Auxiliar 14

Ecs. de Maxwell y ondas EM

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

P1.-

Considere una onda electromagnética que viaja en la dirección z en el vacío, el cual posee un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{y}$$

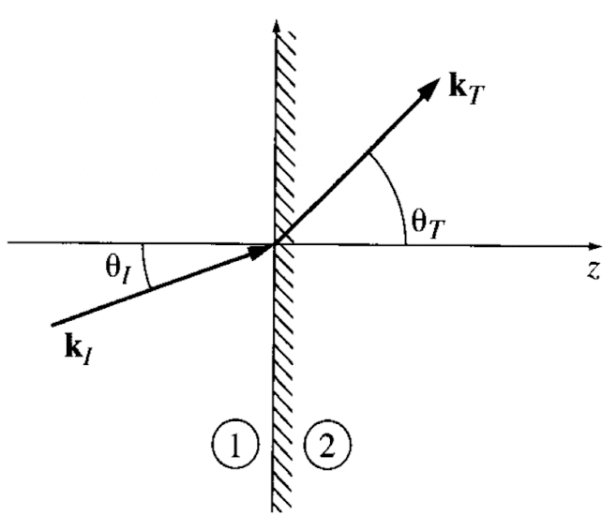
donde E_1 y E_2 son números reales. Determine el campo magnético asociado a esta onda electromagnética y el promedio temporal de Poynting

P2.-

De acuerdo con la Ley de Snell, cuando la luz pasa desde un medio óptico denso a uno menos denso ($n_1 > n_2$) el vector de propagación $\vec{k}$ dobla alejándose de la normal (ver figura). En particular, si la luz incide en la interfaz con el ángulo crítico

$$\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)\,,$$

entonces $\theta_T = 90°$. Si θ_I excede θ_c, no hay luz refractada, solo reflejada (reflexión interna total). Pero los *campos* no son nulos en el medio 2; lo que obtenemos son ondas llamadas **ondas evanescentes**, las cuales rápidamente se atenúan y no transportan energía hacia el medio 2.



Una forma de modelar una onda evanescente es considerar

$$\vec{k}_T = k_T(\sin\theta_T\hat{x} + \cos\theta_T\hat{z})\,,$$

donde $k_T = \omega n_2/c$ y el único cambio es que

$$\sin\theta_T = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I$$

ahora es mayor que 1, y

$$\cos\theta_T = \sin 1 - \sin^2\theta_T = i\sqrt{\sin^2\theta_T - 1}$$

es imaginario. (¡Ya no podemos interpretar θ_T como un ángulo!)

a) Muestre que

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_{0T}e^{-\kappa z}e^{i(kx-\omega t)}\,,$$

donde

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1\sin\theta_I)^2 - n_2^2} \text{ y } k \equiv \frac{\omega n_1}{c}\sin\theta_I\,.$$

Es una onda propagándose en la dirección x (paralelo a la interfaz), y atenuada en la dirección z

b) En el caso de polarización perpendicular al plano de incidencia, muestre que los campos evanescentes (reales) son

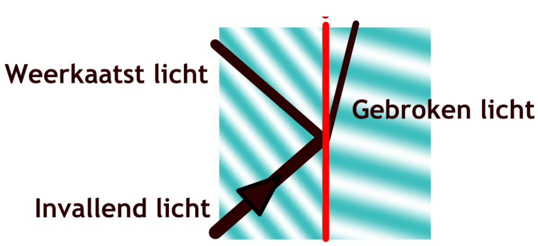
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0e^{-\kappa z}\cos(kx-\omega t)\hat{y}\,,$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{\omega}e^{-\kappa z}\left[\kappa\sin(kx-\omega t)\hat{x} + k\cos(kx-\omega t)\hat{z}\right]$$

c) Demuestre que estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell

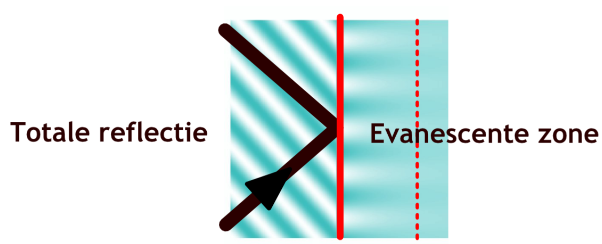
d) Para estos campos, calcule el vector de Poynting y muestre que, en promedio, no hay energía transmitida en la dirección de z

Hint: Para el ítem b) ocupe que los campos transmitidos están dados por

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{E}_{0T}e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{y}$$
$$\tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{n_2}{c}\tilde{E}_{0T}e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}(-\cos\theta_T\hat{x} + \sin\theta_T\hat{z})$$



(a) Cuando hay refracción no hay ondas evanescentes



(b) Cuando no hay refracción (reflexión total) hay presencia de ondas evanescentes

Formulario

Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell están dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\,, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,,$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,,$$

estas expresiones son válidas **para cualquier medio**, tanto vacío como medio material.

