Auxiliar 1

Campo eléctrico

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

P1.- Cargas discretas

Disponemos tres cargas q_1, q_2 y q_3 sobre una circunferencia de radio $R = 1$ como indica la Figura 1. Considere $q_1 = q_0$, $q_2 = q_3 = -q_0/2$ y α conocido.

a) Calcule el campo eléctrico creado en el centro de la circunferencia

b) Calcule la fuerza ejercida sobre la carga q_1

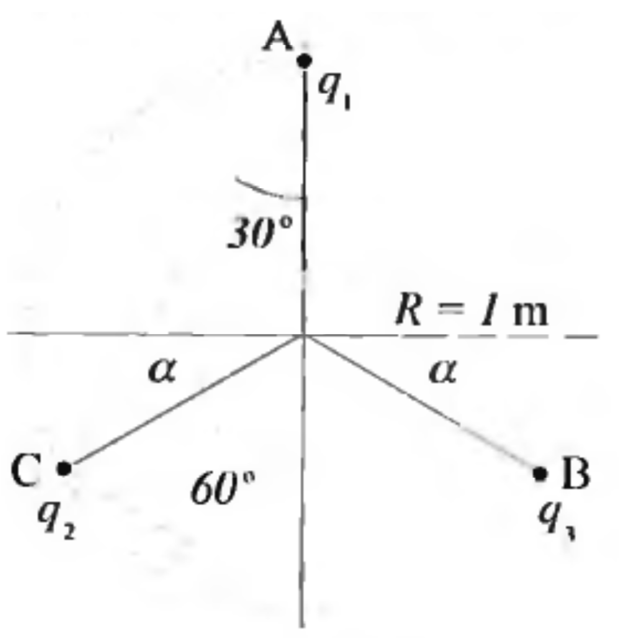


Figura 1: P1

P2.- **Carga continua**

Sobre una superficie esférica como la indicada en la Figura 2, se distribuye una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, donde σ_0 es una constante conocida y θ el ángulo usual de coordenadas esféricas.

Calcule el campo eléctrico en el centro O.

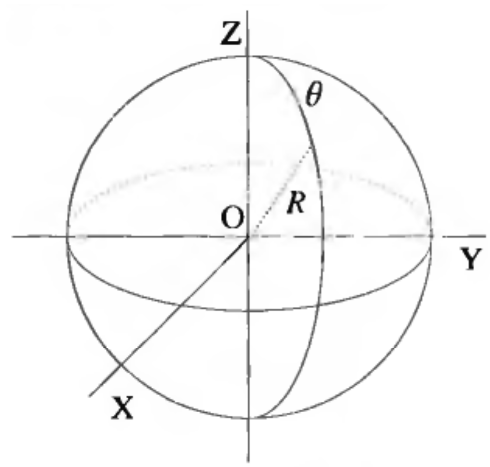


Figura 2: P2

P3.- **Carga continua**

Una esfera de material dieléctrico, se taladra diametralmente, dejando un hueco cilíndrico de radio b. El hueco se puede considerar filiforme en comparación con el radio a de la esfera, o sea, $b << a$. Véase la Figura 3.

Dentro de la esfera, salvo en el hueco cilíndrico, se distribuye una densidad de carga volumétrica uniforme ρ.

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el punto P.

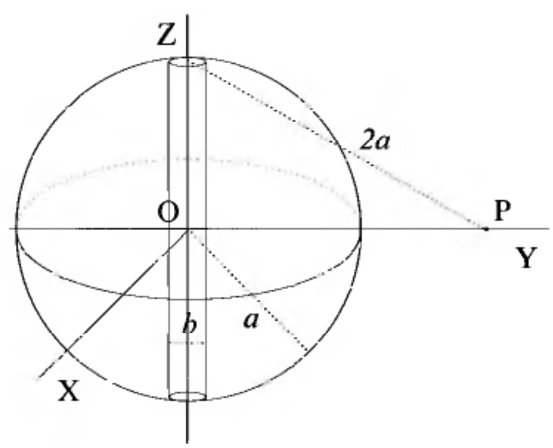


Figura 3: P3

P4.- **Propuesto**

Disponemos de una esfera dieléctrica de radio R. Sobre un meridiano se ha realizado un canal de sección circular; el radio de dicha sección es d ($d << R$). Véase la Figura 4. Dentro de la esfera, excluido el canal, existe una distribución de carga volumétrica uniforme ρ_0.

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico en el punto P debido a la distribución de carga descrita.

Suponemos el radio medio del canal igual a R.

