Auxiliar 10

Magnetoestática y magnetización

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

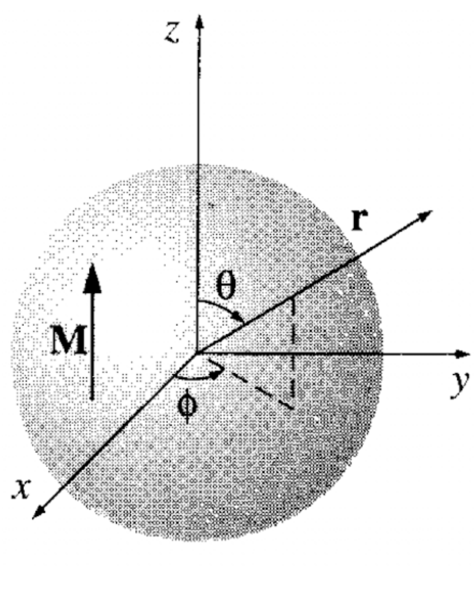
P1.- Magnetoestática

Dos dipolos magnéticos $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ se encuentran en las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ respectivamente. Calcule el campo magnético producido por $\mathbf{m}_1$ en el lugar en que se encuentra el segundo dipolo. Exprese de forma general (para cualquier expresión de los dipolos y las posiciones) el torque entre ellos, luego evalúe para el caso

$$\mathbf{m}_1 = m_1\hat{\mathbf{i}}\,, \quad \mathbf{m}_2 = m_2\hat{\mathbf{j}}\,, \quad \mathbf{r}_1 = L\hat{\mathbf{i}}\,, \quad \mathbf{r}_2 = L\hat{\mathbf{j}}\,.$$

P2.- Magnetización

Considere una esfera de radio R magnetizada uniformemente con una magnetización $\mathbf{M}$. Calcule el campo magnético producido por esta esfera, tanto dentro como fuera de ella.



Formulario

Vector potencial

La expansión multipolar del vector potencial $\mathbf{A}$ está dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\oint \mathrm{d}\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta'\,\mathrm{d}\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3}\oint (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\mathbf{l}' + \dots\right],$$

de aquí vemos que la contribución dipolar es

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

donde $\mathbf{m}$ es el vector dipolo magnético y $\mathbf{r}$ es el vector distancia al origen.
Recordar que la relación del vector potencial con el campo magnético es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Magnetización

Un objeto con una magnetización $\mathbf{M}$ adquiere corrientes ligadas (*bound currents*) dadas por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')]\,\mathrm{d}\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\mathrm{d}\mathbf{a}']$$
$$\Rightarrow \mathbf{J}_b \equiv \nabla\times\mathbf{M}\,;\quad \mathbf{K}_b \equiv \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}},$$

donde $\mathbf{J}_b$ sería la corriente ligada volumétrica, $\mathbf{K}_b$ superficial y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector normal al área $\mathbf{a}'$.

Coordenadas esféricas

El diferencial de área es:

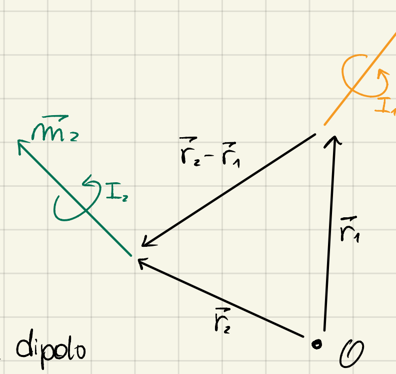
$$\mathrm{d}\mathbf{a} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\hat{\phi},$$

y el rotor de una función $\mathbf{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\phi\hat{\phi}$ es

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}.$$

Auxiliar 10

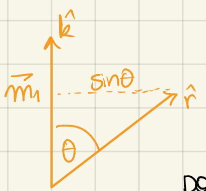
P1



El potencial vector de los dipolos sería:

- $\vec{A}_{dip,1}(\vec{r}-\vec{r}_1) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}_1 \times (\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$
- $\vec{A}_{dip,2}(\vec{r}-\vec{r}_2) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}_2 \times (\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$

Calculemos el campo magnético producido por un dipolo. Consideremos que el dipolo está alineado con el eje $\hat{k}$ de cartesianas, por lo que el producto cruz sería de la forma



$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta\,\hat{\phi}}{r^2}$$

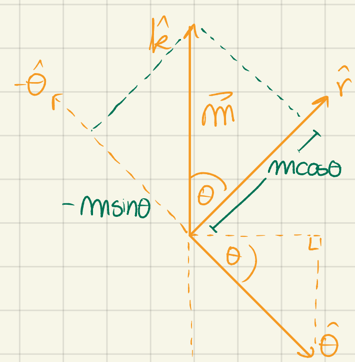
por lo que el vector potencial es de la forma $\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \left(\overset{A_r}{0}, \overset{A_\theta}{0}, \overset{A_\phi}{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}}\right)$, así que en el rotor en esféricas solo nos sobreviven los términos