Sin embargo, si estamos trabajando en un medio material puede ser útil utilizarlas de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f\,, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,,$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,.$$

Ondas electromagnéticas

Una onda electromagnética puede modelarse de forma general como

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\,,$$

donde usamos funciones imaginarias para simplificar el cálculo.

Un campo eléctrico que cambia en el tiempo produce un campo magnético que cambia en el tiempo (y viceversa) dado por

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}\,.$$

Los vectores sin tilde son la parte real del vector con tilde, $\vec{E} = \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}\}$.

La energía transportada por una onda EM (cambiante en el tiempo) se expresa con el vector de Poynting $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}\,,$$

su promedio en el tiempo se calcula usando

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{con } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

donde nos fijamos en un punto (x, y, z) fijo, de forma que estas coordenadas *no dependen* del tiempo en la integral.

Auxiliar 14

P1

a) Tenemos una onda de la forma

$$\tilde{\vec{E}} = E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{y}$$

Recordando que una onda EM de forma general se escribe como $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\phi)}$, si nuestro cpo. tiene una dependencia kz

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = kz \quad \therefore \vec{k} = k\hat{z} \text{ , ya que } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Para calcular el cpo magnético a partir del cpo. eléctrico usamos

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} \longleftarrow \text{viene de ecs. de Maxwell}$$

entonces $\vec{B}$ en su expresión como función compleja (porque tenemos $\vec{E}$ en su expresión compleja) es:

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{1}{\omega} k\hat{z} \times \left(E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{y} \right)$$

$$= \frac{k}{\omega} E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{y} - \frac{k}{\omega} E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{x}$$

Ahora expresemos el vector de Poynting, para esto tomamos la parte real de $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{B}}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &\equiv \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}\} = E_1\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{y} \\ \vec{B} &\equiv \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{B}}\} = \frac{k}{\omega}E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y} - \frac{k}{\omega}E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{x} \end{aligned}\right\} \text{recordar que } E_1, E_2 \in \mathbb{R} \text{ por enunciado}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_1\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{y} \right] \times \left[\frac{k}{\omega}E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y} - \frac{k}{\omega}E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{x} \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\left[E_1^2\cos^2(kz-\omega t) + E_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) \right]\hat{z}$$

y su promedio temporal sería

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,dt \text{ , con } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\left[E_1^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t)\,dt + E_2^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t-\phi) \right]\hat{z} \text{ , hacemos } \begin{aligned} \Omega &= kz-\omega t \Rightarrow dt = -d\Omega/\omega \\ \Omega' &= kz-\omega t-\phi \Rightarrow dt = -d\Omega'/\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[-\frac{E_1^2}{\omega}\int_{kz}^{kz-2\pi}\cos^2\Omega\, d\Omega - \frac{E_2^2}{\omega}\int_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi}\cos^2\Omega' d\Omega' \right]\hat{z}$$

$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[-\frac{E_1^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(\Omega + \sin\Omega\cos\Omega\right)\Big|_{kz}^{kz-2\pi} - \frac{E_2^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(\Omega' + \sin\Omega'\cos\Omega'\right)\Big|_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi} \right]\hat{z}$$

se van los términos $\sin x\cos x$ al tener periodo 2π

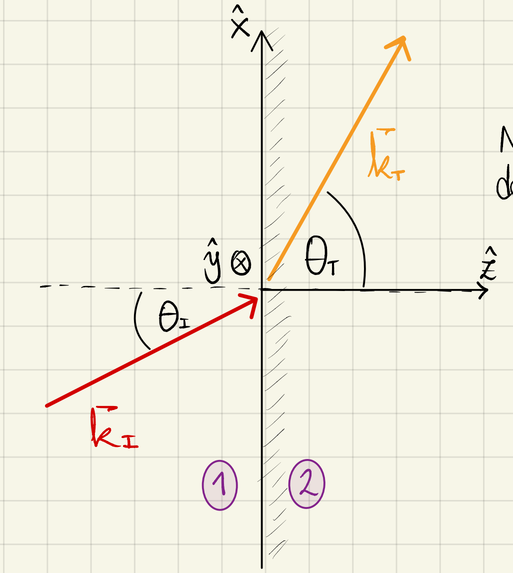
$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[-\frac{E_1^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(kz-2\pi-kz\right) - \frac{E_2^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(kz-\phi-2\pi-(kz-\phi)\right) \right]\hat{z}$$

$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[\frac{E_1^2}{\omega}\frac{1}{2}2\pi + \frac{E_2^2}{\omega}\frac{1}{2}2\pi \right]\hat{z}$$

$$= \frac{k}{2\mu_0\omega}\left[E_1^2 + E_2^2 \right]\hat{z}$$

P2

a) Tenemos un problema de ondas atravesando un medio, de forma general una onda transmitida desde el medio 1 al 2 es como