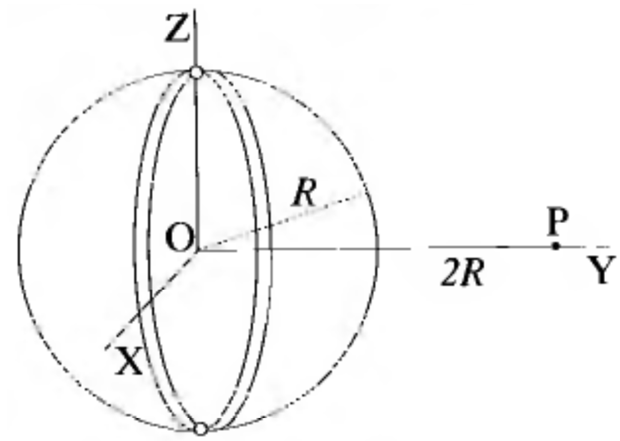


Figura 4: P4

Formulario

Campo eléctrico

Para cargas puntuales, el campo eléctrico se calcula como

$$\vec{E}\left(\vec{r}\,\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,,$$

y para distribuciones continuas

$$\vec{E}\left(\vec{r}\,\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\rho(r')\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}dv'\,.$$

Hay que tener especial atención en que $\vec{r}$ es el vector posición **donde nos interesa saber el campo eléctrico**, mientras que $\vec{r}\,'$ es el vector posición **con respecto al cuál se integra** (va recorriendo el espacio donde se encuentra la carga).

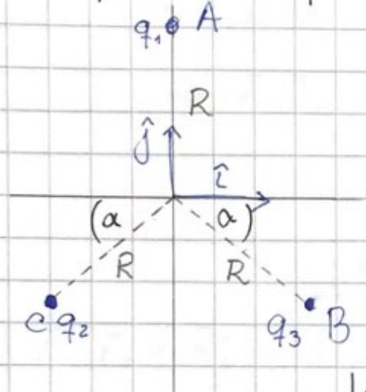
Principio de superposición: el campo total de una distribución es igual a la suma de los campos producidos por cada fuente

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{E}_i\,.$$

Auxiliar 1

Campo eléctrico

P1 a) Usamos el ppio. de superposición, que nos dice que si tenemos más de una fuente: el campo eléctrico total es igual a la suma de los campos producidos por cada fuente



Sabemos que los cpos. producidos por una carga puntual es

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Usando el origen de nuestro sist. de coordenadas cartesiano en el centro de la figura, identificamos la posición de cada carga

$$\vec{r}_1 = R\hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_2 = R(-\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j}) \; ;$$

$$\vec{r}_3 = R(\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j})$$

Y tenemos que la distancia de $\vec{r}=\vec{0}$ a cada partícula es la misma

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| = |-\vec{r}_i| = |\vec{r}_i| = R,$$

por lo que los 3 cpos. eléc. $\vec{E}_i(\vec{r}=0)$ serían:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{R^2}\hat{j} \; ; \; \vec{E}_2 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{2R^2}(-\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j}) \; ;$$

$$\vec{E}_3 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{2R^2}(\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{TOT}(\vec{r}=\vec{0}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{R^2}(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

b) Ahora, nuestro punto de interés es $\vec{r} = \vec{r}_1 = R\hat{j}$, así que hacemos algo similar, solo que ya no se considera $\vec{E}_1$ (no hay autointeracción)

Tenemos

▷ $\vec{r} - \vec{r}_2 = R\hat{j} - (-R\cos\alpha\,\hat{\imath} - R\sin\alpha\,\hat{j})$

$$= R\cos\alpha\,\hat{\imath} + R(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2 + 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{2R^2 + 2R^2\sin\alpha}$$

definimos

$$= R\sqrt{2+2\sin\alpha} \equiv d$$

▷ $\vec{r} - \vec{r}_3 = R\hat{j} - (R\cos\alpha\,\hat{\imath} - R\sin\alpha\,\hat{j})$

$$= -R\cos\alpha\,\hat{\imath} + R(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_3| = |\vec{r} - \vec{r}_2| = R\sqrt{2+2\sin\alpha} = d$$

Así que el cpo. eléc. producido en $\vec{r}_1$ es

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}_1) = \sum_{i\in\{2,3\}} \vec{E}_i(\vec{r}_1) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\, 2\,(1+\sin\alpha)\hat{j}}{2R^2(2+2\sin\alpha)^{3/2}}$$

y la fuerza

$$\vec{F}_1 = q_0\,\vec{E}_{tot}(\vec{r}_1) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0^2}{2R^2}\frac{1}{(2+2\sin\alpha)^{1/2}}\hat{j}$$

* Notamos que en ambos items se cancelan las ~~const~~ contribuciones en la horizontal, por simetría

$\boxed{P_2}$ Estamos frente a un problema de carga continua, por lo que debemos hacer uso de la expresión integral del cpo. eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,ds',$$

identificamos cada parte

- $\sigma(\vec{r}\,') = \sigma_0 \cos\theta'$
- $\vec{r}-\vec{r}\,' = \vec{0} - R\hat{r} = -R\hat{r}\,'$
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = R$
- $ds' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$

Reemplazamos

$$\vec{E}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma_0 \cos\theta' \cdot (-R\hat{r}\,')}{R^3} R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

