Mecánica FI2001-3
Ejercicio 7: Martes 30 de mayo, 2023

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

Considere un sistema de osciladores descritos por coordenadas x_1 y x_2, y que satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\ddot{x}_1 + 2\omega_0^2\, x_1 - \omega_0 \delta\omega\, x_2 = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{x}_2 - \omega_0 \delta\omega\, x_1 + \omega_0^2\, x_2 = 0, \tag{2}$$

donde ω_0 y $\delta\omega$ son constantes conocidas. Asuma que $|\delta\omega| \ll \omega_0$.

(a) Determine la forma de la matriz de frecuencias Ω^2.
(b) Calcule las frecuencias normales de oscilación del sistema (recuerde que $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$).

(c) Para la casa: Calcule los vectores propios y determine los modos normales de oscilación.

Solución:

(a) $\Omega^2 = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0\delta\omega \\ -\omega_0\delta\omega & \omega_0^2 \end{pmatrix}$.

(b) $\det(\Omega^2 - \lambda I) = (2\omega_0^2 - \lambda)(\omega_0^2 - \lambda) - \omega_0^2(\delta\omega)^2 = 0$. Esta ecuación implica $\lambda^2 - 3\omega_0^2\lambda + \omega_0^2(2\omega_0^2 - (\delta\omega)^2) = 0$. Las soluciones son

$$\lambda = \frac{3\omega_0^2}{2} \pm \frac{\omega_0^2}{2}\sqrt{1 + \frac{4(\delta\omega)^2}{\omega_0^2}} \simeq \frac{3\omega_0^2}{2} \pm \frac{\omega_0^2}{2}(1 + \frac{2(\delta\omega)^2}{\omega_0^2}) \tag{3}$$

Luego $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{2\omega_0^2 + (\delta\omega)^2}$ y $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\omega_0^2 - (\delta\omega)^2}$.

(c) El vector asociado a λ_1 cumple

$$\begin{pmatrix} -(\delta\omega)^2 & -\omega_0\delta\omega \\ -\omega_0\delta\omega & -\omega_0^2 - (\delta\omega)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

Es decir $e_{12} = -\frac{\delta\omega}{\omega_0} e_{11}$. Luego, el vector tiene la forma $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\delta\omega}{\omega_0} \end{pmatrix} e_{11}$. Normalizando, se encuentra:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\delta\omega}{\omega_0} \end{pmatrix} / \sqrt{1 + \frac{(\delta\omega)^2}{\omega_0^2}} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\delta\omega}{\omega_0} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Repitiendo para λ_2 se obtiene $e_{21} = \frac{\delta\omega}{\omega_0} e_{22}$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\omega_0} \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{1 + \frac{(\delta\omega)^2}{\omega_0^2}} \simeq \begin{pmatrix} \frac{\delta\omega}{\omega_0} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Se aprecia que los vectores son ortogonales.