$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t)=\tilde{\vec{E}}_{0T}\,e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (*)$$

Nos dicen que modelemos la onda evanescente (la "transmitida") con un vector propagación $\vec{k}_T$ dado por

$$\vec{k}_T=\frac{\omega n_2}{c}\left(\sin\theta_T\,\hat{x}+\cos\theta_T\,\hat{z}\right)$$

y $\vec{r}$ lo escribimos de forma general (para cualquier posición)

$$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_T\cdot\vec{r}=\frac{\omega n_2}{c}\left(x\sin\theta_T+z\cos\theta_T\right) \quad (1)$$

A priori no conocemos este "ángulo" de transmisión, pero nos dan su relación con el ángulo de incidencia (que es un valor que controlamos experimentalmente)

Ley Snell

$$\sin\theta_T=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I \Rightarrow \cos\theta_T=i\sqrt{\sin^2\theta_T-1}=i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I-1}$$

>1 ya que estamos considerando $\theta_I>\theta_c$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \vec{k}_T\cdot\vec{r}=\frac{\omega n_2}{c}\left(x\,\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I+iz\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I-1}\right)$$

$$=\frac{\omega}{c}n_1\sin\theta_I\,x+i\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_I-n_2^2}\;z\equiv kx+i\kappa z$$

donde definimos las cantidades (ctes para un valor cte. de θ_I) $k\equiv\frac{\omega n_1}{c}\sin\theta_I$, $\kappa\equiv\frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1\sin\theta_I)^2-n_2^2}$

Reemplazando esta expresion en (*) obtenemos la expresión de la onda evanescente

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t)=\tilde{\vec{E}}_{0T}\,e^{-\kappa z}\,e^{i(kx-\omega t)}$$

analizando sus argumentos tenemos que se propaga en $\hat{x}$ paralelo a la interfaz (por el kx) y se atenúa en z (por $-\kappa z$).

b) Se puede demostrar que un cpo eléctrico perpendicular al plano de incidencia x-z, o sea de la forma

$$\tilde{\vec{E}}_I(\vec{r},t)=\tilde{E}_{0I}\,e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\hat{y}$$

no cambia su polarización, o sea tanto la onda reflejada como la transmitida tienen polarización en $\hat{y}$ también

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t)=\tilde{E}_{0T}\,e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\hat{y}\ ,\quad \text{usando } \vec{k}_T=k_1\left(\sin\theta_T\,\hat{x}+\cos\theta_T\,\hat{z}\right)$$

y $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$ calculamos $\tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \dfrac{1}{v_2}\tilde{E}_{0T}\, e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}(-\cos\theta_T\,\hat{x} + \sin\theta_T\,\hat{z})$, con $v_2 = \dfrac{c}{n_2}$

escribimos todo en función de k, κ: $\vec{k}_T\cdot\vec{r} = kx + i\kappa z$, $\sin\theta_T = \dfrac{ck}{n_2\omega}$, $\cos\theta_T = i\dfrac{c\kappa}{n_2\omega}$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{E}_{0T}\, e^{-\kappa z} e^{i(kx-\omega t)}\,\hat{y} \quad \wedge \quad \tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{n_2}{c}\tilde{E}_{0T}\, e^{-\kappa z} e^{i(kx-\omega t)}\left(-\frac{ic\kappa}{n_2\omega}\hat{x} + \frac{ck}{n_2\omega}\hat{z}\right)$$

Estos cpos. están en su expresión imaginaria, por lo que debemos tomar la parte real, escribamos $\tilde{E}_{0T}$ como

$$\tilde{E}_{0T} = E^R_{0T} + iE^I_{0T}\ , \quad \text{con } E^R_{0T}, E^I_{0T} \in \mathbb{R}$$

y expandiendo las exponenciales imaginarias usando la fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = (E^R_{0T} + iE^I_{0T})(\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t))\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

$$= \Big[\underbrace{E^R_{0T}\cos(kx-\omega t) - E^I_{0T}\sin(kx-\omega t)}_{\text{parte real}} + i\underbrace{\left(E^R_{0T}\sin(kx-\omega t) + E^I_{0T}\cos(kx-\omega t)\right)}_{\text{parte imaginaria}}\Big] e^{-\kappa z}\,\hat{y} = \tilde{\vec{E}}^R_T(\vec{r},t) + i\tilde{\vec{E}}^I_T(\vec{r},t)$$

tomamos la parte real

$$\vec{E}(\vec{r},t) \equiv [E^R_{0T}\cos(kx-\omega t) - E^I_{0T}\sin(kx-\omega t)]\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