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\hat{\theta}$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r}\right)\hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3}\hat{\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}(2m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta})$$

Pero queremos una expresión más general! Notemos que



$$\vec{m} = (\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\vec{m}\cdot\hat{\theta})\cdot\hat{\theta} = m\cos\theta\,\hat{r} - m\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{m} = -m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta}$$

y si le sumamos $3m\cos\theta\,\hat{r} = 3(\vec{m}\cdot\hat{r})\cdot\hat{r}$

$$\Rightarrow 3(\vec{m}\cdot\hat{r})\cdot\hat{r} - \vec{m} = 2m\cos\theta\,\hat{r} + m\sin\theta\,\hat{\theta} \qquad \therefore\ \vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}(3(\vec{m}\cdot\hat{r})\cdot\hat{r} - \vec{m})$$

este $\vec{r}$ es el vector desde el dipolo a la posición deseada

Con nuestra expresión de $\vec{B}_{dip}$ válido para cualquier orientación de $\vec{m}$, calculamos el campo producido por el dipolo (magnético) $\vec{m}_1$ en $\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{B}_{\vec{m}_1}(\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}\left[3\left(\vec{m}_1\cdot\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\right)\cdot\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}-\vec{m}_1\right]$$

Y como el torque sobre un dipolo se calcula como $\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{1\to 2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}\,\vec{m}_2\times\left[3\left(\vec{m}_1\cdot\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\right)\cdot\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}-\vec{m}_1\right]$$

Supongamos que $\vec{r}_1=L\hat{\imath}$, $\vec{r}_2=L\hat{\jmath}$ y $\vec{m}_1=m_1\hat{\imath}$ y $\vec{m}_2=m_2\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{1\to 2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|L\hat{\jmath}-L\hat{\imath}|^3}\,m_2\hat{\jmath}\times\left[3\left(m_1\hat{\imath}\cdot\frac{(L\hat{\jmath}-L\hat{\imath})}{|L\hat{\jmath}-L\hat{\imath}|}\right)\cdot\frac{(L\hat{\jmath}-L\hat{\imath})}{|L\hat{\jmath}-L\hat{\imath}|}-m_1\hat{\imath}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{L^3 2^{3/2}}\left[-\frac{3m_1L}{L^6 2^3}\cdot m_2\hat{k}+m_2m_1\hat{k}\right]$$

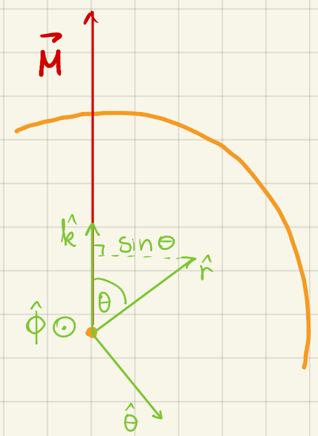
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{L^3 2^{3/2}}m_1m_2\left[1-\frac{3}{L^5 2^3}\right]\hat{k}$$

P2

En presencia de magnetización, se inducen corrientes dadas por

$$\vec{J}_b(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \; ; \qquad \vec{K}_b(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

en nuestro caso $\vec{M}$ es constante $\forall r \leq R \Rightarrow \vec{J}_b(\vec{r}) = \vec{0}$ y la normal a la superficie está dada por $\hat{n} = \hat{r}$, si elegimos un sist. de coordenadas esférico y con $\hat{k}$ alineado con $\vec{M}$, tendríamos



$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{k} \times \hat{r} = \boxed{M \sin\theta \, \hat{\phi}} \overset{!}{=} \sigma \cdot \vec{v}$$

por def. de densidad superficial

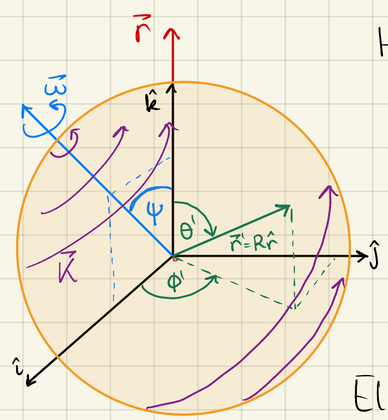
Notemos que esta corriente inducida es igual a la corriente de una esfera con una densidad superficial de carga σ que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$, en este caso

