Mecánica FI2001-3
Ejercicio 6: Martes 16 de mayo, 2023

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Francisco Colipi y Javier Huenupi
Ayudantes: Gabriel Marín y Valentina Suárez

Suponga que un sistema conservativo descrito por la coordenada q tiene una energía mecánica de la forma $E = \frac{1}{2}f(q)\dot{q}^2 + u(q)$, donde $f(q) > 0$ y $u(q)$ son funciones conocidas.

(a) A partir de $\dot{E} = 0$ obtenga la ecuación de movimiento que debe respetar q.

(b) Suponga que $u'(q_e) = 0$ para cierto valor q_e y defina $\delta q = q - q_e$. Obtenga la ecuación de movimiento *linealizada* válida para la variable δq.

(c) A partir de la ecuación obtenida, argumente que si $u''(q_e) > 0$ ($u''(q_e) < 0$) entonces q_e es un punto de equilibrio estable (inestable). Obtenga una expresión para la frecuencia natural de pequeñas oscilaciones ω_0. Esta debe depender de $u''(q_e)$ y $f(q_e)$.

Indicación: Recuerde que una función $g(q)$ arbitraria expandida en serie de Taylor torno a q_e puede ser escrita como:

$$g(q) = g(q_e) + g'(q_e)\delta q + \frac{1}{2}g''(q_e)\delta q^2 + \cdots\,, \qquad \delta q = q - q_e. \tag{1}$$

Ejercicio 6

(a) Tenemos la energía de la forma $E = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2 + U(q)$, derivando se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{f}(q)\dot{q} + \frac{1}{2} f(q)\ddot{q} + \dot{U}$$

regla de la cadena

$$= \frac{1}{2} f'(q)\dot{q}^2 + \frac{1}{2} f(q)\ddot{q} + U'\dot{q} \overset{!}{=} 0$$

, donde $' = \frac{\partial}{\partial q}$

(b) Definimos $q = q_e + \delta q$ t.q. $U'(q_e) = 0$, reemplazamos

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f'(q_e + \delta q)\,\delta\dot{q}^2 + \frac{1}{2} f(q_e + \delta q)\,\delta\ddot{q} + U'(q_e + \delta q)\,\delta\dot{q} = 0$$

expandemos en Taylor $f(q_e + \delta q) = f(q_e) + f'(q_e)\,\delta q + \dots$ y $U'(q_e + \delta q) = \underbrace{\cancel{U'(q_e)}}_{=0 \text{ por def.}} + U''(q_e)\,\delta q + \dots$

además despreciamos el término $\delta\dot{q}^2$ al ser de segundo orden

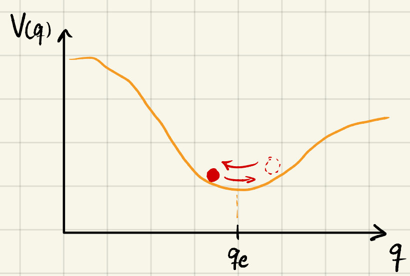
$$\therefore \frac{1}{2}\left(f(q_e) + \underbrace{\cancel{f'(q_e)\,\delta q}}_{\delta q\,\delta\ddot{q} \text{ segundo orden}}\right)\delta\ddot{q} + U''(q_e)\,\delta q = 0$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{q} + \frac{2U''(q_e)}{f(q_e)}\,\delta q = 0 \iff \delta\ddot{q} = -\frac{2U''(q_e)}{f(q_e)}\,\delta q$$

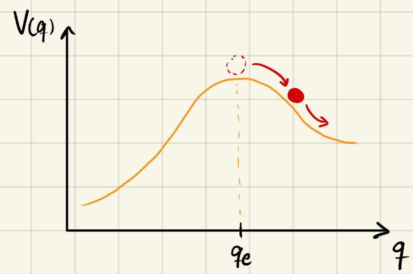
Por segunda Ley de Newton $m\ddot{q} = \Sigma F$, entonces

$$F \propto -\frac{U''(q_e)}{f(q_e)}$$

como $f(x) > 0$, si $U''(q_e) > 0$ la "fuerza" sería atractiva, por lo que siempre que la partícula se aleje (un poco) de q_e, será atraída nuevamente con lo que tendríamos un pto. de equilibrio estable. Mientras que si $U''(q_e) < 0$ la "fuerza" tendería a alejar a la partícula de q_e y entre más lejos, más fuerte la aleja, así que sería un pto. de equilibrio inestable.



Caso $U''(q_e) > 0$



Caso $U''(q_{eq}) < 0$

También lo podrían ver solucionando la EDO que nos quedó, usando el ansatz $\delta q(t) \propto e^{\omega t}$, donde

- $\mathcal{U}''(q_e) > 0 \longrightarrow \omega \in \mathbb{C} \therefore$ Mov. oscilatorio
- $\mathcal{U}''(q_e) < 0 \longrightarrow \omega \in \mathbb{R} \therefore \delta q(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ o ∞

Reemplacemos el ansatz en la EOM

$$\Rightarrow \omega^2 e^{\omega t} + \frac{2\mathcal{U}''(q_e)}{f(q_e)} e^{\omega t} = 0 \quad / \cdot e^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{2\mathcal{U}''(q_e)}{f(q_e)}}$$

$$\therefore \delta q(t) = A e^{\omega_1 t} + B e^{\omega_2 t}$$

donde comprobamos lo mencionado sobre la estabilidad