recordemos la fórmula $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, donde si definimos $\underbrace{\dfrac{E^R_{0T}}{E_0} \equiv \cos\beta \text{ y } \dfrac{E^I_{0T}}{E_0} \equiv \sin\beta}_{E^R_{0T} \text{ y } E^I_{0T} \text{ deben cumplir } (E^R_{0T})^2 + (E^I_{0T})^2 = E_0^2}$ y $\alpha = kx - \omega t$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = E_0\left[\frac{E^R_{0T}}{E_0}\cos(kx-\omega t) - \frac{E^I_{0T}}{E_0}\sin(kx-\omega t)\right] e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

$$= E_0[\cos\beta\cos(kx-\omega t) - \sin\beta\sin(kx-\omega t)]\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

$$= E_0\cos(kx-\omega t+\phi)\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

en un experimento tenemos la libertad de elegir la fase de transmisión, por lo que podemos elegir $\phi = \arccos\beta = \arcsin\beta \stackrel{!}{=} 0$ (que sería $E^I_{0T} \stackrel{!}{=} 0 \wedge E^R_{0T} \stackrel{!}{=} E_0$)

Como $\tilde{\vec{B}}_T$ está en función de $\tilde{E}_{0T}$, si antes elegimos $E^I_{0T} \stackrel{!}{=} 0$ ahora también

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{n_2}{c}E^R_{0T}\left(\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\right)\left(-\frac{ic\kappa}{n_2\omega}\hat{x} + \frac{ck}{n_2\omega}\hat{z}\right) e^{-\kappa z}$$

$$= \frac{n_2}{c}E^R_{0T}\left[\frac{ck}{n_2\omega}\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} + \frac{c\kappa}{n_2\omega}\sin(kx-\omega t)\,\hat{x} + i\left(-\frac{c\kappa}{n_2\omega}\cos(kx-\omega t)\,\hat{x} + \frac{ck}{n_2\omega}\sin(kx-\omega t)\,\hat{z}\right)\right] e^{-\kappa z}$$

$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) \equiv \dfrac{1}{\omega}E_0\, e^{-\kappa z}\left(k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} + \kappa\sin(kx-\omega t)\,\hat{x}\right)$, donde $E_0 = E^R_{0T}$ (ya que $E^I_{0T} \stackrel{!}{=} 0$)

c) Reemplace en las ecs. de Maxwell con los cpos. encontrados en b)

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0$$ considerarnos un medio sin carga, $\rho=0$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\underbrace{\phantom{\nabla\cdot\vec{E}=0}}_{\text{Sencillos}}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_2\epsilon_2\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$ consideramos un medio sin corriente $\vec{J}=\vec{0}$

$\mu_2\epsilon_2 = \left(\frac{n_2}{c}\right)^2$

$$\underbrace{\phantom{\nabla\times\vec{B}=\mu_2\epsilon_2}}_{\text{más matraqueros}}$$

d) El vector de Poynting se calcula como $\vec{S} = \frac{1}{\mu_i}(\vec{E}\times\vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_2}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_2\omega}E_0^2 e^{-2\kappa z}[\cos(kx-\omega t)\hat{y}]\times[k\cos(kx-\omega t)\hat{z} + \kappa\sin(kx-\omega t)\hat{x}]$$

$$= \frac{1}{\mu_2\omega}E_0^2 e^{-2\kappa z}[k\cos^2(kx-\omega t)\hat{x} - \kappa\cos(kx-\omega t)\sin(kx-\omega t)\hat{z}]$$

Calculamos el promedio temporal en un ciclo completo $(T=2\pi/\omega)$ de este vector ($\hat{x}$ y $\hat{z}$ no dependen del tiempo así que salen de la integral) para una posición (x,y,z) fija

$$T\cdot\langle\vec{S}\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_2\omega}e^{-\kappa z}\left[\hat{x}k\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kx-\omega t)\,dt - \kappa\hat{z}\int_0^{2\pi/\omega}\cos(kx-\omega t)\sin(kx-\omega t)\,dt\right]$$

$\Omega(t) \equiv kx-\omega t \Rightarrow dt = -\frac{d\Omega}{\omega}$ x fijo

$$= \frac{E_0^2}{\mu_2\omega}e^{-\kappa z}\left[-\frac{\hat{x}k}{\omega}\int_{kx}^{kx-2\pi}\cos^2\Omega\,d\Omega + \frac{\hat{z}\kappa}{\omega}\int_{kx}^{kx-2\pi}\cos\Omega\sin\Omega\,d\Omega\right]$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_2\omega}e^{-\kappa z}\left[+\frac{\hat{x}k}{\omega}\pi + \vec{0}\right]$$

con lo que obtenemos que la energía solo se transmite en $\hat{x}$ (paralelo a la interfaz) y no hay energía transmitida hacia dentro del medio 2 (no hay componente de $\langle\vec{S}\rangle$ en $\hat{z}$)