Impatomte notar que no podemos integrar así, ya que $\hat{r}$ es función de los ángulos

$$\hat{r} = \hat{r}(\theta,\phi), \text{ explícitamente}$$

$$\hat{r} = \cos\phi\sin\theta\,\hat{\imath} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

reemplazamos

son 0 las integrales en θ'

$$\vec{E}(\vec{r}=0) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\overbrace{\cancel{\cos\theta'\sin\theta'\cos\phi'\sin\theta'\,\hat{\imath}'}}^{0}\,d\theta' d\phi'$$
$$+\overbrace{\cancel{\cos\theta'\sin\theta'\sin\phi'\sin\theta'\,\hat{\jmath}'}}^{0}\,d\theta' d\phi'$$
$$+\underbrace{\cos\theta'\sin\theta'\cos\theta'\,\hat{k}'\,d\theta' d\phi'}_{2\pi\,\cdot\,\frac{2}{3}}\Big]$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_0\frac{4\pi}{3}\hat{k}' = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}'$$

} nuevamente se cancela la horizontal por simetría

$\boxed{P_3}$ En electromagnetismo podemos calcular campos de objetos "bastante complicados" cuando usamos la expresión integral del cpo. eléc.. Sin embargo, nos podemos ayudar del ppio. de superposición cuando debemos "sacarle partes" al objeto de interés (la fuente)

En este problema debemos "sacarle" un cilindro a una esfera cargada. Lo que haremos será calcular el cpo. del cilindro (que aproximamos como un alambre) y de la esfera, por separado

Campo de la esfera

Es sencillo, ya que fuera de la esfera esta se comporta como una carga puntual en $\vec{r} = \vec{0}$ de carga

$$q = \int_V \rho \, dv = \rho \underbrace{\int_V dv}_{\text{volumen esfera}} = \rho \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{esf} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a\sqrt{3})^{3}} \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot a\sqrt{3}\,\hat{j}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon} \frac{a}{3}\hat{j} = \frac{\rho \cdot a}{9\varepsilon_0}\hat{j}$$

Campo del alambre

Para usar el ppio. de superposición debemos elegir la densidad de carga del alambre tq. se contrarreste con la densidad de carga de la esfera.

Considerando nuestro cilindro muy fino, su densidad de carga debe ser

*No podemos hacer $\lambda = -\rho$, está mal dimensionalmente

$$2a\lambda = \underbrace{\pi b^2 \cdot 2a}_{\text{volumen cilindro}} \cdot (-\rho)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\rho\pi b^2$$

Calculemos el cpo. de este alambre con la fórmula integral

$$\vec{E}_{alam} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda(r')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dl'$$

Identificamos las partes

- $\lambda(r') = -\rho\pi b^2$
- $\vec{r}-\vec{r}\,' = a\sqrt{3}\,\hat{j} - z'\hat{k}'$
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{a^2\cdot 3 + z'^2}$

Reemplazamos

$$\Rightarrow \vec{E}_{alam} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\rho\pi b^2(a\sqrt{3}\,\hat{j} - \overset{impar}{z'\hat{k}'})}{\underbrace{(\sqrt{3a^2+z'^2})^3}_{par}}\,dz'$$

$$= -\frac{\rho b^2 a\sqrt{3}}{4\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{dz'}{(3a^2+z'^2)^{3/2}}\,\hat{j}$$

Hacemos el c.v. $z' = a\sqrt{3}\tan u$

$$\Rightarrow dz' = a\sqrt{3}\sec^2 u\, du$$

$$I: \int \frac{a\sqrt{3}\sec^2 u\, du}{(3a^2+3a^2\tan^2 u)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{\sec^2 u\, du}{(1+\tan^2 u)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\int\frac{\sec^2 u\, du}{(\sec^2 u)^{3/2}} = \frac{1}{3a^2}\int \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{3a^2}\sin u\Big|_{u_-}^{u_+}$$

donde como $u = \arctan\left(\frac{z'}{a\sqrt{3}}\right)$

$$\Rightarrow I: \frac{1}{3a^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{z'}{a\sqrt{3}}\right)\right)\Big|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \frac{z'}{a\sqrt{3}\sqrt{\frac{z'^2}{3a^2}+1}} \Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{2a}{3\sqrt{3}a^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{3a^2}+1}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}a^2} \sqrt{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}} = \frac{1}{3a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{alam} = -\frac{\rho b^2 a\sqrt{3}}{4\varepsilon_0} \frac{1}{3a^2} \hat{j}$$

$$= -\frac{\rho b^2 \sqrt{3}}{12 a \varepsilon_0} \hat{j}$$

Usando ppio. superpos.

$$\vec{E}_{TOT} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{\rho \cdot a}{9\varepsilon_0} \hat{j} - \frac{\rho b^2 \sqrt{3}}{12 a \varepsilon_0} \hat{j}$$