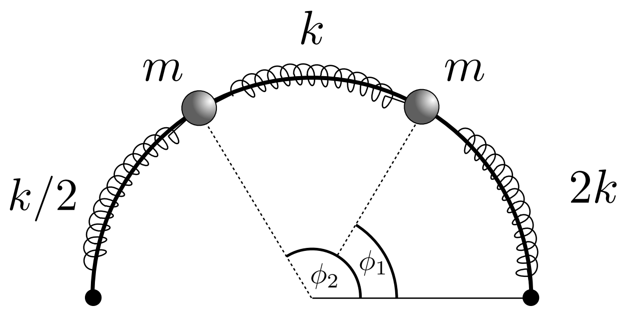
Mecánica FI2001-2
Ejercicio 5: Lunes 24 de junio, 2024

Prof. Gonzalo A. Palma. - Auxiliares: Javier Huenupi y Eduardo Droguett
Ayudantes: Thiare González, Lukas Philippi y Claudia San Martín.

La figura muestra un ambiente **sin gravedad** en la cual existen dos cuentas idénticas de masa m confinadas a moverse a lo largo de un alambre semi-circular de radio R. La cuentas permanecen unidas entre sí y a los extremos del alambre mediante tres resortes de constantes elásticas $2k$, k y $k/2$, en el orden mostrado en la figura. El largo natural de los resortes $2k$ y $k/2$ es $\pi R/3$, mientras que el largo natural del resorte k es $\pi R/2$.



Es posible mostrar que el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}_2^2 - kR^2(\phi_1 - \pi/3)^2 - \frac{k}{2}R^2(\phi_2 - \phi_1 - \pi/2)^2 - \frac{k}{4}R^2(\phi_2 - 2\pi/3)^2 \tag{1}$$

A partir de este resultado:

(a) Usando los criterios $\frac{\partial L}{\partial \phi_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \phi_2} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = 0$, determine las posiciones de equilibrio ϕ_1^0 y ϕ_2^0 de ambas cuentas.

(b) Defina las variables $\delta\phi_1 = \phi_1 - \phi_1^0$ y $\delta\phi_2 = \phi_2 - \phi_2^0$. Muestre que, salvo una constante aditiva, el Lagrangiano para los desplazamientos fuera del equilibrio adquiere la forma

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left(\delta\dot{\phi}_1^2 + \delta\dot{\phi}_2^2\right) - kR^2\left(\frac{3}{2}\delta\phi_1^2 + \frac{3}{4}\delta\phi_2^2 - \delta\phi_2\delta\phi_1\right). \tag{2}$$

(c) A partir del Lagrangiano obtenido en la parte anterior, deduzca las ecuaciones de movimiento respetadas por las variables $\delta\phi_1$ y $\delta\phi_2$.

Solución: Calculando las derivadas del Lagrangiano se encuentra:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= -2kR^2(\phi_1 - \pi/3) + kR^2(\phi_2 - \phi_1 - \pi/2), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = mR^2\dot{\phi}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= -kR^2(\phi_2 - \phi_1 - \pi/2) - \frac{kR^2}{2}(\phi_2 - 2\pi/3), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = mR^2\dot{\phi}_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Imponiendo que son zero, vemos que la configuración de equilibrio satisface $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0$ con:

$$\phi_1^0 = 13\pi/42, \qquad \phi_2^0 = 16\pi/21. \tag{4}$$

Reemplazando $\phi_1 = \delta\phi_1 + 13\pi/42$ y $\phi_2 = \delta\phi_2 + 16\pi/21$ vemos que

$$L = \frac{m}{2}R^2(\delta\dot{\phi}_1^2 + \delta\dot{\phi}_2^2) - kR^2(\delta\phi_1 - \pi/42)^2 - \frac{k}{2}R^2(\delta\phi_2 - \delta\phi_1 - \pi/21)^2 - \frac{k}{4}R^2(\delta\phi_2 + 2\pi/21)^2 \tag{5}$$

Expandiendo los paréntesis:

$$\begin{aligned}
L =& \frac{m}{2}R^2(\delta\dot{\phi}_1^2 + \delta\dot{\phi}_2^2) - kR^2(\delta\phi_1^2 - \delta\phi_1\pi/21 + \pi^2/(42)^2) \\
&-\frac{k}{2}R^2(\delta\phi_2^2 + \delta\phi_1^2 - 2\delta\phi_1\delta\phi_2 - 2\delta\phi_2\pi/21 + 2\delta\phi_1\pi/21 + \pi^2/(21)^2) \\
&-\frac{k}{4}R^2(\delta\phi_2^2 + 4\delta\phi_2\pi/21 + 4\pi^2/(21)^2).
\end{aligned} \tag{6}$$

De donde se ven muchas cancelaciones:

$$L = \frac{m}{2}R^2(\delta\dot{\phi}_1^2 + \delta\dot{\phi}_2^2) - \frac{3}{2}kR^2\delta\phi_1^2 - \frac{3k}{4}R^2\delta\phi_2^2 + kR^2\delta\phi_1\delta\phi_2 - 7kR^2\pi^2/(42)^2 \tag{7}$$

Tomando derivadas con respecto a las cantidades $\delta\phi_1$ y $\delta\phi_2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \delta\phi_1} &= -3kR^2\delta\phi_1 + kR^2\delta\phi_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = mR^2\delta\dot{\phi}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \delta\phi_2} &= -\frac{3}{2}kR^2\delta\phi_2 + kR^2\delta\phi_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = mR^2\delta\dot{\phi}_2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Luego, las ecuaciones de Euler Lagrange implican:

$$\delta\ddot{\phi}_1 + 3\frac{k}{m}\delta\phi_1 - \frac{k}{m}\delta\phi_2 = 0, \tag{9}$$

$$\delta\ddot{\phi}_2 - \frac{k}{m}\delta\phi_1 + \frac{3}{2}\frac{k}{m}\delta\phi_2 = 0. \tag{10}$$