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} = \sigma \omega \hat{k} \times R\hat{r} = \boxed{\sigma \omega R \sin\theta \, \hat{\phi}}$$

así que podemos calcular el campo magnetico de esta espera rotatoria y luego hacer

$$\sigma R \omega = M$$

Calcularemos primero el $\vec{A}(\vec{r})$ y luego $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}$. Debido a que tenemos vectores expresados en distintos sist. debemos casarnos con uno, para simplificar la matraca eligiremos un sist. cartesiano donde el $\vec{r}$ de un sist. de coordenados esféricos, calze con $\hat{k}$. Debido a que no nos interesa solo el caso en que $\vec{r}$ apunta en la misma dirección de $\vec{\omega}$, esta dirección de giro estará ladeada por un ángulo ψ y contenida enteramente en el plano x-z



Habiendo elegido el sist. como en la figura, donde $\vec{r}$ es donde queremos saber el campo magnético y $\vec{r}'$ es el vector que nos va indicando dónde ir integrando, tendríamos

- $\vec{r} = r\hat{k}$ (1)
- $\vec{\omega} = \omega\cos\psi\,\hat{k} + \omega\sin\psi\,\hat{\imath}$ (2)
- $\vec{r}' = R\hat{r}' = R(\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{\imath} + \sin\theta'\sin\phi'\,\hat{\jmath} + \cos\theta'\,\hat{k})$ (3)

El problema es que como muestra la corriente $\vec{K}$ (morado) esta tendría componentes en todos los ejes $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Por mecánica recordamos que la velocidad en un punto $\vec{r}'$ dada una rotación en:

$\vec{\omega} \times \vec{r}'$, usando (2) y (3) que una rotación $\vec{\omega}$ en una posi-

$$= \omega(\cos\psi\,\hat{k} + \sin\psi\,\hat{\imath}) \times R(\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{\imath} + \sin\theta'\sin\phi'\,\hat{\jmath} + \cos\theta'\,\hat{k})$$

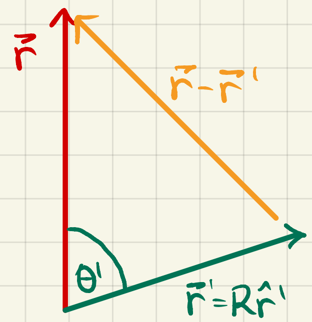
$$= \omega R(-\cos\psi\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{\imath} + (\cos\psi\sin\theta'\cos\phi' - \sin\psi\cos\theta')\hat{\jmath} + \sin\psi\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{k}) \quad (4)$$

Así que la corriente en nuestro sist elegido sería $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\vec{\omega} \times \vec{r}'$ con (4)

Ya tenemos la corriente expresada, sabemos que el diferencial de área de la esfera es

$$da' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

así que faltaría expresar $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$. Por dibujo de la derecha vemos que podemos expresar esta magnitud con teorema del coseno



$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta'}$$

Ya tenemos todo, calculemos el vector potencial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma\omega R\left(-\cos\psi\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{\imath} + (\cos\psi\sin\theta'\cos\phi' - \sin\psi\cos\theta')\,\hat{\jmath} + \sin\psi\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{k}\right)}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta')^{1/2}} R^2\sin\theta' d\theta' d\phi'$$

notamos que se nos van todos los términos con $\sin\phi'$ y $\cos\phi'$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\omega R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{-\sin\psi\cos\theta'\sin\theta' d\theta' d\phi'}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta')^{1/2}}\,\hat{\jmath} = -\frac{\mu_0}{2}\sigma\omega R^3 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta'\cos\theta' d\theta'}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta')^{1/2}}\,\hat{\jmath}$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega R^3 \frac{1}{3R^2r^2}\left[(R^2+r^2+Rr)|R-r| - (R^2+r^2-Rr)(R+r)\right]\hat{\jmath}$$

Notamos en el resultado que hay una diferencia según si $R>r$ o $R<r$, así que $\vec{A}$ sería

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\mu_0 R\sigma\omega r\sin\psi\,\hat{\jmath}/3 & , r<R \\ -\mu_0 R^4\sigma\omega\sin\psi\,\hat{\jmath}/3r^2 & , R<r \end{cases}$$

Notamos por dibujo que $\vec{\omega}\times\vec{r} = -\omega\sin\psi\, r\,\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 R\sigma\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}/3 & , r<R \\ \mu_0 R^4\sigma\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}/3r^3 & , R<r \end{cases}$$

Recordamos el sistema que definimos en un inicio (con $\vec{\omega}$ en $\hat{k}$), ahí teníamos $\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega r\sin\theta\,\hat{\phi}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 R\sigma\omega r\sin\theta\,\hat{\phi}/3 & , r<R \\ \mu_0 R^4\sigma\omega\sin\theta\,\hat{\phi}/3r^2 & , R<r \end{cases}$$

en este sistema, $\vec{A}(\vec{r})$ sería de la forma $\vec{A} = (0,0,A_\phi)$, así que el rotor $(\vec{B} = \nabla\times\vec{A})$ sería de la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\hat{\theta} \;\ldots\; \text{hágonlo ustedes}$$