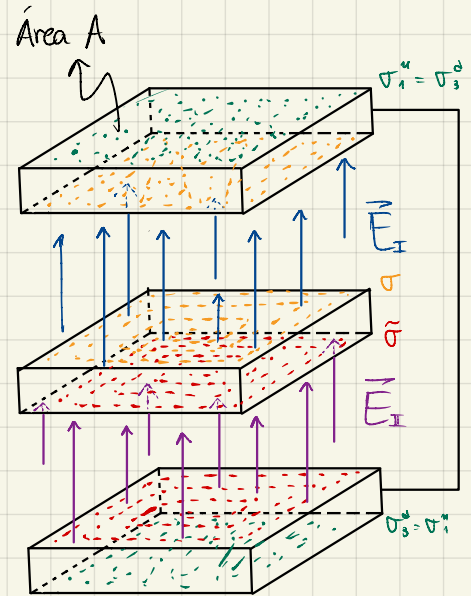
y otra relación por estar conectas es que su diferencia de potencial sea 0

Para calcular  $\Delta V$  usamos el campo eléctrico, donde

$$\vec{E}_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{E}_T = -\frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0} \hat{k}$$

así que

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(z_a) - V(z_b) = - \int_{z_b}^{z_a} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{z_b}^{z_a} \vec{E}_I \cdot d\vec{l} - \int_{z_c}^{z_b} \vec{E}_T \cdot d\vec{l} \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\} d\vec{l} = dz \hat{k} \\ &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{z_b}^{z_a} dz + \frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0} \int_{z_c}^{z_b} dz = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d_1 + \frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0} d_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{\sigma} d_2 = \sigma d_1 \quad (7) \end{aligned}$$



Así que juntando (5) y (7) podremos encontrar  $\sigma$  y  $\tilde{\sigma}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{\sigma} \frac{d_2}{d_1} &= \frac{Q}{A} - \tilde{\sigma} \Leftrightarrow \tilde{\sigma} \frac{(d_2 + d_1)}{d_1} = \frac{Q}{A} \Leftrightarrow \tilde{\sigma} = \frac{Q d_1}{A(d_1 + d_2)} \\ &\Rightarrow \sigma = \frac{Q d_2}{A(d_1 + d_2)} \end{aligned}$$

Y para calcular los términos que nos faltan, ocupemos que el campo producido por todas las cargas superficiales dentro de un conductor es 0. Recordemos que el campo eléctrico producido por una carga superficial  $\sigma_0$  en un plano es

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad \text{para } z > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad \text{para } z < 0$$

\* Estos son los campos producidos por cada fuente por separado

por lo que el campo total dentro de la placa  $b$ , producto de las 6 cargas superficiales es:

$$\vec{E}_{\text{TOT}}(z_b) = \sum_i \vec{E}_i(z_b) = -\frac{\sigma_1^d}{2\epsilon_0} \hat{k} - \frac{\sigma_1^d}{2\epsilon_0} \hat{k} - \frac{\sigma_2^d}{2\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_2^d}{2\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_3^d}{2\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_3^d}{2\epsilon_0} \hat{k} \stackrel{!}{=} 0 \hat{k}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma_1^d}{2\epsilon_0} + \cancel{\frac{\sigma_1^d}{2\epsilon_0}} - \cancel{\frac{\sigma_2^d}{2\epsilon_0}} + \cancel{\frac{\tilde{\sigma}}{2\epsilon_0}} - \cancel{\frac{\tilde{\sigma}}{2\epsilon_0}} + \frac{\sigma_3^d}{2\epsilon_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_3^d = \sigma_1^d \quad (8)$$

Así que juntando (6) y (8)  $\Rightarrow \sigma_1^d = \sigma_3^d = \frac{Q}{2A}$