Mecánica FI2001-3
Ejercicio 8: Martes 6 de junio, 2023

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

Considere una caja con dos bloques de masa m en su interior conectados por resortes de constante de restitución k (ver figura). El ancho de la caja es D y los largos naturales de los resortes son los indicados en la figura. Las posiciones de los bloques con respecto a la pared izquierda son x_1 y x_2. Asuma que siempre se tiene $0 < x_1 < x_2 < D$. Es posible mostrar (hágalo después) que el Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}(x_1 - D/4)^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - D)^2 - \frac{k}{2}(x_2 - 3D/4)^2. \quad (1)$$

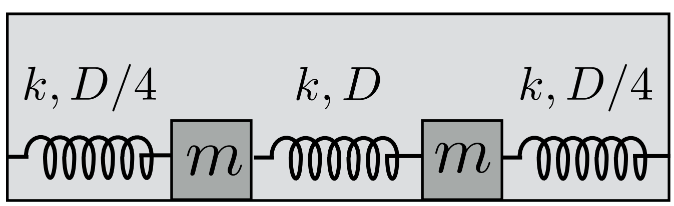
A partir de este resultado:

(a) Usando los criterios $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0$, determine las posiciones de equilibrio x_1^0 y x_2^0 de ambos bloques.

(b) Defina las variables $\delta x_1 = x_1 - x_1^0$ y $\delta x_2 = x_2 - x_2^0$. Muestre que, salvo una constante aditiva, el Lagrangiano para los desplazamientos fuera del equilibrio tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_2^2 - k(\delta x_2^2 + \delta x_1^2 - \delta x_2 \delta x_1). \quad (2)$$

(c) A partir del Lagrangiano obtenido en la parte anterior, deduzca las ecuaciones de movimiento respetadas por las variables δx_1 y δx_2.



Ejercicio 8

(a) Calculamos las derivadas $\partial L/\partial x_i$ e imponemos que sean iguales a 0

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1^0 - D/4) + k(x_2^0 - x_1^0 - D) = 0$ (1)

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2^0 - x_1^0 - D) - k(x_2^0 - 3D/4) = 0$ (2)

Sumando (1) y (2)

$$\Rightarrow \; -x_1^0 + D/4 - x_2^0 + 3D/4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x_1^0 = D - x_2^0 \quad (3)$$

reemplazando (3) en (1)

$$\Rightarrow -2(D - x_2^0) - \frac{3D}{4} + x_2^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2^0 = \frac{11D}{4} \Leftrightarrow x_2^0 = \frac{11D}{12} \quad (4)$$

$$\therefore \; x_1^0 = \frac{D}{12}$$

(b) Consideramos las perturbaciones δx_i como

$$x_1(t) = D/12 + \delta x_1(t) \quad , \quad x_2(t) = 11D/12 + \delta x_2(t)$$

donde $|\delta x_i| \ll 1$. Para las velocidades tenemos

$$\dot{x}_1 = \delta\dot{x}_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = \delta\dot{x}_2$$

ahora reemplazamos en el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}(\delta x_1 - D/6)^2 - \frac{k}{2}(-\delta x_1 + \delta x_2 - 13D/12)^2 - \frac{k}{2}(\delta x_2 - D/6)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}\Big[\delta x_1^2 - \delta x_1 D/3 + a + \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + 13\,\delta x_1 D/6 - 13\,\delta x_2 D/6 + b + \delta x_2^2 - \delta x_2 D/3 + c - 2\delta x_1 \delta x_2\Big]$$

$$= \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_2^2 - k\left[\delta x_1^2 + \delta x_2^2 - \delta x_1 \delta x_2\right] + \delta x_1 \cdot d + \delta x_2 \cdot e + f = 0$$

donde a, b, c, d, e, f son ctes conocidas, pero no nos interesan, ya que el término f no aparecerá en las ecs. de mov. y las contribuciones $\delta x_1 \cdot d \wedge \delta x_2 \cdot e$ otorgarán ctes. a las ecs. de mov. por lo que las podríamos hacer desaparecer con un c.v. correspondiente y no cambia la dinámica (recordar Ejerc. 3) así que el Lagrangiano que nos interesa es

$$L = \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_2^2 - k\left(\delta x_1^2 + \delta x_2^2 - \delta x_1 \delta x_2\right)$$

(c) Calculamos las dos ecs. de E-L

- $\dfrac{\partial L}{\partial \delta x_1} = -2k\,\delta x_1 + k\,\delta x_2$ ▹ $\dfrac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_1} = m\,\delta\dot{x}_1$

$$\therefore\; m\,\delta\ddot{x}_1 + 2k\,\delta x_1 - k\,\delta x_2 = 0$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \delta x_2} = -2k\,\delta x_2 + k\,\delta x_1$ ▹ $\dfrac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_2} = m\,\delta\dot{x}_2$

$$\therefore\; m\,\delta\ddot{x}_2 + 2k\,\delta x_2 - k\,\delta x_1 = 0$$